ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXV, DISP. 1ª, 1899-900

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1900

DISTRIBUZIONE DELLE SEDUTE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1899-900

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1899 - 19 Novembre	1899 - 26 Novembre
» - 3 Dicembre	» - 10 Dicembre
» - 17 »	» - 24 »
» - 31 »	1900 - 7 Gennaio
1900 - 14 Gennaio	» - 21 »
» - 28 »	» - 4 Febbraio
» - 11 Febbraio	» - 18 »
» - 25 »	» - 4 Marzo
» - 11 Marzo	» - 18 »
» - 25 »	» - 1 Aprile
» - 8 Aprile	» - 22 »
» - 29 »	» - 6 Maggio
» - 13 Maggio	» - 20 »
» - 27 »	» - 10 Giugno
» - 17 Giugno	» - 24 »

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

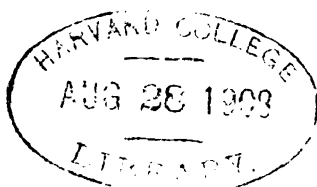
PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME TRENTACINQUESIMO

1899-900

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1900

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI
STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 19 NOVEMBRE MDCCCXCIX.

PRESIDENTE

CARLE (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, ✠, Comm. ✿.

VICE-PRESIDENTE

COSSA (Alfonso), Dottore in Medicina, Direttore della Regia Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Torino, Professore di Chimica docimastica nella medesima Scuola e di Chimica minerale presso il R. Museo Industriale Italiano, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Berlino, Socio ordinario non residente dell'Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli, Socio della Reale Accademia di Agricoltura di Torino e Socio dell'Accademia Gioenia di Catania, Socio onorario dell'Accademia Olimpica di Vicenza, Socio corrispondente della Società di scienze naturali di Cherbourg, Socio effettivo della Società Imperiale Mineralogica di Pietroburgo, Comm. ✠, ✿, e dell'O. d'Is. Catt. di Sp.

Tesoriere

D'Ovidio (Enrico), Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica, incaricato di Analisi superiore e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Torino; Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, ecc., Uffiz. ✠, Comm. ✠.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Bizzozero (Giulio), Senatore del Regno, Professore e Direttore del Laboratorio di Patologia generale nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e delle RR. Accademie di Medicina e di Agricoltura di Torino, Socio Straniero dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum,* Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro del Consiglio Superiore di Sanità, ecc., Comm. ✠ e Gr. Uffiz. ✠.

Segretario

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✠, ✠.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo *Cavour* di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze Naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro Corrispondente della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze Naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio Straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ▬, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo).

Cossa (Alfonso), *predetto*.

Berruti (Giacinto), Direttore del R. Museo Industriale Italiano e dell'Officina governativa delle Carte-Valori, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Gr. Uffiz. ▬; Comm. ✻, dell'O. di Francesco Giuseppe d'Austria, della L. d'O. di Francia, e della Repubblica di S. Marino.

D'Ovidio (Enrico), *predetto*.

Bizzozero (Giulio), *predetto*.

Naccari (Andrea), *predetto*.

Mosso (Angelo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia e Rettore della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), della R. Accademia di

Medicina di Torino, Uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio onorario della R. Accademia medica di Roma, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, della R. Accademia medica di Genova, Socio dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, della Società Reale di Scienze mediche e naturali di Bruxelles, della Società fisico-medica di Erlangen, Socio straniero della R. Accademia delle Scienze di Svezia, Socio corrispondente della Società Reale di Napoli, Socio corrispondente della Società di Biologia di Parigi, ecc. ecc., ✠, Comm. ✠.

Spezia (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo mineralogico della Regia Università di Torino, ✠.

Camerano (Lorenzo), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro della Società Zoologica di Francia, Membro corrispondente della Società Scientifica del Cile e della Società Zoologica di Londra.

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, ✠.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della " *Sociedad Cientifica* " del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo.

Volterra (Vito), Dottore in Fisica, Professore di Meccanica razionale nella R. Università di Torino, ✠.

JADANZA (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Uff. .

FOÀ (Pio), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. .

GUARESCHI (Icilio), Dottore in Scienze Naturali, Professore e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Membro della Società Chimica di Berlino, ecc., .

GUIDI (Camillo), Ingegnere, Professore di Statica grafica e scienza delle costruzioni nella R. Scuola di Applicazione per gl'Ingegneri in Torino, .

FILETI (Michele), Dottore in Chimica, Professore ordinario di Chimica generale nella R. Università di Torino, .

PARONA (Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore del Museo di Geologia della R. Università di Torino, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti e Corrispondente dell'I. R. Istituto Geologico di Vienna.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Reale di Napoli, Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia, Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Berlino, di Vienna e di Pietroburgo, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze di Baviera, della Società Reale di Londra, della Società Reale di Edimburgo e della Società letteraria e filosofica di Manchester, Socio onorario della Società chimica tedesca, di Londra e Americana, Comm. ✠, Gr. Uffiz. ✠, ✠.

Schiaparelli (Giovanni), Direttore del R. Osservatorio astronomico di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Reale di Napoli e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Astronomia), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di Berlino, di Pietroburgo, di Stockolma, di Upsala, di Cracovia, della Società de' Naturalisti di Mosca, della Società Reale e della Società astronomica di Londra, Gr. Cord. ✠, Comm. ✠; ✠.

Siacci (Francesco), Senatore del Regno, Colonnello d'Artiglieria nella Riserva, Professore onorario della R. Università di Torino, Professore ordinario di Meccanica razionale ed Incaricato della Meccanica superiore nella R. Università di Napoli, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, e dell'Accademia Pontaniana, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Uff. ✠, Comm. ✠.

Cremona (Luigi), Senatore del Regno, Professore di Matematica superiore nella R. Università di Roma, Direttore della Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri, Presidente della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio del R. Istituto Lombardo, del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, delle Società Reali di Londra, di Edimburgo, di Gottinga, di Praga, di Liegi e di Copenaghen, delle Società matematiche di Londra, di Praga e di Parigi, delle Reali Accademie di Napoli, di Dublino, di Amsterdam e di Monaco, Membro onorario dell'Insigne Accademia romana di Belle Arti detta di San Luca, della Società Fisico-medica di Erlangen, della Società Filosofica di Cambridge e dell'Associazione britannica pel progresso delle Scienze, Membro Straniero della Società delle Scienze di Harlem, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), dell'Imperiale Accademia di Vienna, delle Reali Accademie di Berlino e di Lisbona, e dell'Accademia Pontaniana in Napoli, Dottore (LL. D.) dell'Università di Edimburgo, Dottore (D. Sc.) dell'Università di Dublino, Professore emerito nell'Università di Bologna, Gr. Uffiz. ✱, Gr. Cord. ▬, Cav. e Cons. ✠.

Beltrami (Eugenio), Senatore del Regno, Professore di Fisica matematica nella R. Università di Roma, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio effettivo del R. Istituto Lombardo e della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, Socio estero della R. Accademia di Gottinga, Socio Corrispondente della R. Accademia di Berlino, della Società Reale di Napoli, dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Meccanica), della Società Matematica di Londra, della Reale Accademia di Bruxelles, della R. Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), Gr. Uffiz. ▬; ✱, ✠.

Fergola (Emanuele), Professore di Astronomia nella R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei, Socio residente dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del

R. Istituto d'incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto, Comm. ✠, ♔.

Felici (Riccardo), Professore Emerito della R. Università di Pisa, Socio ordinario della Società italiana delle Scienze detta dei XL e della R. Accademia dei Lincei, Presidente onorario della Società di Fisica Italiana, Socio Corrispondente della Società Fisico-medica di Würzburg, Socio onorario della Società Fisica di Londra, del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere in Milano, della R. Accademia Lucchese di scienze, lettere ed arti, della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, ✠, Gr. Uff. ♔, ✿.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli e del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere in Milano, ✠, ♔.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi Superiore nella R. Università di Pisa, Membro del Consiglio Superiore dell'Istruzione Pubblica, Socio della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente della R. Società delle Scienze di Gottinga, Uff. ✠, Cav. ♔.

Golgi (Camillo), Membro del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, uno dei XL della Società italiana delle scienze, Membro della Società per la medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-Mediche di Würzburg e di Erlangen, Membro della Società Anatomica della Germania, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di medicina di

Torino, Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-Fisica Fiorentina, della Società Medico-Chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-Chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New York, Socio onorario della *Royal microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di medicina del Belgio, Membro onorario della Società freniatrica italiana e dell'Associazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Cav. ✠, Comm. ✠.

ACCADEMICI STRANIERI

Hermite (Carlo), Professore nella Facoltà di Scienze, Parigi.

Kelvin (Guglielmo Thomson, Lord), Professore nell'Università di Glasgow.

Gegenbaur (Carlo), Professore nell'Università di Heidelberg.

Virchow (Rodolfo), Professore nell'Università di Berlino.

Koelliker (Alberto von), Professore nell' Università di Würzburg.

Bertrand (Giuseppe Luigi), Professore nel Collegio di Francia, membro dell'Istituto, Parigi.

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena.

Berthelot (Marcellino), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto, Parigi.

CORRISPONDENTI

SEZIONE
DI MATEMATICHE PURE

TARDY (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova . . . . *Firenze*

CANTOR (Maurizio), Professore nell'Università di . . . . *Heidelberg*

SCHWARZ (Ermanno A.), Professore nella Università di . . . . *Berlino*

BERTINI (Eugenio), Professore nella Regia Università di . . . . *Pisa*

DARBOUX (G. Gastone), dell'Istituto di Francia *Parigi*

POINCARÉ (G. Enrico), dell'Istituto di Francia *Parigi*

NOETHER (Massimiliano), Professore nell'Università di . . . . *Erlangen*

JORDAN (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto . . . . . *Parigi*

MITTAG-LEFFLER (Gustavo), Professore a . *Stoccolma*

PICARD (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia . . . . . . *Parigi*

CESÀRO (Ernesto), Professore nella R. Università di . . . . *Napoli*

CASTELNUOVO (Guido), Professore nella R. Università di . . . . *Roma*

VERONESE (Giuseppe), Professore nella Regia Università di . . . . *Padova*

SEZIONE

DI MATEMATICHE APPLICATE, ASTRONOMIA E SCIENZA DELL'INGEGNERE CIVILE E MILITARE

TACCHINI (Pietro), Direttore dell'Osservatorio del Collegio Romano . . . . *Roma*

FASELLA (Felice) . . . . *Torino*

ZEUNER (Gustavo), Professore nel Politecnico di . . . . *Dresda*

EWING (Giovanni Alfredo), Professore nell'Università di . . . . *Cambridge*

LORENZONI (Giuseppe), Professore nella Regia Università di . . . . *Padova*

CELORIA (Giovanni), Astronomo all'Osservatorio di . . . . *Milano*

HELMERT (F. Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia . . . . *Potsdam*

FIORINI (Matteo), Professore della R. Università di . . . . *Bologna*

FAVERO (Giambattista), Professore nella R. Scuola di Applicazione degli Ingegneri in . *Roma*

SEZIONE

DI FISICA GENERALE E SPERIMENTALE

BLASERNA (Pietro), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . . *Roma*

KOHLRAUSCH (Federico), Presidente dell'Istituto Fisico-Tecnico in . . . . *Charlottenburg*

CORNU (Maria Alfredo), dell'Istituto di Francia *Parigi*

VILLARI (Emilio), Professore nella R. Università di . . . . *Napoli*

ROITI (Antonio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in *Firenze*

RIGHI (Augusto), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . . *Bologna*

LIPPMANN (Gabriele), dell'Istituto di Francia *Parigi*

RAYLEIGH (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella " *Royal Institution* „ di . . . . *Londra*

THOMSON (Giuseppe Giovanni), Professore nell'Università di. . . . . *Cambridge*

BOLTZMANN (Luigi), Professore nell'Università di . . . . *Vienna*

MASCART (Eleuterio), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto . . . . *Parigi*

PACINOTTI (Antonio), Professore nella Regia Università di . . . . *Pisa*

STOKES (Giorgio Gabriele), Professore nella Università di . . . . *Cambridge*

SEZIONE
DI CHIMICA GENERALE ED APPLICATA

Paternò (Emanuele), Professore di Chimica applicata nella R. Università di . . . . . . *Roma*

Körner (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in *Milano*

Baeyer (Adolfo von), Professore nell'Università di . . . . *Monaco* (Baviera)

Williamson (Alessandro Guglielmo), della R. Società di . . . . *Londra*

Thomsen (Giulio), Professore nell'Università di . . . . *Copenhagen*

Lieben (Adolfo), Professore nell'Università di *Vienna*

Mendelejeff (Demetrio), Professore nell'Università di . . . . *Pietroburgo*

Hoff (Giacomo Enrico van't), Professore nell'Università di . . . . *Berlino*

Fischer (Emilio), Professore nell' Università di . . . . *Berlino*

Ramsay (Guglielmo), Professore nell' Università di . . . . *Londra*

SEZIONE
DI MINERALOGIA, GEOLOGIA E PALEONTOLOGIA

Strüver (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di . . . . *Roma*

Rosenbusch (Enrico), Professore nell'Università di . . . . *Heidelberg*

NORDENSKIÖLD (Adolfo Enrico), della R. Accademia delle Scienze di . . . . *Stoccolma*

ZIRKEL (Ferdinando), Professore nell'Università di . . . . *Lipsia*

CAPELLINI (Giovanni), Professore nella Regia Università di . . . . *Bologna*

TSCHERMAK (Gustavo), Professore nell'Università di . . . . *Vienna*

KLEIN (Carlo), Professore nell'Università di *Berlino*

GEIKIE (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica . . . . *Londra*

FOUQUÉ (Ferdinando Andrea), Professore nel Collegio di Francia, membro dell'Istituto . . *Parigi*

RAMMELSBERG (Carlo Federico), Professore nell'Università di. . . . . *Berlino*

DAMOUR (Agostino Alessio), Professore nella Scuola Nazionale Superiore delle Miniere, Membro dell'Istituto di Francia . . . . *Parigi*

GEMMELLARO (Gaetano Giorgio), Professore nella R. Università di . . . . *Palermo*

GROTH (Paolo Enrico), Professore nell'Università di . . . . *Monaco*

SEZIONE
DI BOTANICA E FISIOLOGIA VEGETALE

ARDISSONE (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in *Milano*

SACCARDO (Andrea), Professore di Botanicà nella R. Università di . . . . *Padova*

HOOKER (Giuseppe DALTON), Direttore del Giardino Reale di Kew . . . . *Londra*

DELPINO (Federico), Professore nella R. Università di . . . . *Napoli*

PIROTTA (Romualdo), Professore nella Regia Università di . . . . *Roma*

STRASBURGER (Edoardo), Professore nell'Università di . . . . *Bonn*

MATTIROLO (Oreste), Professore di Botanica nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento . . . . *Firenze*

GOEBEL (Carlo), Professore nell'Università di *Monaco*

PENZIG (Ottone), Professore nell'Università di *Genova*

SCHWENDENER (Simone), Professore nell'Università di . . . . *Berlino*

SEZIONE

DI ZOOLOGIA, ANATOMIA E FISIOLOGIA COMPARATA

DE SELYS LONGCHAMPS (Edmondo) . . . *Liegi*

PHILIPPI (Rodolfo Armando) . . . . . *Santiago* (Chilì)

SCLATER (Filippo LUTLEY), Segretario della Società Zoologica di . . . . *Londra*

FATIO (Vittore), Dottore . . . . *Ginevra*

KOVALEWSKI (Alessandro), Professore nell'Università di . . . . *Pietroburgo*

LOCARD (Arnould), dell' Accademia delle Scienze di . . . . *Lione*

CHAUVEAU (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di . . . . *Parigi*

FOSTER (Michele), Professore nell' Università di . . . . *Cambridge*

WALDEYER (Guglielmo), Professore nell'Università di . . . . *Berlino*

GUENTHER (Alberto) . . . . *Londra*

FLOWER (Guglielmo Enrico), Direttore del Museo di Storia naturale . . . . *Londra*

EDWARDS (Alfonso Milne), Membro dell'Istituto di Francia . . . . *Parigi*

ROUX (Guglielmo), Professore nella Università di . . . . *Monaco* (Baviera

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore

CLARETTA (Barone Gaudenzio), Dottore in Leggi, Socio e Segretario della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Membro della Commissione conservatrice dei monumenti di antichità e belle arti della Provincia ecc., Comm. ✠, Gr. Uffiz. ✠.

Segretario

N. N.

ACCADEMICI RESIDENTI

PEYRON (Bernardino), Professore di Lettere, Bibliotecario Onorario della Biblioteca Nazionale di Torino, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Gr. Uffiz. ✠, Uffiz. ✠.

CLARETTA (Barone Gaudenzio), *predetto.*

ROSSI (Francesco), Dottore in Filosofia, Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della Società per gli Studi biblici in Roma, ✠.

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ✠ e ♛, Cav. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta.

Bollati di Saint-Pierre (Barone Federigo Emanuele), Dottore in Leggi, Soprintendente agli Archivi Piemontesi e Direttore dell'Archivio di Stato in Torino, Membro del Consiglio d'Amministrazione presso il R. Economato generale delle antiche Provincie, Corrispondente della Consulta araldica, Vice-Presidente della Commissione araldica per il Piemonte, Membro della R. Deputazione sopra gli studi di storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia e della Società Accademica d'Aosta, Socio corrispondente della Società Ligure di Storia patria, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, della Società Colombaria Fiorentina, della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie della Romagna, della nuova Società per la Storia di Sicilia e della Società di Storia e di Archeologia di Ginevra, Membro onorario della Società di Storia della Svizzera Romanza, dell'Accademia del Chablais, e della Società Savoina di Storia e di Archeologia ecc., Uffiz. ✠, Comm. ♛.

Pezzi (Domenico), Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neo-latine nella R. Università di Torino, ♛.

Ferrero (Ermanno), Dottore in Giurisprudenza, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia e Professore di Archeologia nella R. Università di Torino, Professore di Storia dell'arte militare nell'Accademia Militare, R. Ispettore per gli scavi e le scoperte di antichità nel Circondario di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le antiche Provincie e la Lombardia, Membro e Segretario della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Socio Corrispondente straniero onorario della Società Nazionale degli Antiquarii della Francia, Socio corrispondente della R. Depu-

tazione di Storia patria per le Provincie di Romagna e dell'Imp. Instituto Archeologico Germanico, fregiato della Medaglia del merito civile di 1ª cl. della Repubblica di S. Marino, ✠, ✿.

Carle (Giuseppe), *predetto*.

Cognetti De Martiis (Salvatore), Professore ordinario di Economia politica nella R. Università di Torino, Incaricato per l'Economia e Legislazione industriale nel Museo Industriale Italiano, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia dei Georgofili e della Società Reale di Napoli (Accademia di Scienze morali e politiche), ✠, Comm. ✿.

Graf (Arturo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società romana di Storia patria, Uffiz. ✠ e ✿.

Boselli (Paolo), Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Uffiz. ✠, Gr. Cord. ✿, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo, Ministro del Tesoro del Regno d'Italia.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore di Storia moderna nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Socio Nazionale della R. Accademia

dei Lincei, Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Uffiz.

Brusa (Emilio), Dottore in Leggi, Professore di Diritto e Procedura Penale nella R. Università di Torino, Consigliere superiore della Pubblica Istruzione, Membro della Commissione per la Statistica giudiziaria e della Commissione per la riforma del Codice di procedura penale, Socio Corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), ed effettivo dell'Istituto di Diritto internazionale, Socio Onorario della Società dei Giuristi Svizzeri e Corrispondente della R. Accademia di Giurisprudenza e Legislazione di Madrid, di quella di Barcellona, della Società Generale delle Prigioni di Francia, di quella di Spagna, della R. Accademia Peloritana, della R. Accademia di Scienze Morali e Politiche di Napoli, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e di altre, Comm. e dell'Ordine di San Stanislao di Russia, *Officier d'Académie* della Repubblica francese.

Allievo (Giuseppe), Dottore in Filosofia, Professore di Pedagogia e Antropologia nella R. Università di Torino, Socio Onorario della R. Accademia delle Scienze di Palermo, dell'Accademia di S. Anselmo di Aosta, dell'Accademia Dafnica di Acireale, della Regia Imperiale Accademia degli Agiati di Rovereto, dell'Arcadia, dell'Accademia degli Zelanti di Acireale e dell'Accademia cattolica panormitana, Comm.

Renier (Rodolfo), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore di Storia comparata delle Letterature neo-latine nella R. Università di Torino, Socio attivo della R. Commissione dei testi di lingua, Socio corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per le Marche e della Società storica abruzzese, Membro della Società storica lombarda e della Società Dantesca italiana, Socio onorario dell'Accademia Etrusca di Cortona, dell'Accademia Cosentina e dell'Accademia Dafnica di Acireale, Uffiz.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore nel Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria, Dottore onorario della Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Senatore del Regno, Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e Lombardia, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro dell'Istituto Storico Italiano, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, e della Savoia, Socio Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, ecc. ecc., Gr. Uffiz. ✠ e ⚊, Cav. e Cons. ✠, Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Spagna, ecc.

Reymond (Gian Giacomo), già Professore di Economia politica nella Regia Università di Torino, ✠.

Canonico (Tancredi), Senatore del Regno, Professore emerito, Presidente di Sezione della Corte di Cassazione di Roma, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accad. delle Scienze del Belgio, di quella di Palermo, della Società Generale delle Carceri di Parigi, Consigliere del Contenzioso Diplomatico, Comm. ✠, e Gr. Croce ⚊, Cav. ✠, Comm. dell'Ord. di Carlo III di Spagna, Gr. Uffiz. dell'Ord. di Sant'Olaf di Norvegia, Gr. Cord. dell'O. di S. Stanislao di Russia.

Villari (Pasquale), Senatore del Regno, Vice Presidente del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione, Presidente dell'Istituto storico di Roma, Professore di Storia moderna e Presidente della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, l'Umbria e le Marche, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio Straordinario della R. Accademia di Baviera, Socio Straniero dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Dott. On. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle, Dott. On. in

Filosofia dell'Università di Budapest, Professore emerito della R. Università di Pisa, Gr. Uffiz. ✱ e ▬, Cav. ✠, Cav. del Merito di Prussia, ecc.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen, Uff. ✱, Comm. ▬, Cav. ✠.

D'Ancona (Alessandro), Professore di Letteratura italiana nella R. Università e Direttore della Scuola normale superiore in Pisa, Membro della Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Copenhagen; Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto e della R. Accademia di Lucca. Gr. Uff. ✱, Uff. ▬.

Ascoli (Graziadio), Senatore del Regno, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della Società Reale di Napoli e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro straniero dell'Istituto di Francia e della Società Reale svedese di Scienze e Lettere in Gotemburgo, Accademico della Crusca, Membro d'onore dell'Accademia delle Scienze di Vienna, Membro corrispondente delle Accademie delle Scienze di Belgrado, Berlino, Budapest, Copenaga, Pietroburgo, della Società orientale americana ecc.; Socio onorario delle Accademie delle Scienze d'Irlanda e di Rumania, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, della Società asiatica italiana, dell'Ateneo di Brescia, dell'Accademia di Udine, del Circolo filologico di Milano, della Lega nazionale per l'unità di cultura tra i Rumeni e dell'Associazione Americana per le lingue moderne; Dottore in filosofia per diploma d'onore dell'Università di Wirzburgo, Pro-

fessore ordinario di Storia comparata delle lingue classiche e neolatine nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano; Cav. dell'Ord. Civile di Savoia, Gr. Cord. ✠, Comm. della Legion d'Onore.

ACCADEMICI STRANIERI

Mommsen (Teodoro), Professore nella Regia Università di Berlino.

Müller (Massimiliano), Professore nell'Università di Oxford.

Meyer (Paolo), Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell' " *École des Chartes* ", Parigi.

Paris (Gastone), Professore nel Collegio di Francia, Parigi.

Böhtlingk (Ottone), Professore nell'Università di Lipsia.

Tobler (Adolfo), Professore nell'Università di Berlino.

Maspero (Gastone), Professore nel Collegio di Francia, Parigi.

Wallon (Enrico Alessandro), Segretario perpetuo dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia.

CORRISPONDENTI

SEZIONE DI SCIENZE FILOSOFICHE

Rendu (Eugenio) . . . . *Brécourt*

Bonatelli (Francesco), Professore nella Regia Università di . . . . *Padova*

Pinloche (Augusto), Professore nel Liceo Carlomagno di . . . . *Parigi*

Tocco (Felice), Professore nel R. Istituto di Studi Superiori pratici e di perfezionamento di *Firenze*

Cantoni (Carlo), Professore nella R. Università di . . . . *Pavia*

Chiappelli (Alessandro), Professore nella R. Università di . . . . *Napoli*

SEZIONE DI SCIENZE GIURIDICHE E SOCIALI

Lampertico (Fedele), Senatore del Regno . *Vicenza*

Serpa Pimentel (Antonio di), Consigliere di Stato . . . . *Lisbona*

Rodriguez de Berlanga (Manuel) . . . *Malaga*

Schupfer (Francesco), Professore nella Regia Università di . . . . *Roma*

Gabba (Carlo Francesco), Professore nella R. Università di . . . . *Pisa*

Buonamici (Francesco), Professore nella R. Università di . . . . *Pisa*

Dareste (Rodolfo), dell'Istituto di Francia *Parigi*

SEZIONE

DI SCIENZE STORICHE

Adriani (P. Giambattista), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria . . . *Cherasco*

Perrens (Francesco), dell'Istituto di Francia *Parigi*

Birch (Walter de Gray), del Museo Britannico di . . . . *Londra*

Capasso (Bartolomeo), Sovrintendente degli Archivi Napoletani . . . . *Napoli*

Chevalier (Canonico Ulisse) . . . . . *Romans*

Duchesne (Luigi), Direttore della Scuola Francese in. . . . . *Roma*

Bryce (Giacomo) . . . . *Londra*

Patetta (Federico), Professore nella R. Università di . . . . *Siena*

SEZIONE
DI ARCHEOLOGIA

Palma di Cesnola (Conte Luigi), Direttore del Museo Metropolitano di Arti a . . . . *New-York*

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere . . . . *Milano*

Poggi (Vittorio), Bibliotecario e Archivista civico a . . . . *Savona*

Pleyte (Guglielmo), Conservatore del Museo Egizio a . . . . *Leida*

Palma di Cesnola (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquarii di Londra . . *Firenze*

Mowat (Roberto), Membro della Società degli Antiquari di Francia . . . . *Parigi*

Nadaillac (Marchese I. F. Alberto de) . . *Parigi*

Brizio (Eduardo), Professore nell'Università di . . . . *Bologna*

Barnabei (Felice), Direttore del Museo Nazionale Romano . . . . *Roma*

Gatti (Giuseppe) . . . . *Roma*

SEZIONE
DI GEOGRAFIA ED ETNOGRAFIA

Pigorini (Luigi), Professore nella R. Università di . . . . *Roma*

DALLA VEDOVA (Giuseppe), Professore nella R. Università di . . . . *Roma*

MARINELLI (Giovanni), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . *Firenze*

SEZIONE

DI LINGUISTICA E FILOLOGIA ORIENTALE

KREHL (Ludolfo), Professore nell' Università di . . . . *Dresda*

SOURINDRO MOHUN TAGORE . . . . . . *Calcutta*

WEBER (Alberto), Professore nell' Università di . . . . *Berlino*

KERBAKER (Michele), Professore nella R. Università di . . . . *Napoli*

MARRE (Aristide) . . . . *Vaucresson* (Francia)

OPPERT (Giulio), Professore nel Collegio di Francia . . . . *Parigi*

GUIDI (Ignazio), Professore nella R. Università di . . . . *Roma*

AMELINEAU (Emilio), Professore nella "*École des Hautes Études*" di . . . . *Parigi*

FOERSTER (Wendelin), Professore nell'Università di . . . . *Bonn*

SEZIONE

DI FILOLOGIA, STORIA LETTERARIA E BIBLIOGRAFIA

BRÉAL (Michele), Professore nel Collegio di Francia . . . . *Parigi*

NIGRA (S. E. Conte Costantino), Ambasciatore d'Italia a . . . . *Vienna*

RAJNA (Pio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . *Firenze*

DEL LUNGO (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca . . . . *Firenze*

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 13 Novembre 1898
al 19 Novembre 1899

ELEZIONI

SOCI

Renier (Rodolfo), Professore nella R. Università di Torino, eletto Socio residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza dell'8 gennaio 1899 e approvato con R. Decreto del 22 gennaio 1899.

Pizzi (Italo), Professore nella R. Università di Torino, id. id.

Parona (Carlo Fabrizio), Professore nella R. Università di Torino, eletto Socio residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 15 gennaio 1899 ed approvato con R. Decreto del 22 gennaio 1899.

MORTI

4 Dicembre 1898.

Caruel (Teodoro), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di botanica e fisiologia vegetale).

18 Febbraio 1899.

Lie (Sophus), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di matematiche pure).

24 Marzo 1899.

Wiedemann (Gustavo), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di fisica generale e sperimentale).

19 Aprile 1899.

Friedel (Carlo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di chimica generale ed applicata).

21 Aprile 1899.

Kiepert (Enrico), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di geografia ed etnografia).

2 Giugno 1899.

Nani (Cesare), Socio e Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

29 Giugno 1899.

Desimoni (Cornelio), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze storiche).

16 Agosto 1899.

Bunsen (Roberto Guglielmo), Socio straniero della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

20 Ottobre 1899.

Perrero (Domenico), Socio residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 18 Giugno al 19 Novembre 1899.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

** **Abhandlungen** der k. Preussischen geologischen Landesanstalt. N. F., Heft 29. Berlin, 1899; 8°, 4°.

* **Abhandlungen** herausg. von der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft. Bd. XXI, 4 Heft. Frankfurt a. M., 1899; 4°.

* **Abhandlungen** der mathem.-physischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. XXV, N. 3. Leipzig, 1899; 8°.

* **Abhandlungen** der mathem.-physischen Classe der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften, Bd. XIX, 3 Abth., XX, 1. München, 1899; 4°.

* **Académie** R. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. *Tables* générales des Mémoires (1772-1897). Tables générales du recueil des Bulletins. 3me série. T. I-XXX (1881 à 1885). Bruxelles, 1898; 2 vol. 8°.

* **American** Chemical Journal. Vol. XX, Nos. 8-10; XXI, Nos. 1-5. Baltimore, 1898-99; 8° (*dall'Università John Hopkins di Baltimora*).

* **American** Journal of Mathem. Vol. XX, Nos. 4; XXI, Nos. 1, 2. Baltimore, 1898-99; 4° (*Id.*).

* **Anales** del Museo Nacional de Buenos Aires. 2a Ser., t. III. Buenos Aires, 1899; 8°.

* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. Entrega VI, t. XLVII; I-IV, t. XLVIII. Buenos Aires, 1899; 8°.

* **Anales** del Museo Nacional de Montevideo, t. II, fasc. 11. 1899; 4°.

* **Annales** de la Société Entomologique de Belgique. T. 42me. Bruxelles, 1898; 8°.

* **Annales** de la Société royale Malacologique de Belgique. Mémoires, T. XXXII et XXXIV (solo 16 pag.). Bruxelles, 1899; 8°.

* **Annales** de la Société belge de microscopie. T. XXIII. Bruxelles, 1899; 8°.

* **Annales** de la Société géologique de Belgique. T. XXIV, 3e livr.; XXV, 2e; XXVI, 1e-3e. Liège, 1898-99; 8°.

* **Annales** de la Société d'Agriculture, Sciences et Industrie de Lyon. 7e série, t. V, 1898. Lyon, 1898; 8°.
* **Annales** de la Société Linnéenne de Lyon. Nouvelle série, t. 45e. Lyon, 1899; 8°.
* **Annales** de l'Université de Lyon; Nouvelle série, I, Sciences; Médecine, fasc. 1r et 2e. Lyon, 1899; 8°.
* **Annales** des Mines. 9me série, t. XV, livrs. 4-6. Paris, 1898; 8°.
* **Annales** de la Faculté des Sciences de Toulouse. Deuxième série, T. I, 1r fasc. (1899). Toulouse; 4°.
* **Annali** della R. Scuola Normale superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Vol. XXI. Pisa, 1899; 8°.
* **Annali** della R. Accad. d'Agricoltura di Torino, vol. 41°. Torino, 1899; 8°.
* **Annals** of the New York Academy of Sciences; XI, part III; XII, part I. New York, 1898; 8°.
* **Annuaire** de l'Académie des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique 1898 et 1899. Bruxelles; 2 vol. 16°.
* **Archives** du Musée Teyler, série II, vol. VI, 3e partie. Haarlem, 1899; 8°.
* **Archives** (Nouvelles) du Muséum d'histoire naturelle. IIIe sér., t. 10e, fasc. 1r et 2d. Paris, 1899; 4°.
* **Astronomical** and Meteorological Observations made at the Radcliffe Observatory Oxford in the Years 1890-91 (Vol. XLVII). Oxford, 1899; 8°.
* **Atti** della R. Accademia economico-agraria dei Georgofili di Firenze, 4a serie, vol. XXII, disp. 1a-2a, 1899; 8°.
* **Atti** della Società Italiana di scienze naturali, vol. XXXVIII, fasc. 3°. Milano, 1899; 8°.
* **Atti** della Società dei Naturalisti di Modena. Serie III, vol. XVI, fasc. 3°. Modena, 1899; 8°.
* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Rendiconto dell'Adunanza solenne del 4 giugno 1899; 4°.
* **Atti** dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Anno LII, sess. Va-VIIa, 1899. Roma; 4°.
* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. LVIII, disp. 3a, 4a. Venezia, 1899; 8°.

Australian Museum. Report of Trustees for the year 1898. Sydney, 1899; 4°.

* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-Phys. Classe. 1899, IV. Leipzig; 8°.
* **Bihang** till Kongl. Svenska- Ventenskaps- Akademiens Handlingar. Bd. 24. Afdelning I-IV. Stockholm, 1899; 8°.

Boletim do Museu Paranense de historia natural e ethnographia. Vol. II. No. 1-4 (1897-98). Parà-Brazil, 1897-98; 8°.

Boletin de la Academia Nacional de Ciencias en Cordoba. T. XVI, entr. 1a y 3a. Buenos-Aires, 1899; 8°.

* **Bollettino** del R. Orto Botanico di Palermo. Anno II, fasc. III-IV, 1899; 8°.
* **Bollettino** del R. Comitato Geolog. d'Italia. Anno 1898, n. 4; 1899, n. 1, 2. Roma, 1899; 8°.
* **Bollettino** del Club Alpino Italiano pel 1898. Vol. XXXII. N. 65. Torino, 1899; 8°.

* **British-Museum** (Natural History):
A Hand-List of the genera and species of Birds. 'By R. B. Sharpe. Vol. 1°.
List of the genera and species of Blastoidea.
Catalogue of the African Plants collected by Dr. Fried. Welwitsch in 1853-61, Vol. II. Part 1. London, 1899; 8°.

* **Buletinul** Societații de Sciinte din Bucuresci-Romania. Anul VIII. No. 1 si 2, 3. Bucuresci, 1899; 8°.

* **Bulletin** of the Johns Hopkins Hospital, vol. IX, Nos. 93-97. Baltimore, 1898-99; 4°.

* **Bulletin** de la Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Tom. XII, fasc. 1; 1898. Bruxelles, 1899; 8°.

* **Bulletin** de la Société Belge de Microscopie. XXIV° an. 1897-98; N. 10, XXV°, an. 1898-1899. Bruxelles; 8°.

* **Bulletin** mensuel de magnétisme terrestre de l'Observatoire R. dè Bruxelles. Avril-Juin, 1899. Bruxelles; 8°.

* **Bulletin** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXXII, No. 10; XXXIII; XXXV, No. 1, 2. Cambridge, Mass., 1899; 8°.

* **Bulletin** de l'Académie Royale des sciences et des lettres de Danemark. 1899, n. 2, 3. Copenhague; 8°.

* **Bulletin** of the Scientific Laboratories of Denison University. Vol. XI, 4-8. Granville, Ohio, 1897-98; 8°.

* **Bulletin** de la Société des Sciences naturelles de l'Ouest de la France. T. VIII, 3° et 4° trimestre, 1898, IX, 1er trim. 1899. Nantes; 8°.

* **Bulletin** de la Société Géologique de France. 3° série, t. XXVI, n. 6, 1898; XXVII, 1899, n. 1. Paris, 1899; 8°.

* **Bulletin** de la Société de Géographie. 7me série, T. XX, 3me trimestre 1899. Paris; 8°.

* **Bulletin** de la Société Mathématique de France. T. XXVII, fasc. 1-3. Paris, 1899; 8°.

* **Bulletin** du Muséum d'histoire naturelle. Année 1898, Nos. 7-8; 1899, Nos. 1, 2. Paris, 1898-99; 8°.

Bulletin de la Société Philomatique de Paris. 9° série, t. I, n. 1, 2, 1898-99. Paris; 8°.

* **Bulletin** de la Société Zoologique de France pour l'année 1898. T. XXIII. Paris; 8°.

Bulletin (Treasury Department. Office of the Coast and Geodetic Survey). No. 37-40. Washington, 1899; 8°.

* **Bulletin** on the United States National Museum, n. 47, Part II, III. Washington, 1898; 8° (*dalla Smithsonian Institution*).

* **Bulletins** de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et de Beaux-Arts de Belgique. 3° série, t. XXXIV-XXXVI. Bruxelles, 1897-98; 8°.

* **Bulletins** des séances de la Société Malacologique de Belgique. Vol. XXXIV, 5° fol. Bruxelles, 1899; 8°.

* **Bullettino** della Società veneto-trentina di scienze naturali. T. VI, n. 4. Padova, 1899.

* **Bullettino** dell'Istituto di Diritto Romano. A. XI, fasc. 2°. Roma, 1899; 8°.

* **Canadian Journal** (The) of Sciences, Literature and History. Vol. XV. N. S. No. V. Toronto, 1877; 8°.

Catalogue de la bibliothèque et des collections de feu Crosse. Paris, 1899; 8° (*dall'edit. sig. Deyrolle*).

* **Česká Akademie Císaře Františka Josefa** pro vědy, slovesnost a Umění. III. Bulletin international. Résumé des travaux présentés. V. Sciences mathématiques et naturelles; V. Médecine, 1898; 8°.

Rozpravy. Třída II (Mathematiko-Přírodnická). Ročník, VII (1898); 8°.

Věstník. Ročník VII. Číslo 1-9. 1898; 8°.

Chicago (The) **Academy** of Sciences.

Bulletin No. II of the Geological and Natural History Survey.

Fortieth Annual Report for the year 1897. Chicago, 1898; 8°.

* **Comune di Torino.** Ufficio d'Igiene. Relazione per l'anno 1896. Torino, 1899; 8°.

Comunicaciones del Museo Nacional de Buenos Aires. Tomo I, n. 3, 4. Buenos Aires, 1899, 8° (*dal Direttore del Museo Dr. Prof.* C. Berg).

* **Denkschriften** der medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena; vol. IV, 2 Lief.; VI, 2 Lief.; VII, 2 Lief. Jena, 1898-99; 4°.

** **Erläuterungen** zur geologischen Specialkarte von Preussen und den Thuringischen Staaten. Lief. 76. No. 32, 33, 52-54, 58-60. Berlin, 1899. Testo in-8° e Atl. in-f°.

* **Field Columbian** Museum. Report Series, vol. I, No. 4. Geological series. Vol. I, Nos. 3-6. Zoological series. Vol. I, Nos. 11-15. Chicago, 1898-99; 8°.

** **Fortschritte** der Physik im Jahre 1892, Bd. LIV. 1 Abt. Braunschweig, 1899; 8°.

* **General Report** on the work carried on by the Geological Survey of India for the period from ist April 1898 to the 31st March 1899. Calcutta, 1899; 8°.

* **Giornale** della R. Accademia di Medicina. A. LXII, n. 6-8. Torino, 1899; 8°.

* **Istituto** (R.) Botanico di Palermo: Contribuzioni alla Biologia vegetale edite da Antonio Borzì. Vol. II, fasc. 3°. Palermo, 1899; 8°.

* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. Bd. XXVIII, Heft 1, 2. Berlin, 1899; 8°.

* **Jahrbuch** der k. k. geologischen Reichsanstalt zu Wien. Jahr. 1898, XLVIII, 3 u. 4 Heft; XLIX, 1-2 Heft. Wien, 1899; 8°.

Jahresbericht des Direktors des k. Geodätische Instituts für die Zeit von April 1898 bis April 1899. Potsdam, 1899; 8° (*dal sig. Dr. Helmert Direttore dell'Istituto*).

* **Jahres-Berichte** der Naturwissenschaftlichen Vereins zu Elberfeld, IX Heft. Elberfeld, 1899; 8°.

* **Jahreshefte** des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg. 55 Jahrgang. Stuttgart, 1899; 8°.

* **Jenaische** Zeitschrift für Naturwissenschaft herausg. von der medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. *Namen-* und *Sachregister* zu den Band. 1-30. Leipzig, 1899; 8°.

* **Johns Hopkins** Hospital: Reports. Vol. VII, No. 4; VIII, No. 1-2. Baltimore, 1899; 8°.

* **Journal** of Morphology. Edited by C. O. Whitman, ...with the co-operation of Ed. Ph. Allis. Vol. XIV, No. 3; XV, No. 2. Boston, 1898; 8°.

* **Journal** of the Asiatic Society of Bengal. Vol. LXVIII, Part II, No. 1, 1899, Natural science. Vol. LXVIII, Part III, No. 1, Anthropology and Cognate Subjects. P. III, No. 1 (1899). Calcutta, 1898; 8°.

* **Journal** of the Linnean Society. Botany, vol. XXXIII, No. 234; XXXIV, Nos. 235-239; Zoology, vol. XXVI, No. 172; XXVII, Nos. 173-176. London, 1898-99; 8°.

* **Journal** of the R. Microscopical Society, 1899, part. 4, 5. London; 8°.

* **Journal** of the Academy of Natural sciences of Philadelphia. Second series, vol. XI, p. 2. Philadelphia, 1899; 4°.

* **Journal and Proceedings** of the R. Society of New South Wales. Vol. XXXII, 1899. Sydney, 1899; 8°.

* **Journal** of the College of Science Imperial University Japan. Vol. XI, part III. Tokio, 1899; 4°.

* **Kansas** University Quarterly. Ser. A: science and mathematics. Vol. VIII, No. 2. Lawcance, 1899.

* **Kongligà-Svenska** Vetenskaps-Akademiens. Handlingar Ny Följd. Bd. 31. Stockholm, 1898-99; 4°.

* **List** of Linnean Society of London, 1898-99. London, 1898; 8°.

* **List** (A) of the Fellows and honorary, foreign, and corresponding Members and Medallist of the Zoological Society of London. London, 1899; 8°.

* **List** of the Geological Society of London. November 1st, 1899; 8°.

* **Magnetische** und Meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1898. Prag, 1899; 4°.

* **Mémoires** de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. LIII. Bruxelles, 1898; 4°.

* **Mémoires Couronnés** et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. LV, LVI. Bruxelles, 1896-1898; 4°.

* **Mémoires Couronnés** et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Collection in-8°, t. LV et LVII. Bruxelles, 1898; 8°.

* **Mémoires** de l'Académie des Sciences et des Lettres de Danemark. 6° sér. Section des sciences, t. IX, n. 1, 2; X, n. 1. Copenhague, 1899; 4°.

* **Mémoires** de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève. Tom. XXXIII, 1° partie, 1898; 4°.

* **Mémoires** de la Société Royale des Sciences de Liège. 3^me^ série, t. I. Bruxelles, 1899; 8°.

* **Mémoires** de l'Académie des sciences, arts et belles-lettres de Lyon. Sciences et Lettres, 3ème série, t. V. Lyon, 1898; 8°.

* **Mémoires** de la Société zoologique de France pour l'année 1898. Tome XI. Paris, 1898; 8°.

* **Memoirs** of the Boston Society of Natural history. Vol. V, n^os^ 4-5. Boston, 1899; 4°.

* **Memoirs** of the R. Astronomical Society. Vol. LII, LIII. London, 1899. 2 vol. 4°.

* **Memoirs** of the National Academy of Sciences. Vol. VIII [2 fasc.]. Washington, 1898; 4°.
* **Memorias** y Revista de la Sociedad Científica " Antonio Alzate ". T. XII (1898-99), N. 1-6. Mexico, 1898-99; 8°.
* **Memorie** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matematiche e naturali. XVIII, fasc. VIII. Milano, 1899; 4°.
* **Memorie** del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vol. XXVI, N. 5. Venezia, 1899; 4°.
* **Missouri** Botanical Garden. Tenth annual Report. St. Louis, Mo., 1899; 8°.
* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LIX, No. 9, 10. London, 1899; 8°.
* **Nachrichten** von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Geschäftliche Mittheilungen, 1899, Heft 1. Göttingen; 8°.
* **Natuurkundig** Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië utigegeven door de k. Natuurkundige vereeniging in Nederl.-Indië. Deel LVIII. Tiende serie Deel II. Batavia, 1899; 8°.
* **Nieuw Archief** voor Wiskunde. Tweede Reeks. Deel IV. Tweede, Derde Stuck. Amsterdam, 1899; 8°.
* **Nieuwe** Opgaven. Deel VIII, N. 53-71.

North American Fauna. N° 15. Revision of the Jumping Mice of the genus Zapus by Ed. A. Preble. Washington, 1899; 8° (*dall'U. S. Department of Agriculture, Divis. of Biological Survey*).

* **Nova Acta** Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae, vol. XVIII, fasc. 1, 1899; 4°.

Observaciones meteorológicas practicadas en el Observatorio Astronómico nacional de Tacubaya... durante el año de 1895,... por M. Moreno y Anda. Mexico, 1897; 4°.

Observations et Mesures de la Suède. III. Upsala, 1899; 4° (*dal Direttore dell'Osservatorio Meteorologico di Upsala*).

Peabody Institute, of the city of Baltimore. Thirty-second Annual Report. June 1, 1899. Baltimore; 8°.

* **Philosophical** Transactions of the Royal Society of London, 1897. Ser. A, vol. 191; ser. B, vol. 190. London, 1898; 4°.
* **Proceedings** of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. XXXIV, Nos. 8-20. Boston, 1899; 8°.
* **Proceedings** of the Boston Society of Natural history. Vol. XXVIII, Nos. 13-16. Boston, 1898-99; 8°.
* **Proceedings** of the Asiatic Society of Bengal. Nos. IV-VII (1899). Calcutta; 8°.
* **Proceedings** of the Cambridge philosophical Society. Vol. X, Part III. Cambridge, 1899; 8°.

Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of Science. Session of 1896-97, 2° series, vol. II, part 4°. Halifax N. S., 1898; 8°.

* **Proceedings** of the Royal Society. LXV. No. 416-419. London, 1899; 8°.
* **Proceedings** of the Linnean Society of London. From November 1897 to June 1898. From November 1898 to June 1899. London, 1898; 8°.

* **Proceedings** of the Zoological Society of London for the year 1899. Part II, III. London, 1899; 8°.

Proceedings of the Royal Institution of Great Britain. Vol. XV, Part III. London, 1899; 8°.

* **Proceedings** of the Canadian Institute. Toronto, N. S., vol. I, No. 1, 3; II, 1, 2; Third series, vol. III, 1. N. S., vol. I, Part 2; vol. II, Part 2, 1882-1884, 1885, 1899; 8°.

* **Proceedings** of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. 1898. Part III; 1899, Part I. Philadelphia, 1899; 8°.

* **Proceedings** of the American Philosophical Society held at Philadelphia. Vol. XXXVII. No. 158. Philadelphia, 1898; 8°.

* **Proceedings** of the California Academy of Sciences. 3. Ser., Botany vol. I, Nos. 3-5; Geology I, No. 4; Zoology I, Nos. 6-10; Math-Phys. vol. I, Nos. 1-4. San Francisco, 1898; 8°.

Proceedings of the United States National Museum. Vol. XVIII (1895), XX; Washington, 1896, 1898; 8° (*dalla Smithsonian Institution*).

Pubblicazioni del R° Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sez. di scienze fisiche e naturali. R° Osservatorio di Arcetri, fasc. 1-10. Firenze, 1896-99; 8° (*dono del R. Istituto*).

* **Quarterly** Journal of Geological Society. Vol. LV, Part 3, 4, Nos. 219, 220. London, 1899; 8°.

* **Rapport** annuel de la Commission de Géologie du Canadà (Nouvelle Série). Vol. IX, 1896. Ottawa, 1898; 8°.

* **Rendiconti** del Circolo matematico di Palermo. Tom. XIII, fasc. 5. Palermo, 1899; 8°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Vol. XXXII, fasc. 15. Milano, 1899; 8°.

* **Rendiconto** delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. N. S. vol. III (1898-99), fasc. 1-4. 1899; 8°.

* **Rendiconto** dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. Serie 3ª, vol. V, fasc. 6°, 7°. Napoli, 1899; 8°.

* **Report** (Annual) of the Assistant in charge of the Museum of comparative Zoology at Harvard College to the President and Fellows of Harvard College for 1898-99. Cambridge, u. s. a. 1899; 8°.

Report for the Year 1897-98, presented by the Board of Managers of the Observatory of Yale Univers. to the President and Fellows. New-Hawen; 1899; 8°.

Report of the Seventh Meeting of the Australasian Association for the advancement of science, held at Sydney, 1898. Sydney, 1898; 8°.

Report (Eighteenth Annual) of the United States Geological Survey to the Secretary of the Interior 1896-97. Ch. D. Walcott Director. In five parts. Part. I. Director's report, including triangulation and spirit leveling. II. Papers chiefly of a theoretic nature. III. Economic Geology. IV. Hydrography. V. Mineral resources of the U. S. 1896. Metallic products and Coal. Nonmetallic products except Coal. In 2 vol. Washington, 1896-97, 6 vol.; 4°.

* **Report** (Annual) of the Board of Regents of the Smithsonian Institu-

tion, etc.... June, 30, 1896. Report of the U. S. National Museum. 1894. Washington, 1898; 8°.

Résumé météorologique de l'année 1897 (et 1898) pour Genève et le Grand Saint-Bernard par le prof. R. Gautier. Genève, 1898, 1899; 8°, 2 fasc.

* **Skrifter** udgivne af Videnskabsselskabet i Christiania 1899, No. 2-4, 6, 7. I Mathematisk naturvidenskabelig Klasse. Kristiania, 1899; 8°.

* **Sitzungsberichte** der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. (4 Mai) XXIII (27 Juli 1899) XXXVIII. Berlin, 1899; 8°.

* **Sitzungsberichte** der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1899. Heft II. München; 8°.

Spelunca. Bulletin de la Société de Spéléologie. 4e année, T. IV, n. 15, 16. Paris, 1897: 8°.

* **Thätigkeit** der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in der Zeit vom 1 Februar 1898 bis 31 Januar 1899. Berlin; 4° (*dall'Istituto Fisico-Tecnico in Charlottenburg*).

* **The Royal** Society. 30th. November 1898; 4° (Elenco dei Soci).

Transactions of the Edinburgh Geological Society. Vol. VII, pt. IV. Edinburgh, 1899; 8°.

* **Transactions** of the Linnean Society of London. Botany, vol. V, p. 9, 10. — Zoology, vol. VII, 5-8. London, 1898-99; 4°.

* **Transactions** of the Zoological Society of London. Vol. XV, part 2, 3. 1899; 4°.

* **Transactions** of the Manchester Geological Society. Vol. XXVI, Nos. IV-VI, 1899; 8°.

Transactions of the Connecticut Academy of Art and Sciences. Vol. X, P. 1. New Haven, 1899; 8°.

* **Travaux** et **Mémoires** du Bureaux international des Poids et Mesures. T. IX. Paris, 1898; 4°.

Verhandlungen der 1898 in Stuttgart abgehaltenen zwölften allgemeinen Conferenz der Internationalen Erdmessung mit den hierzu gehörigen Spezialberichten. Berlin, 1899; 4° (*dal sig. Dr. Helmert Direttore del Centralbureau der Intern. Erdmessung in Potsdam*).

* **Verhandlungen** des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. N. F. VI Bd., 2 Heft. 1898; 8°.

* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt. N. 9-10, 1899. Wien; 8°.

* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap, ter sepreuke voerende: VII Dl. 7de Stuk; VIII 1ste Stuk. Amsterdam, 1899; 8°.

* **Wissenschaftliche** Meersuntersuchungen herausg. von der Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchungen der deutschen Meere in Kiel und der biologischen Anstalt auf Helgoland. N. F. Dritter Bd., Abt. Helgoland, Heft 1. Vierter Bd., Abt. Kiel. Kiel und Leipzig, 1899; 4°.

* **Wissenschaftliche** Veröffentlichungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig. 4 Bd. Leipzig, 1899; 8°.

* **Year-Book** of the Royal Society. 1899, No. 3. London; 8°.

* **Журналъ** русскаго физико-химическаго Общества при Императорскомъ С. Петербургскомъ Университетѣ; t. XXXI, n. 4-6. 1899; 8°.

* *Dall'Università di California:*

Agricultural experiment Station; Bulletin N.ʳ 120, 121. Berkeley, 1898; 8°.
Bulletin of the Department of Geology. Vol. II, N° 4. Berkeley, 1898; 8°.
Hirst (H. H.). Adjustment of Engineering Field Instruments. Berkeley, 1898; 8°.
Report (Partial) of Work Agricultural experiment Stations of the Univ. of California for the years 1895-96; 1896-97. Berkeley, 1898; 8°.
Wadsworth (M. E.). The elective system as adopted in the Michigan Mining School. Houghton, Mich. 1895; 8°.
— *Zirkelite:* A question of Priority; 1898; 8°.
— Some methods of determining the positive or negative character of mineral plates in converging polarized light with the petrographical Microscope. Houghton, Mich, 1898; 8°.
— Editors Journal of Geology; Houghton, Mich, 1897; 8°.
— Some Statistics of Engineering Education. Houghton, 1897; 8°.
— The Michigan College of Mines. Houghton, 1897; 8°.
— The Origin and Mode of Occurrence of the Lake Superior Copper-Deposits. Houghton, 1897; 8°.
— The Elective System in Engineering Colleges. Buffalo, 1896; 8° (*dalla Università di California*).

* *Dall'Università di Erlangen:*

Barthel (T.). Ueber den Bakteriengehalt der Luftwege. Jena, 1898; 8°.
Beermann (H.). Kritische Studien über die neueren quantitativen Bestimmungsmethoden der Borsäure mit Einschluss der Turmalinanalyse. Berlin, 1898; 8°.
Bede (K.). Beitrag zur Statistik der radikalen Herniotomie. Hildesheim, 1899; 8°.
Boetticher (T. v.). Ein Beitrag zur amyotrophischen Lateralsklerose. Erlangen, 1899; 8°.
Belkenius (W.). Ueber die Therapie des Empyems der Kieferhöhle. Marburg, 1898; 8°.
Braun (H.). Beiträge zur Milchfrage mit besonderer Berücksichtigung der Erlanger Markt-Milch. Berlin, 1898; 8°.
Breitenbach (P.). Ueber die innere Reibung der Gase und deren Aenderung mit der Temperatur. Leipzig, 1898; 8°.
Brodnitz (H.). Ueber den Einfluss sauerer Nährböden auf die Entwicklung einiger Bakterienarten. Erlangen, 1898; 8°.
Brodtmann (F.). Ueber die Funktion der mechanischen Elemente beim Farnsporangium und bei der Anthere. Erlangen, 1898; 8°.
Bründelmayer (J. A.). Ueber bromierte Säuren des Strychnins. Erlangen, 1899; 8°.
Brünings (W.). Zur Physiologie des Kreislaufes der Fische. Altenburg, 1899; 8°.

Bürkel (K. v.). Ueber chronische Milzschwellungen im Kindesalter. München, 1898; 8°.

Busse (O.). Ein Beitrag zur Coxa vara. Erlangen, 1899; 8°.

Cohn (F.). Untersuchungen über die Durchgängigkeit des Cervikalkanals bei Erstgeschwängerten am Ende der Schwangerschaft. Erlangen, 1898; 8°.

Colloseus (H.). Ueber die Einwirkung von Aldehyden und Ketonen auf Thiosemicarbazide und Thioharnstoffe. Erlangen, 1899; 8°.

Dennhardt (R.). Ueber Beziehungen zwischen Fluidität und electrolytischer Leitfähigkeit von Salzlösungen etc. Leipzig, 1898; 8°.

Deussen (F. J. P. E.). Ueber die Absorption der Uranylsalze. Leipzig, 1898; 8°.

Dreverhoff (P.). Ueber die Einwirkung von Phosphorpentachlorid auf N-alkyl-α-Toluchinolone. Erlangen, 1898; 8°.

Ebeling (F.). Ein Fall von primärem Sarkom des Peritonėums. Erlangen, 1898; 8°.

Ebest (G.). Ueber Riesenzellensarcome. Erlangen, 1899; 8°.

Eller (H.). Ueber die Dauererfolge der Totalextirpation bei Carcinoma uteri. Erlangen, 1898; 8°.

Evens (A.). Ueber die Anwendung der Schlund- und Magenschlauchsonde, etc. Erlangen, 1899; 8°.

Fischer (G.). Beitrag zur vergleichenden Anatomie der Blätter der Compositen. Erlangen, 1898; 8°.

Gartzen (P. v.). Einwirkung von Phosgen auf acetylierte aromatische Basen. Berlin, 1898; 8°.

Glauning (W.). Ueber die conservative und operative Behandlung der Myopie. Erlangen, 1896; 8°.

Gossmann (H.). Ueber die anorganischen Bestandteile der Bauchspeicheldrüse (Pancreas) und der Niere. München, 1898; 8°.

Grosse (F. E.). Beiträge zur vergleichenden Anatomie der Onagraccen einschliesslich besonderer Berücksichtigung der Entwickelung und des anatomischen Baues der Vegetationsorgane von Trapa Natans. Dresden, 1895; 8°.

Gundling (X.). Ueber Gewichtsverhältnisse der Neugeborenen in den ersten Lebenstagen und die Ursachen der Gewichtsabnahme. Ellwangen, 1898; 8°.

Gutbier (A.). Beiträge zur Kenntnis der Isorosinduline. Erlangen, 1899; 8°.

Hagenmeyer (H.). Ueber die nervösen Nachkrankheiten der Diphterie mit besonderer Berücksichtigung der postdiphterischen Ataxie. Freiburg i. Br., 1898; 8°.

Hapel (M.). Studien über einige Hydroxylaminderivate. Erlangen, 1898; 8°.

Hardt (C.). Ueber die Einwirkung von Alkyljodiden auf die Kaliumsalze der Amidosäuren. Erlangen, 1899; 8°.

Haueisen (E.). Ueber Azinscharlach und seine Derivate. Erlangen, 1898; 8°.

Hayler (M.). Décollement de la peau et des couches sous jacentes. Erlangen, 1898; 8°.

Hederich (R.). Goethe und die physikalische Geographie. München, 1898; 8°.

Hennig (H.). Ein Fall von papillomatösem Krebs des Rectum mit Durchbruch in Blase und Bauchhöhle. Erlangen, 1898; 8°.

Hehberg (H.). Ueber Wirkungen der Phenylmethylpyrazolonsulfosäure. Erlangen, 1899; 8°.

Hoppe (A.). Ueber einige Eruptivgesteine aus dem mexicanischen Staat Puebla. Leipzig, 1899; 8°.

Hörger (W.). Ueber die Einwirkung von Phosphorpentachlorid auf N-Alkyl-α-Pyridone. Erlangen, 1899; 8°

Ihl (O.). Ueber einige Wirkungen des Phenylthiobiazolinsulfhydrat. Erlangen, 1897; 8°.

Jacob (A.). Ueber einen Fall von Hysterie im Kindesalter mit Mutismus, Blepharospamus und Astasie-Abasie. Erlangen, 1899; 8°.

Jakob (B.). Ueber infektiöse Embolie im Wochenbett. Erlangen, 1898; 8°.

Jlse (P.). Röntgenstrahlen: Frakturen und Luxationen. Erlangen, 1898; 8°.

Kaliski (J.). Ueber den sogenannten Roseschen Kopftetanus. Breslau, 1898; 8°.

Kinscher (H.). Zur Kasuistik des Oesophagusdrüsenkrebses. Erlangen, 1899; 8°.

Kleaker (O.). Studien über Antimonpentasulfid. Leipzig, 1899; 8°.

Koch (K.). Ueber einen Fall von Epignathus. Erlangen, 1899; 8°.

Köpp (A.). Ueber Carvonpinakon und Fenchonpinakon. Leipzig, 1899; 8°.

Krecke (F.). Beiträge zur Kenntnis der Dihydrochinazoline. Wiesbaden, 1899; 8°.

Krey (C.). Ueber die Einwirkung von Aldehyden und Ketonen auf die Thiosemicarbazide. Erlangen, 1899; 8°.

Lahner (L.). Statistiche Beiträge zu Ileus. Erlangen, 1899; 8°.

Loewenthal (W.). Untersuchungen über das Verhalten der quergestreiften Muskulatur bei athrophischen Zuständen. Leipzig, 1898; 8°.

Löscher (P.). Ueber N-Alkyl-Aldoxime und deren Spaltungsprodukte. Leipzig, 1899; 8°.

Löscher (W.). Ueber die in den letzten Jahren in der Erlanger chirurgischen Klinik zur Beobachtung gelangten Fälle von Schilddrüsengeschwülsten. Erlangen, 1898; 8°.

Lusch (O.). Ueber die Constitution der Einwirkungsprodukte der salpetrigen Säure auf Thiosemicarbazide. Erlangen, 1899; 8°.

Maas (P.). Betrachtungen über den desinficierenden Wert der heutigen Waschmethoden mit specieller Berücksichtigung der Wollwäsche. Erlangen, 1898; 8°.

Merkel (H.). Beitrag zur Kenntniss der sog. embryonalen Drüsengeschwülste der Niere. Naumburg a. S., 1898; 8°.

Menheim (J.). Beitrag zur Kenntnis des Tannenhonigs. Erlangen, 1899; 8°.

Müller (L. R.). Untersuchungen über der Anatomie und Pathologie des untersten Rückenmarksabschnittes. Leipzig, 1898; 8°.

Müller (F.). Beitrag zur Kenntniss der Isorosindulinfarbstoffe. Erlangen, 1899; 8°.

Nacke (W.). Symptomatologie der Lungensyphilis auf anatomischer Grundlage. Erlangen, 1898; 8°.

Obermiller (G.). Ueber Einwirkung von Aminbasen auf Disulfide etc. Erlangen, 1899; 8°.

Petersen (O.). Ueber Paralyse der Placentarinsertionsstelle. Erlangen, 1898; 8°.

Petri (I.). Inconstanz des Erstarrungspunktes hochschmelzender Körper und Beiträge zur Kenntnis des Schwefels. Berlin, 1898; 8°.

Poetzsch (C.). Ueber das Auftreten von Fibrin in tuberkulösen Lymphdrüsen. Erlangen, 1898; 8°.

Purpus (E.). Untersuchungen über die Ausscheidung verschiedener Arzneimittel etc. Ansbach, 1898; 8°.

Rabenhorst (W.). Die Wanderung des Kalkoxalats in der Pflanze. Siegen, 1898; 8°.

Ratz (K.). Ein Beitrag zur Casuistik der congenitalen Okklusionen des Dünndarmes. Erlangen, 1899; 8°.

Roe (E. D.). Die Entwickelung der Sylvester'schen Determinante nach Normal-Formen. Leipzig, 1898; 8°.

Ronge (C.). Beitrag zur Petrographie des Fichtelgebirges. Breslau, 1897; 8°.

Roscher (A.). Ein Fall von juveniler progressiver spinaler Muskelatrophie. Erlangen, 1898; 8°.

Roth (A.). Myositis ossificans multiplex progressiva. München, 1898; 8°.

Rousseau (P.). Beiträge zur Kenntniss der Lues Spinalis. Berlin, 1899; 8°.

Rühlmann (F.). Die Folgen der Brüche und Verrenkungen des Schlüsselbeines hinsichtlich der Erwerbsfähigkeit. Erlangen, 1899; 8°.

Ruoff (F.). Beitrag zur Lehre vom Tetanus. Erlangen, 1898; 8°.

Saulmann (F.). Ueber einige Thiazoline und Oxazoline. Berlin, 1899; 8°.

Schall (M.). Ueber cyklische Harnstoffe und Guanidinderivate des Diacetonamins. Berlin, 1899; 8°.

Schilling (T.). Klinische Beiträge zur Lehre von der Parotitis epidemica. Erlangen, 1898; 8°.

Schmidt (H. R.). Ueber verschimmelte. Tapeten. Erlangen, 1899; 8°.

Schoonjans (A.). Ueber einige Benzoyl- und Anisoyl- Acetessigesterderivate. Erlangen, 1897; 8°.

Schröder (H.). Die künstliche Deformation des Gebisses. Berlin, 1898; 8°.

Schwan (O.). Ueber das Vorkommen von Wurzelbakterien in abnorm verdickten Wurzeln von Phaseolus multiflorus. Erlangen, 1898; 8°.

Simon (J.). Ueber Bakterien am und im Kuh-Euter. Erlangen, 1898; 8°.

Stadler (H.). Ueber den Einfluss von Harnstoffsalicylat auf Harnsäureausscheidung und Diurese. Erlangen, 1899; 8°.

Steidle (A.). Ueber Encephalopathia saturnina. Erlangen, 1898; 8°.

Stern (H.). Ueber Isomerie in der γ Diketonreihe. Berlin, 1898; 8°.

Steuert (L.). Embryonale Metamorphosen der Knorpel- und Deckknochen des Rinderschädels. Langensalza, 1899; 8°.

Stich (R.). Aneurysma der Arteria axillaris dextra, Hirnembolie, Nachblutung, Heilung. München, 1899; 8°.

Stüber (W.). Ueber Produkte der alkalischen Hydrolyse des Eieralbumins. Erlangen, 1898; 8°.

Syrée (G.). Ueber den Konkurrenzkampf der Kulturhefe Frohberg mit Saccharomyces Pastorianus III unter verschiedenen Bedingungen. Jena, 1898; 8°.

Tendering (K.). Ein kasuistischer Beitrag zur Lehre von der Hornhaut-Sklerose. Erlangen, 1898; 8°.

Wegener (K.). Ueber Cysten an der menschlichen Nachgeburt. Osnabrück, 1899; 8°.

Weirauch (C.). Ein Beitrag zur Casuistik der Leuchtgasvergiftungen. Amberg, 1899; 8°.

Wicke (G.). Beitrag zur Kenntnis des Pulegons und Menthons. Erlangen, 1898; 8°.

Wigger (F.). Ueber Achylia gastrica. Erlangen, 1899; 8°.

Wohlbold (H.). Die Kraniologie ihre Geschichte und ihre Bedeutung für die Classification der Menschheit. Nürnberg, 1899; 8°.

Wolff (S.). Beitrag zur Kenntniss des Pfahls und seiner Nebengesteine. Neisse, 1898; 8°.

Wolpert (E.). Ueber die Einwirkung von Senföl auf Sulfo-Carbazinsäuren. Erlangen, 1899; 8°.

Zeltner (E.). Ein Fall von Beckenenchondrom. Erlangen, 1898; 8°.

Zimmermann (H.). Studien über Entwicklung und Exkretion von Pilzmycelien. Erlangen, 1898; 8°.

Zühl (E.). Beitrag zur Kenntnis der Albuminpeptone und ihrer Chlorhydrate. Erlangen, 1898; 8°.

* ***Dall'Università di Giessen:***

Alexander (E.). Reaktionen von Salzen in Aethylacetat. Giessen, 1899; 8°.

Baas (A.). Ueber die Keratitis dendritica und ihre Beziehungen zum Herpes corneae. Giessen, 1899; 8°.

Bentrup (C.). Ueber die Embolie der Arteria centralis retinae. Giessen. 1898; 8°.

Beutel (E.). Ueber die Toluylbiguanide und das Benzylbiguanid. Leipzig, 1899; 8°.

Busch (C. H.). Beitrag zur Kenntniss der Gaumenbildung bei den Reptilien. Jena, 1898; 8°.

Blaese (Ph.). Zur Casuistik der Nierengeschwülste. Giessen, 1898; 8°.

Creutz (H.). Ueber einen Fall von Resection der Harnblase mit Verlagerung des Ureters. Eupen, 1898; 8°.

Davids (H.). Ueber die sog. Aktinomykosis musculorum suis. Giessen, 1898; 8°.

De Jong (D. A.). Untersuchungen über Botryomyces. Leiden, 1899; 8°.

Dieffenbach (O.). Versuche zur Dissociation von Salzen der Ammoniakbasen in wässeriger Lösung. Giessen, 1898; 8°.

Eisenhuth (E.). Bericht über die bei Contusionsverletzungen des Auges beobachteten Veränderungen des Uveatraktus. Giessen, 1899; 8°.

Ermert (A.). Zur Casuistik der inneren Darmincarcerationen. Giessen, 1899; 8°.

Fenner (K.). Ueber Hinterscheitelbeineinstellung. Münster i. W., 1898; 8°.

Frick (H.). Ueber einen Fall von isolirter Luxation des Os naviculare. Amvenburg, 1896; 8°.

Friedrich (H.). Ueber den Heilerfolg der operativen Behandlung des chronischen Glaukoms. Giessen, 1898; 8°.

Gähtgens (R.). Die membranöse Einhüllung von Embryonen als Ursache von Missbildungen. Giessen, 1898; 8°.

Gleim (L.). Ueber die Ætiologie, Therapie und Prognose der Katerakta traumatica. Giessen, 1898; 8°.

Hock (J.). Untersuchungen über den Uebergang der Magen- in die Darmschleimhaut mit besonderer Berücksichtigung der Lieberkühn'schen Krypten und Brunner'schen Drüsen bei den Haus-Säugetieren. Giessen, 1899; 8°.

Illig (R. K.). Oxydationsversuche mit überschwefelsaurem Ammonium. Giessen, 1898; 8°.

Joeckel (O.). 25 Fälle von " Placenta praevia ". Giessen, 1898; 8°.

Kantorowicz (L.). Zur Histologie des Pancreas. Berlin, 1899; 8°.

Kozielski (W.). Ueber die Lipome des Darmes. Giessen, 1899; 8°.

Lutz (A.). Beiträge zur Kenntniss der Drüsen des dritten Augenlids. Jena, 1898; 8°.

Maensel (S.). Zur Casuistik der Riesenzellensarcome der Mamma. Giessen, 1898; 8°.

May (E.). Bericht über die vom Jahre 1890-1898 behandelten Fälle von Kalkverletzung des Auges. Giessen, 1899; 8°.

Mayer (Q.). Ueber multiple Polypenbildung im Darm und deren Beziehung zur Krebsentwicklung. Giessen, 1898; 8°.

Michel (O.). Ein Fall von Choledochusdrainage wegen infektiöser Cholangitis. Giessen, 1899; 8°.

Remmlinger (H.). Zur Casuistik der Tuberkolose der Bindehaut. Giessen, 1898; 8°.

Richter (L.). Das Hygrom der Dura mater. Giessen, 1899; 8°.

Riegel (F.). Ueber Arhythmie des Herzens. Giessen, 1898; 4°.

Schäfer (G.). Ueber die Untersuchung auf Anisocorie ohne Pupillenstarre. Altona, 1899; 8°.

Schaefer (H.). Ueber die Trichiasisoperation mittelst gestielter Läppchen aus der Lidhaut. Giessen, 1899; 8°.

Schlinck (J.). Zur Kenntnis des Pyrrolidins. Mannheim, 1899; 8°.

Schmutzer (R.). Ueber das sogenannte " Luftblasengekröse " der Schweine. Giessen, 1898; 8°.

Scholl (H.). Ueber Veränderungen von Jodsilber im Licht und den Daguerre'schen Process. Leipzig, 1899; 8°.

Schön (F.). Ein Beitrag zur Symptomatologie und Differentialdiagnose der hallucinatorischen Verwirrtheit. Giessen, 1899; 8°.

Schriever (O.). Die Darmzotten der Haussäugetiere. Beitrag zu deren vergleichenden Anatomie, Histologie und Topographie. Giessen, 1899; 8°.

Spengel (J. W.). Zweckmässigkeit und Anpassung. Giessen, 1898; 4°.

Versluys (J.). Die mittlere und äussere Ohrsphäre der Lacertilia und Rhynchocephalia. Jena, 1898; 8°.

Volk (J.). Zur Statistik der Augenverletzungen mit besonderer Berüchsichtigung der Fremdkörperverletzungen. Giessen, 1898; 8°.

Wagner (H.). Ein Beitrag zur Frage der Heilserumtherapie bei der Conjunctivitis diphtherica. Giessen, 1898; 8°.

Wallbott (H.). Die Phasenänderung des Lichtes bei der Reflexion an Quecksilber. Leipzig, 1899; 8°.

Weifenbach (F.). Ueber die Verletzungen des Auges durch glühende Metalle mit besonderer Berücksichtigung Verletzungen durch glühendes Eisen und Schlacke. Grünberg, 1899; 8°.

Zechlin (P.). Ueber die elektrolytische Reduktion der Salpetrigen Säure. Berlin, 1899; 8°.

* *Dalla ' Bibliothek der Grossh. Technischen Hochschule zu Karlsruhe ':*

Die Grossherzogliche Technische Hochschule Festschrift zur Einweihung der Neubauten im Mai 1899. Karlsruhe; 4°.

Escherich (K.). Zur Anatomie und Biologie von *Paussus turcicus* Friv. Jena, 1898; 8°.

Mie (G.). Entwurf einer allgemeinen Theorie der Energieübertragung. Wien, 1898; 8°.

Programm der Grossherzoglich Badischen Technischen Hochschule zu Karlsruhe für das Studienjahr 1899/1900; 8°.

Teichmüller (J.). Die elektrischen Gleichstromleitungen mit Rücksicht auf ihre Elastizität. Stuttgart, 1898; 8°.

Weber (A.). Untersuchungen über die Verbrennungsproducte von Leuchtflammen und über die Verbrennung des Leuchtgases an gekühlten Flächen und in Gasmotoren. München, 1897; 8°.

* *Dalla Biblioteca dell' Università di Upsala:*

Bergstrand (C. Ö. E.). Undersökningar öfver stellarfotografiens användning vid bestämningen af fixstjärnornas årliga parallaxer. Upsala, 1899; 8°.

Fries (T. M.). Caroli Linnæi Hortus Uplandicus med inledning och förklaringar. Upsala, 1899; 8°.

— Bidrag till en lefnadsteckning öfver Carl von Linné. 8. Upsala, 1898.

Guinchard (A. J.). Beiträge zur Kenntniss labiler Atomgruppirungen und ihrer Umlagerung. Upsala, 1899; 8°.

Heuman (C. A.). Operationsteoretisk framställning af teorien för finita förflyttningar. Stockholm, 1899; 8°.

Hulth (J. M.). Ueber einige Kalktuffe aus Westergötland. Upsala, 1899; 8°.

Nilsson (G. L.). Sur les équations fonctionnelles, particulièrement les équations fonctionnelles généralisant les équations différentielles linéaires et homogènes. Upsala, 1899; 4°.

Strömholm (D.). Om sulfin- och tetinföreningar. Upsala, 1899; 8°.

Svensson (A. V.). Zur Kenntniss des ventilirten Psychrometers. Mit einer Tafel. Stockholm, 1898; 8°.

Arcidiacono (S.). Principali fenomeni eruttivi avvenuti in Sicilia e nelle isole adiacenti nel semestre luglio-dicembre 1898. Modena, 1899; 8° (*dall'A.*).

— Sui terremoti del 3 maggio 1899. Catania, 1899; 8° (*Id.*).

Arrigoni degli Oddi (E.). Relazione sul IV Congresso internazionale di Zoologia tenutosi in Cambridge nell'Agosto 1898. Venezia, 1899; 8° (*Id.*).

Baccarini (P.). I caratteri e la storia della flora Mediterranea. Discorso. Catania, 1899; 8° (*Id.*).

— e **Cannarella** (P.). Primo contributo alla struttura ed alla biologia del *Cynomorium Coccineum*. Catania, 1899; 4° (*dagli A.*).

Beaupin (I.). Sur un développement de l'intégrale elliptique de première espèce en série trigonométrique; 8° (*dall'A.*).

* **Bolton** (H. C.). A select bibliography of Chemistry 1492-1827. First suppl. Washington, 1899; 8° (*dalla Smithsonian Istitution*).

Cauchy (A.). Œuvres complètes, publiées sous la direction de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction Publique. 1° série, t. XI. Paris, 1899; 4° (*dono del Governo francese*).

Eredia (F.). Temperature di Catania e dell'Etna ottenute col metodo delle differenze. Catania, 1899; 8° (*dall'A.*).

Ferrero (Général A.). Rapport sur les triangulations présenté à la douzième Conférence Générale à Stuttgart en 1898. Tome II des Comptes-Rendus de la Conférence de Stuttgart. Florence, 1899; 4° (*dal Centralbureau der International Erdmessung in Potsdam*).

Fiorini (M.). Sfere terrestri e celesti di autore italiano oppure fatte o conservate in Italia. Roma, 1898; 8° (*dall'A.*).

Gablenz (R.). Die Electricität im Weltraume, Lemberg, 1899; 8° (*dall'A.*).

* **Goebel** (K.). Ueber Studium und Auffassung der Anpassungserscheinungen bei Pflanzen. München, 1898; 4° (*dalla R. Accad. delle Scienze di Monaco di Baviera*).

Gordon (A. de). Consideraciones sobre la voz humana. Habana, 1899; 8° (*dall'A.*).

Gould (B. A.). Cordoba Photographs. Photographic observations of Staar-Clusters. Lynn, Mass., 1897; 4° (*dal Ministero della Pubblica Istruzione della Repubblica Argentina*).

Guarini-Foresio (E.). Transmission de l'énergie électrique par un fil et sans fil. Liège, 1899; 8° (*dall'A.*).

— Télégraphie électrique sans fil. — Répétiteurs. Liège, 1899; 8° (*Id.*).

— Répétiteur Guarini pour la télégraphie sans fil. Liège, 1899 (*Id.*).

Günther (S.). Handbuch der Geophysik. II. Bd. 12. Liefg. Stuttgart, 1899; 8° (*Id.*) (*Compimento dell'opera presentata pel premio Bressa*).

Haeckel (E.). Die Welträthsel. Gemeinverständliche Studien über monistische Philosophie. Bonn, 1899; 8° (*Id.*).

Harlé (É.). Nouvelles pièces de dryopithèque et quelques coquilles, de Saint-Gaudens (Haute-Garonne). Paris, 1899; 8° (*Id.*).

— Gros cailloux de la Garonne en aval du confluent du Tarn. Paris, 1899; 8° (*Id.*).

* **Huygens** (Christiaan). Œuvres complètes publiées par la Société hollandaise des Sciences. Tome huitième. Correspondance 1676-1684. La Haye, 1899; 4° (*dall'Accad. R. delle scienze di Amsterdam*).

* **Lindemann** (F.). Gedächtnissrede auf Philipp Ludwig von Seidel. München, 1898; 4° (*dalla R. Accademia delle scienze di Monaco di Baviera*).

Mascari (A.). Sulla frequenza e distribuzione in latitudine delle macchie solari osservate al R. Osservatorio astronomico di Catania nel 1898. Catania, 1899; 4° (*dall'A.*).

— Sulle protuberanze solari osservate nel 1898. Catania, 1899; 4° (*Id.*).

Minucci (Fr.). Analisi chimica (Appunti). Napoli, 1899; 8° (*Id.*).

Nuvoli (R).. Relazione all'On. Amministrazione Comunale sugli ammorbamenti dell'aria in città. Torino, 1899; 4° (*dono del Municipio di Torino*).

Perrini (C.). L'Uomo e la Scienza, seguito del volume " Il mondo e l'uomo ". Studi. Trani, 1899: 8° (*dall'A. per il premio Vallauri*).

Portal (E.). Les origines de la vie et la paléontologie. Paris, 1898; 8°.

Reina (V.). Determinazioni di latitudine e di azimut eseguite nel 1898 nei punti Monte Mario — Monte Cavo — Fiumicino. Firenze, 1899; 4° (*dalla Commissione Geodetica italiana*).

Riccò (A.). Terremoto di Grecia del 22 gennaio 1899. Catania, 1899; 8° (*dall'A.*)..

— Riassunto della sismografia del terremoto Calabro Siculo del 16 novembre 1894. Roma, 1899; 8° (*Id.*).

Ricco, Zona e **Saija**. Circolo preliminare della differenza di longitudine tra Catania e Palermo e determinazione delle anomalie di gravità in Catania. Catania, 1899; 4° (*dagli A.*).

Righi (A.). Sull'assorbimento della luce per parte di un gas posto nel campo magnetico. Bologna, 1899; 8° (*dall'A.*).

Roiti (A.). Elementi di Fisica. Vol. I, parte 2ª. Firenze, 1899; 8° (*Id.*).

Sars (G. O.). An account of the Crustacea of Norway. Vol. II. Isopoda. Part XIII, XIV. Bergen, 1899; 8° (*Id.*).

Stossich (M.). Strongylidae. Trieste, 1899; 8° (*Id.*).

— Lo smembramento dei Brachycoelium. Trieste, 1899; 8° (*Id.*).

— La sezione degli Echinostomi. Trieste, 1899; 8° (*Id.*).

— Appunti di Elmintologia. Trieste, 1899; 8° (*Id.*).

Tommasina (Th.). Sur la nature et la cause du phénomène des cohéreurs. Paris, 1899: 4° (*Id.*).

— Recherches sur les variations de conductibilité électrique dans les limailles métalliques. Genève, 1899; 8° (*Id.*).

Vinci (Leonardo da). Il Codice atlantico; fasc. XVI. Milano, 1899; in-f°.

Volante (A.). Al Polo. Discorso. Torino, 1899; 4° (*Id.*).

Zeuner (G.). Vorlesungen über Theorie der Turbinen. Leipzig, 1899; 8° (*Id.*).

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche

Dal 25 Giugno al 26 Novembre 1899.

* **Abhandlungen** der philologisch-historischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft. Bd. XVIII, N. 5. Leipzig, 1899; 8°.
* **Abhandlungen** der philosophisch-philologischen Classe der k. bayerischen Akademie des Wissenschaften. Bd. XXI, 2 Abth. München, 1899; 4°.
* **Accessions-Katalog.** 13, 1898. Stockholm, 1899; 8° (*dall'Accad. R. delle Scienze*).
** **Allgemeine** Deutsche Biographie. Bd. XLV, Lfg. 222-223. Leipzig, 1899; 8°.
* **American** Journal of Philology. Vol. XIX, Nos. 2-4. Baltimore, 1898; 8° (*dall'Università John Hopkins di Baltimora*).
* **Analecta** Bollandiana. T. XVIII, fasc. I-II. Bruxelles, 1899; 8°.
* **Annales** de la Société d'Archéologie de Bruxelles. T. XIII, livs. II. Bruxelles, 1899; 8°.
* **Annales** de l'Université de Lyon: Nouvelle Série; II. Droit, Lettres. Fasc. 1er et 2e. Lyon, 1899; 8°.
* **Annales** du Musée Guimet.
Revue de l'Histoire des Religions. Tome XXXVIII, Nos. 2-3. Paris, 1898; 8°.
* **Annales** du Midi. Revue archéologique, historique et philologique de la France méridionale, N. 41, 1899; 8° (*dall'Université de Toulouse*).
Annali di statistica. — Ruoli organici delle amministrazioni e dei corpi civili e militari dello Stato al 1° luglio 1898 confrontati con quelli in vigore al 1° luglio 1891. Roma, 1899; 8° (*Dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).
* **Annuaire** de la Société d'Archéologie de Bruxelles, 1899, t. Xe. Bruxelles, 1899; 8°.
Annuaire statistique de la ville de Buenos-Ayres. VIIIe année, 1898. Buenos-Ayres, 1899; 8° (*dalla Direzione Gen. di Statistica municipale*).
* **Atti** della R. Accademia di Archeologia. Lettere e Belle Arti della Società Reale di Napoli; vol. XX, 1898-99. Napoli; 4°.

* **Atti** della Reale Accademia di Scienze morali e politiche della Società Reale di Napoli; vol. 30°. Napoli, 1899; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Classe di Scienze morali, storiche e filolog.; serie V, vol. VII. Notizie degli Scavi: febbraio-maggio 1899. Roma; 4°.

* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (Philolog.-hist. Classe), 1899, I-III. Leipzig, 1899; 8°.

* **Biographie Nationale** publiée par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. XIV, 2e fasc.; XV, 1er fasc. Bruxelles, 1897-98; 8°.

* **Biblioteca** della Società storica subalpina. Diretta da Ferd. Gabotto. Vol. I. Studi Pinerolesi (Memorie, I). II. Gabotto (F.), Cartario di Pinerolo fino all'anno 1300; Cipolla (C.), Il gruppo dei diplomi Adelaidini a favore dell'Abbazia di Pinerolo (Cartario, I). Alessandria, Pinerolo, 1899; 2 vol. 8° (*dal Municipio di Pinerolo*).

** **Bibliotheca** Philologica Classica. Vol. XXVI, 1899. Trimestre secundum. Berlin, 1899; 8°.

* **Bibliotheca** Indica: A Collection of Oriental Works published by the Asiatic Society of Bengal. New series, Nos. 932-948. Calcutta, 1898-1899; 8°.

* **Boletin** de la Real Academia de la historia; t. XXXV, cuad. I-V. Madrid, 1899; 8°.

* **Bollettino** della Società Umbra di Storia Patria. Anno V, fasc. II, III. Perugia, 1899; 8°.

* **Bulletin** de la Société d'Études des Hautes-Alpes. 17ème année, IIe série, N. 27; 18ème année, N. 29. Gap, 1898-99; 8°.

* **Bulletin** de la Société Nationale des Antiquaires de France, 1898. Paris, 8°.

* **Bulletin** de la Société de Géographie, etc.; 7e sér., t. XVIII, 4e trim. 1897; t. XX, 2e trim. 1899. Paris, 1899; 8°.

Bulletin de la Société pour la conservation des monuments historiques d'Alsace. II sér., t. XIX, livr. 2me. Strassbourg, 1899; 8°.

* **Bulletin** de l'Université de Toulouse. Fasc. 7-9. Toulouse, 1899; 8°.

Catalogue des Thèses et Écrits académiques. Tom. 1er et 2e, fasc. 1-10. Années scolaires 1884-89, 1889-94; 8°.

Catalogue des Thèses et Écrits académiques. Années scolaires 1884-1885 à 1897-98. 14e fasc. Paris, 1885-1898; 8° et 4° (*dalla Bibliothèque de l'Université de Paris*).

* **Česká Akademie Císaře Františka Josefa** pro vědy, Slovesnost a Umění. Almanach. Ročnik IX (1899).

Historický Archiv. Číslo 13-15. 1898-99; 8°.

Rozpravy. Třida I (Pro vědy filosofické právní a historické). Ročnik VI, 1897; 8°.

Sbírka pramenův ku ponznání literárního života v Čechách, na Moravě a v Slezsku. Skupina II. Číslo 4. 1898; 8°.

Spisy Jana Amosa Komenského. Číslo 1. Korrespondence. 1898.
Soustavný úvod ve studium nového řízení soudního. Díl. I. Část všcobecná. Podává Dr E. Ott. 1898; 8°.
Památník na oslavu stýck narozenin Františka Palackeho etc. 1898; 8°.
Památník na oslavu padesátiletého panovnického Jubilea jeho velicenstua Císaře a Krále Františka Josefa I. 1848-1898. 1898; 4°.

* **Comptes-rendus** de l'Athénée Louisianais. 6me série. Tom. 3me, livr. 5ème. Nouvelle-Orléans, 1899; 8°.

Congrès (XIIme) international des Orientalistes. Bulletins N. 8. Roma, 1899; 8°.

* **Eranos.** Acta philologica Suecana. Edenda curavit Vilelmus Lundström. Vol. III, fasc. 2-3, 1898-99. Upsaliae; 8°.

* **Forhandlinger** i Videnskabs-selskabet i Christiania Aar 1899, No. 1. Christiania, 1899; 8°.

* **Giornale** della Società di letture e conversazioni scientifiche di Genova. Anno XXI, fasc. III. Genova, 1899; 8°.

* **Institut de France:**

Notices et Extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale et autres bibliothèques publiés par l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres. T. 36me, 1ère partie. Paris, 1899; 4°.
Corpus inscriptionum Semiticarum ab Academia Inscriptionum et Litterarum humaniorum conditum atque digestum. Pars prima, inscriptiones Phoenicias continens. T. II, fasc. secundus. Testo e Atl. Parisiis, 1899; 2 fasc. in fol°.

Inventaire sommaire des Archives Départementales antérieures à 1790.

Bouche-du-Rhône. Sér. L. Documents de la période révolutionnaire. Tome deuxième.
Calvados. Archives civiles, Sér. E, Suppl. Tome 1er. Arrondissement de Caen.
Creuse. Sér. H, Suppl. (Archives des Hospices).
Dordogne. Archives civiles, Sér. B. Tome II.
Maine-et-Loire. Archives civiles, Sér. E. Tome III. Suppl. (suite). Archives Ecclésiastiques, Sér. H. Clergé régulier. T. I.
Puy-de-Dôme. Archives civiles. Sér. C. T. II.
Yonne. Archives Ecclésiastiques, Sér. H. Suppl. T. IV.
Auxerre, Clermont-Ferraud, Auger, Péregueux, Guéret, Caen, Marseille, 1898-99; 4° (*dal Governo della Rep. Francese*).

* **Johns Hopkins University Studies** in Historical and Political Science. Ser. XVI, Nos. 7-12; XVII, Nos. 1-5. Baltimore, 1898-99; 8°.

* **Journal** of the Asiatic Society of Bengal. History, Literature etc. Vol. LXVIII, P. I, No. 1 (1899); Part I, Extra. No. 1. Calcutta, 1899; 8°.

* **Jugoslavenska Akademija** Znanosti i Umjetnosti. Ljetopis. Godinu 1898. Rad, Knjiga 138; Stari pisci hrvatski Knjiga XXI; Zbornik za narodni život i običaje južnih slavena. Svezak IV., I. Polovina. Zagrebu, 1899; 16°, 8°.

* **Kansas** University Quaterly. Ser. B. Philology and history. Vol. VIII. Nos 1. Lawrance, Kans. 1899; 8°.

* **Mémoires couronnés** et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Collection in-8°. Lettres, vol. II. Bruxelles, 1898; 8°.

* **Mémoires** de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Savoie. 4e série, t. VII. Chambéry, 1899; 8°.

* **Mémoires** et **Documents** publiés par la Société Savoisienne d'Histoire et d'Archéologie, t. XXXVII. Chambéry, 1898; 8°.

* **Mémoires** de l'Académie des Sciences et des Lettres de Danemark. 6e sér. Section des lettres; t. IV, n. 6. Copenhague, 1899; 4°.

* **Mémoires** de l'Académie des sciences, arts et belles-lettres de Dijon. 4ème série, t. VI, a. 1897-98. Dijon, 1898; 8°.

* **Mémoires** de la Société Nationale des Antiquaires de France. 6me série, T. 8me. Paris, 1899; 8°.

* **Mémoires** et **Documents** publiés par l'Académie Chablaisienne fondée à Thonon le 7 décembre 1886. Tome XI. Thonon-les-Bains, 1897; 8°.

* **Memorie** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere, scienze storiche e morali. Vol. XXI, fasc. 1°. Milano, 1899; 4°.

* **Memorie** della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Ser. III. Vol. I. Modena, 1898; 4°.

* **Mitteilungen** des Vereins für Erdkunde zu Leipzig, 1898. Leipzig, 1899; 8°.

* **Monumenta Boica.** Vol. XLV. Monachii, MDCCCXC; 4° (*dalla R. Accad. delle scienze di Monaco di Baviera*).

* **Monumenta Tridentina.** Beiträge zur Geschichte des Concils von Trient begonnen von A. von Druffel fortgesetzt von K. Brandi. Heft IV, V. München, 1897, 1899; 4° (*dalla R. Accademia delle scienze di Monaco di Baviera*).

Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1898. Roma, 1899; 4° (*dal Ministero delle Finanze, Direzione generale delle Gabelle*).

Movimento della navigazione del 1898. Roma, 1899; 4° (*dal Ministero delle Finanze, Direzione generale delle Gabelle*).

Notizie complementari alle statistiche giudiziarie penali degli anni 1890-95. Roma, 1899; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio, Direzione generale della Statistica*).

* **Notulen** van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenscappen. Deel XXXV. Afl. 3, 4 (1897); XXXVI. Afl. 1-2, 4 (1898). Batavia, 1896-97; 8°.

** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographischer Anstalt. Ergänzungsheft N. 129, 130. Gotha, 1899; 8°.

* **Publications** de l'École des Lettres d'Alger. Bulletin de Correspondance Africaine. XXII, fasc. II, III. Paris, 1899; 8°.

* **Raccolta** degli Atti Parlamentari della 2a sessione della Legislazione 20a (1898-99). Disegni di Legge e Relazioni Vol. I-IV, dal N. 1-218. Documenti Vol. unico, dal N. I al N. XIX. Discussioni Vol. I-IV, dal 26 novembre 1898 al 30 giugno 1899. 9 vol. in-4°.

** **Raccolta** ufficiale delle Leggi e dei Decreti del Regno d'Italia. Vol. I pp. 1-976. 1899; 8°.

* **Record** (The) of the Royal Society, 1897. N. 1. London, 1897, 8°.

* **Rendiconto** delle Tornate e dei Lavori dell'Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti della Società Reale di Napoli. N. S., Anno XIII, gennaio-febbraio 1899. Napoli; 8°.

* **Rendiconto** delle Tornate e dei Lavori dell'Accademia di Scienze morali e politiche della Società R. di Napoli. Anno 37°. Napoli, 1898; 8°.

* **Report** of the R. Society of Literature, and List of Fellows 1899. London, 8°.

* **Resoconto** morale della Civica Biblioteca di Verona per l'anno 1898 Verona, 1899; 4°.

* **Sitzungsberichte** der philosophisch-philologischen und der historischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München 1899. Heft II-III. München, 1899; 8°.

Statistica giudiziaria penale per l'anno 1897. Roma, 1899; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio, Direz. gen. della Statistica*).

Statuto della Cassa cooperativa di risparmio e di previdenza fra Impiegati, Professionisti e Negozianti sede in Torino. Torino, 1899; 8°.

* **Tijdschrift** voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen etc.; Deel XL, Aflev. 3, 4; XLI, Aflev. 1, 4. Batavia, 1898-99; 8°.

* **Transactions** of the Royal Society of Literature. Second series, vol. XX, part IV. London, 1899; 8°.

* **Verhandelingen** van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel LI, Stuck 1°. Batavia, 1898; 8°.

* **Vierzigste** Plenarversammlung historischen Kommission bei der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften. München; 4°.

* **Vjestnik** kr. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskog Zemaljskog Arkiva. Godina I. Svezak 3, 4. Zagreb, 1899; 8°.

* **Wissenschaftliche** Veröffentlichungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig. III Bd., 3 Heft. Leipzig, 1899; 8°.

* *Dall' Università di California.*

Report (Biennal) of the President of the University on behalf on the Board of Regents to his Ex. the Governator of the State 1896-1898. Berkeley. 1898; 8°.

Report (Annual) of the Secretary to the Board of Regents of the University of California, for the years June 30, 1897; June 30, 1898. Berkeley, 1898; 2 vol. 8°.

The University chronicle an Official record, Vol. I, No. 2-6. Berkeley, 1898; 8°.

University of California. Register, 1897-98; Berkeley, 1898; 8°.

McGilvary (E. B.). The principle and the Methode of the Hegellian Dialetic a defence of the dialetic against its critic etc. Part I and II. Berkeley, 1897, 2 fasc. 8°.

Waymire (J. A.). Utily of University Education. Berkeley, 1898; 8°.

Green (Ch. S.). The University of California a birdseye of recent progress- Sacramento, 1898; 8°.

** Dall' Università di Erlangen.*

Albers (C.). Bedingungen der Strafbarkeit und Prozessvoraussetzungen. Erlangen, 1898; 8°.

Altsch (F.). Der gesetzliche Nieszbrauch des Ehemanns nach dem System der Verwaltungsgemeinschaft... Erlangen, 1898; 8°.

Arnoldi (Fr.). Der Einfluss der Ablehnung einer Operation seitens des körperlich Verletzten auf die civilrechtliche Haftung des Delinquenten... Erlangen, 1899; 8°.

Bartel (E.). Der mittelbarer Besitz und die *rei vindicatio* gegen den mittelbaren Besitzer. Erlangen, 1899; 8°.

Basedow (H.). Die strafrechtliche Verschuldung, etc... Hamburg, 1898; 8°.

Beckmann (F.). Das deutsche Lagerrecht. Münster i. W., 1898; 8°.

Bellebaum (H.). Hauberge und Haubergs Genossenschaften des Siegerlandes. Siegen. 1899; 8°.

Billmann (W.). Die Vertragsstrafe im deutschen bürgerlichen Gesetzbuch. Recklinghausen, 1899; 8°.

Böckelmann (O.). Ueber die Stellung des bürgerlichen Gesetzbuches für das deutsche Reich zur der Frage des Selbstkontrahierens des Stellvertreters im Vergleich zum römischen und gemeinen Recht. Magdeburg, 1898; 8°.

Becksch (H.). Die rechtliche Natur der gemeinrechtlichen Schmerzensgeldklage. Bromberg, 1898; 8°.

Brandau (M.). Der unregelmässige Verwahrungsvertrag. Schleswig, 1899; 8°.

Brandis (B.). Die rechtliche Behandlung des Zufalls bei der Werkverdingung nach gemeinem Recht und nach dem neuen bürgerlichen Gesetzbuch. Köln, 1898; 8°.

Brasack (F.). Die Entwendung von Elektrizität. Naumburg a. S., 1898; 8°.

Brünell (A.). Gehören die actiones quod iussu, institoria und exercitoria noch dem heutigen Rechte an? Breslau, 1898; 8°.

Brunabend (J.). Ein Beitrag zur Lotterie. Münster, 1899; 8°.

Badde (E.). Die Beweise für das Dasein Gottes von Anselm von Canterbury bis zu Renatus Descartes. Erlangen, 1898; 8°.

Busch (P.). Gefahrtragung bei Sachenmiete und Pacht unter Berücksichtigung des bürgerlichen Gesetzbuches. Erlangen, 1898; 8°.

Buscher (F.). Die Realkonkurrenz nach § 74 des Strafgesetzbuches für das deutsche Reich. Krefeld, 1898; 8°.

Canetta (V.). Zur Lehre von den sogenannten alternativen Obligationen nach gemeinem Rechte und nach dem bürgerlichen Gesetzbuche. Köln a. Rh., 1898; 8°.

Caspari (W.). Ueber den protestantischen Religionsunterricht an den höheren Klassen der deutschen Gymnasien. Erlangen, 1898; 4°.

Cohn (N.). Die Vorschriften betreffend die Zarâath nach dem Kitâb al-kâfi. Kirchhain, N.L., 1898; 8°.

Conrad (G.). Beiträge zur Lehre von der Bodmerei nach norwegischem Recht. Berlin, 1899; 8°.

Cramm (B. v.). Dürfen nach Aufhebung des deutschen Jesuitengesetzes vom 4. Juli 1872 die Einzelstaaten Jesuitenverbote erlassen? Erlangen, 1898; 8°.

Daesler (E.). Zur Lehre von den Voraussetzungen der handelsrechtlichen Rügepflicht nach Artikel 347 des Handelsgesetzbuches. Schweidnitz, 1899; 8°.

Dirksen (B.). Ein Beitrag zur Lehre des Rechts von der Firma. Berlin, 1898; 8°.

Eckstein (W.). Die Ubertragbarkeit der Forderungen nach künftigem deutschen Reichsrecht. München, 1898, 8°.

Ehlers (H.). Inwieweit haftet derjenige, der aus einer Sache eine neue verfertigt, dem Eigentümer? Glückstadt, 1898; 8°.

Ellinger (M.). Der Verweis im deutschen Reichsstrafrecht. München, 1899; 8°.

Engeling (P.). Ist die " Einigung „ des bürgerlichen Gesetzbuches ein Vertrag im Sinne des gemeinen Rechts und im Sinne des bürgerlichen Gesetzbuches? Leipzig, 1898; 8°.

Erdmann (O.). Das Miterbenverhältnis im bürgerlichen Gesetzbuch verglichen mit dem des gemeinen Rechts. Hannover, 1899; 8°.

Eversheim (L.). Bedeutung der die Schenkung beschränkenden Formvorschriften nach gemeinem Recht und bürgerlichem Gesetzbuch. Bonn, 1899; 8°.

Fabian (A.). Die Gewährleistungspflicht des Schenkers. Konigsberg, 1899; 8°.

Favreau (P.). Ueber die Confusio von Bürgschaft und Hauptschuld nach gemeinem Recht und bürgerlichem Gesetzbuch. Magdeburg, 1898; 8°.

Fester (R.). Festrede zur Säkularfeier der Regierung der wittelsbachischen Linie Zweibrücken-Birkenfeld... Erlangen, 1899; 4°.

Feigel (A.). Die Auflage nach dem bürgerlichen Gesetzbuche. Ansbach, 1898; 8°.

Feuchtwanger (M.). Das Recht der Selbstverteidigung nach dem deutschen bürgerlichen Gesetzbuch. München, 1898; 8°.

Fiegen (F.). Der Verzicht auf die Kompensationsbefugnis. Bonn, 1896; 8°.

Fischer (H.). Die Lehre vom Verschwender nach gemeinem Recht, Altpreuss. und Französ. Recht unter Berücksichtigung des bürgerlichen Gesetzbuches. Düsseldorf, 1898; 8°.

Frankfurter (R.). Wann ist eine Sache mittels einer strafbaren Handlung erlangt? Dessau, 1899; 8°.

Friedeberg (M.). Der Einfluss eines den Parteien unbekannten rechtskräftigen Urteils auf die Gültigkeit eines Vergleichs nach gemeinem Recht und bürgerlichem Gesetzbuch. Magdeburg, 1898; 8°.

Friederici (O.). Wie gestaltet sich die Rechtsstellung des Agenten einer Versicherungs-Gesellschaft auf Aktien unter dem Einflusse des Handels-Gesetzbuches vom 10. Mai 1897? Bonn, 1898; 8°.

Fröhlich (H.). Worin liegt das Eigentümliche der Aufrechnung-Compensation im Vergleich zu den übrigen Arten der Befriedigung des Gläubigers und welche Wirkungen ergeben sich aus dieser Eigentümlichkeit? Köln a. R., 1897; 8°.

Frommel (O.). Das Verhältnis von mechanischer und teleologischer Naturerklärung bei Kant und Lotze. Erlangen, 1898; 8°.

Gaubatz (G.). Die Entstehung der Aktien-Gesellschaft. Pirmasens, 1899; 8°.

Geub (J.). Ueber die Vereinigung zu einzelnen Handelsgeschäften (Handelsgesetzbuch Artikel 266-270), insbesondere im Vergleich mit der römischen societas und mit der offenen Handelsgesellschaft. Spandau, 1899; 8°.

Glaser (M.). Die zusammengesetzten Nomina bei Pindar. Amberg, 1898; 8°.

Goertz (O.). Zur Auslegung des Artikels 171 des Einführungsgesetzes zum bürgerlichen Gesetzbuche. Köln a. Rh., 1898; 8°.

Grote (H.). Die Unterscheidung von nothwendigen und nützlichen Geschäften bei der freiwilligen Geschäftsführung. Erlangen, 1899; 8°.

Grotefendt (E.). Vollkaufmann und Minderkaufmann nach dem Handelsgesetzbuche vom 10. Mai 1897. Breslau, 1899; 8°.

Greuven (F. C. O.). Die Wirkung der Resolutivbedingung bei Begründung dinglicher Rechte. Bonn, 1898; 8°.

Günther (W. W.). Begriff und Bedeutung der Gebietshoheit. Heildelberg, 1899; 8°.

Haas (W.). Die Stellung des Gewohnheitsrechts in der katholischen Kirche. Mannheim, 1898; 8°.

Hahn (L.). Die Sprache der sogenannten Expositio totius mundi et gentium. Bayreuth, 1898; 8°.

Hampel (E.). Untersuchungen über das lateinische Patriarchat von Jerusalem von Eroberung der heiligen Stadt bis zum Tode des Patriarchen Arnulf (1099 bis 1118). Breslau, 1899; 8°.

Heiliger (W.). Die Tragung der Gefahr bei gegenseitigen Verträgen nach gemeinem Recht und nach bürgerlichem Gesetzbuch. Düsseldorf, 1899; 8°.

Hesser (C.). Das ausbedungene Rücktrittsrecht beim Kaufvertrage (lex commissoria) im gemeinen Recht und bürgherlichen Gesetzbuche. Köln, 1899; 8°.

Hirschfeld (G.). Ueber Wettrennen und Rennwetten, ein Beitrag zur Lehre von Spiel und Wette. Bremen, 1899; 8°.

Hodermann (M.). Quaestionum œconomicarum specimen. Berolini, 1898; 8°.

Hoengen (F.). Welche Wirkung hat die nachfolgende Genehmigung auf das Verhältnis zwischen Geschäftsherrn und Geschäftsführer? Aachen, 1898; 8°.

Hoffsümmer (C.). Haftung eines Korrealschuldners für culpa und mora des Anderen. Köln, 1898; 8°.

Honig (L.). Die Strafrechtlichen Bestimmungen des Bankdepotsgesetzes vom 5 Juli 1896. Nürnberg, 1898; 8°.

Höpker (H.). Die Anwendung des § 51 R. St. G. auf die in sinnloser Trunkenheit begangenen dolosen Verbrechen. Berlin, 1899; 8°.

Jacobi (G. I.). Die Rechtsnatur des Illationsvertrages bei der Aktiengesellschaft. Königsberg i. Pr., 1898; 8°.

Jahr (C.). Ist die actio de dolo subsidiär und wann beginnt im Falle einer subsidiären Anwendung die Verjährung? Kiel, 1898; 8°.

Igen (R.). Rechtliche Stellung des Finders und dessen Erben in Beziehung auf die Fundsache. Berlin, 1898; 8°.

Joski (S.). Die Einwilligung des Verletzten. Bernburg, 1899; 8°.

Kahane (M.). Rechtsgrundsätze über Gebietsveränderungen nach preussischem und deutschem Reichsstaatsrecht etc. Danzig, 1899; 8°.

Kähler (O.). Gründe und Umfang der Haftung des bösgläubigen Besitzers betreffend die vindicierte Sache. Altona, 1898; 8°.

Kallfelz (H.). Eigentumsübergang behufs Vergemeinschaftung zwischen Gesellschaftern nach gemeinem Recht und nach dem bürgerlichen Gesetzbuch. Coblenz, 1898; 8°.

Kahn (M.). Der Lieferungsvertrag nach gemeinem Recht. Frankfurt a. M., 1899; 8°.

Katz (I.). Verschollenheit und Todeserklärung nach dem bürgerlichen Gesetzbuche. München, 1899; 8°.

Katzenstein (S.). " Kauf bricht nicht Miethe " Ein Beitrag zur Lehre des Miethrechtes nach dem bürgerl. Gesetzbuche für das deutsche Reich. Würzburg, 1899; 8°.

Kayser (F.). Staatsamt und Staatsdienst nach dem bürgerlichen Gesetzbuch. Regensburg, 1899; 8°.

Kemmerich (G.). Die Gewährleistungspflicht des Verkäufers wegen Mängel der Sache nach gemeinem Recht und dem B. G. B. Erlangen, 1899; 8°.

Keutner (Ph.). Die rechtliche Natur der gegenseitigen Verträge im burgerlichen Gesetzbuch. Wiesbaden, 1899; 8°.

Klawki (K.). Der Ersatzanspruch aus der auftraglosen Führung fremder Geschäfte mit besonderer Berüchsichtigung des Verbots des Geschäftsherrn nach gemeinem Recht und neueren Gesetzgebungen. Braunsberg, 1898; 8°.

Kleinau (J.). Die offene Handelsgesellschaft im Prozess. Halle a. S., 1898; 8°.

Kley (J.). Ueber den Beginn der Verjährung der Strafverfolgung. Mannheim, 1899; 8°.

Koppenhagen (M.). Die Immunität der deutschen Reichstags- und Landtags-Abgeordneten gegen Strafverfolgung und Verhaftung. Breslau, 1899; 8°.

Kratzsch (G.). Der Selbsteintritt des Kommissionärs nach dem Handelsgesetzbuche. Dresden, 1899; 8°.

Krauseneck (W.). Inwiefern ist ein Vergleich wegen Irrtums anfechtbar? Gumbinnen, 1899; 8°.

Kräusslich (F.). Die Geschäftsfähigkeit der Minderjährigen etc. Wiesbaden, 1898; 8°.

Krettner (A.) Die Schuldübernahme nach dem bürgerlichen Gesetzbuche vom 18. August 1896 mit Berücksichtigung des gegenwärtig geltenden Rechtes und der bisherigen Rechtsentwickelung. München, 1899; 8°.

Kretzmann (F. K.). Die Bedeutung der ehefraulichen Prozessfähigkeit des § 51 C. P. O.... Bonn, 1898; 8°.

Krohne (R.). Die Anwendbarkeit des Gewohnheitsrechts im früheren gemeinen und heutigen deutschen Strafrecht. Berlin, 1898; 8°.

Kronberger (C.). Die Ansprüche des Eigentümers nach bürgerlichem Gesetzbuch im Vergleich zum bisherigen gemeinen Recht. München, 1898; 8°.

Krumm (P.). I. Verhältnis des § 685 Abs. 1 bürgerlichen Gesetzbuchs: " Dem Geschäftsführer steht ein Anspruch nicht zu, wenn er nicht die Absicht hatte, von dem Geschäftsherrn Ersatz zu verlangen " zu dem bisherigen

gemeinrechtlichen Rechtszustande. II. Verhältnis des § 687 bürgerlichen Gesetzbuchs zu dem bisherigen gemeinrechtlichen Rechtszustande. Bonn, 1898; 8°.

Kückhoven (F.). Die römisch-rechtlichen Grundsätze der legitimatio per subsequens matrimonium und ihre Anwendbarkeit im heutigen gemeinen Recht und im bürgerlichen Gesetzbuche für das deutsche Reich. Düren 1898; 8°.

Küppers (H.). Die Grundsätze des gemeinen und preussischen Rechts sowie insbesondere des neuen bürgerlichen Gesetzbuchs über die Todeserklärung. Krefeld, 1898; 8°.

Küster (C.). Wie verhält sich das Wuchererergänzungsgesetz vom 19. Juni 1898 zu den Vorschriften über laesio enormis? Bonn, 1898; 8°.

Labowsky (N.). Eigenes Verschulden bei Schadensersatz-Ansprüchen nach gemeinem Recht und bürgerlichem Gesetzbuch. Berlin, 1898; 8°.

Laue (F.). Haftung für Hauseinsturz. Berlin, 1899; 8°.

Lax (E.). Die Vollmacht nach dem bürgerlichen Gesetzbuch. Minden i Westf., 1899; 8°.

Lind (G.). Die Lehre von der Rückwirkung der erfüllten Resolutivbedingung mit Rücksicht auf das bürgerliche Gesetzbuch. Hamburg, 1898; 8°.

Linde (F.). Die Haftung des Rheders aus fremdem Verschulden nach römischem Recht, nach den Quellen des Mittelalters und nach dem Handelsgesetzbuch. Berlin, 1898; 8°.

Linden (W.). Ist der Papst Souverän? Neuss a. Rhein, 1898; 8°.

Lechner (A.). Der Spezificationskauf. Aachen, 1898; 8°.

Lewenthal (S.). Das Firmenrecht nach dem neuen Handelsgesetzbuche. Heiligenstadt, 1899; 8°.

Luck und Witten (W. v.). Das Recht auf Sand und Steine in öffentlichen Flüssen nach gemeinem und preussischem Recht. Berlin, 1899; 8°.

Mahnkopf (A.). Die Rechtsverhältnisse zwischen der offenen Handelsgesellschaft und dem einzelnen Gesellschafter nach dem geltenden und dem neuen Handelsgesetzbuch. Berlin, 1898; 8°.

Mangels (G.). Die utile Berechnung der Zeit insbesondere bei den ädilitischen Klagen. Erlangen, 1899; 8°.

Maret (B.). Die Acquisitiv-Verjährung von Grunddienstbarkeiten nach gemeinem Recht und dem Rechte des bürgerlichen Gesetzbuches. Trier, 1899; 8°.

Martius (A.). Irrtum in den Beweggründen bei letztwilligen Verfügungen nach römischem und nach neuem deutschen bürgerlichen Recht. Berlin, 1898; 8°.

Matthaei (H.). Die Totenmahldarstellungen in der altchristlichen Kunst. Magdeburg, 1899; 8°.

Maurer (E.). Die Ministerverantwortlichkeit in konstitutionellen Monarchien. Karlsruhe, 1899; 8°.

Mechau (M.). Schleiermachers Auffassung vom Wesen der Religion in seinen " Reden über die Religion ". Halle a. S., 1899; 8°.

Meermann (G.). Die Stellung des Frachtführers nach dem neuen Handels-

gesetzbuch und dem Reichsgesetz betreffend die privatrechtlichen Verhältnisse der Binnenschiffahrt vom 15. Juni 1895. Berlin, 1897; 8°.

Mittweg (C.). Die unerlaubten Handlungen nach bürgerlichem Gesetzbuch. Trier, 1899; 8°.

Müller (W.). Zur Lehre vom Schatz nach römischem Recht und nach dem Recht des bürgerlichen Gesetzbuchs für das deutsche Reich. Köln, 1898; 8°.

Murray (O.). Die Operationspflicht. Neustadt a. Rbge., 1899; 8°.

Müsch (A.). Wie unterscheidet sich der Genuskauf vom Spezieskauf? Aachen, 1898; 8°.

Muus (H. G.). Der Klagegrund der *actio negatoria*. Leipzig-Reudnitz, 1899; 8°.

Nägelsbach (L.). Die einseitigen Willenserklärungen und ihre Geltung im bürgerlichen Gesetzbuch. Erlangen, 1898; 8°.

Naumann (K.). Ueber die Bedeutung und Wirkung der naturalis obligatio des Haussohnes aus einem Darlehen. Berlin, 1899; 8°.

Nessler (G.). Untersuchungen über die wichtigsten Versuche einer Metaphysik des Sittlichen. Berlin, 1898; 8°.

Neumann (A.). Auslegung der Stelle Cels. 1. 71 § 1. 2 Dig. de sol. 46, 3. Breslau, 1898; 8°.

Neumann (S.). Die Unbrauchbarmachung im § 41 des Reichsstrafgesetzbuchs. Breslau, 1899; 8°.

Neu (P.). Der Ususfructus nominis, nach gemeinem Recht und bürgerlichem Gesetzbuch. Köln, 1897; 8°.

Nusselt (E.). Das Lykurgproblem. Erlangen, 1898; 8°.

Ortloff (E.). Die Voraussetzungen des Eviktionsanspruchs. Eisenach, 1898; 8°.

Pape (G.). Lotzes Religiöse Weltanschauung. Berlin, 1899; 8°.

Petersen (W.). Das Discontgeschäft. Kiel, 1898; 8°.

Philipp (M.). Inwieweit unterscheidet sich die Cession dinglicher Ansprüche von derjenigen persönlicher Ansprüche? Altona, 1899; 8°.

Plassmann (C.). Ueber die reinvindicatio utilis. Krefeld, 1898; 8°.

Priem (A.). Giebt es eine Mittelstufe zwischen Nichtigkeit und Anfechtbarkeit? Bonn, 1899; 8°.

Promnitz (O.). Ueber die Haftung des Kommanditisten nach deutschem Handelsgesetzbuch. Breslau, 1898; 8°.

Purpus (W.). Die Anschauungen des Porphyrius über die Tierseele. Ansbach, 1899; 8°.

Raabe (H.). Ueber die Bedeutung der Verkaufsfaktura als Beweismittel und Verpflichtungsgrund im kaufmännischen Verkehr. Rheinbach, 1898; 8°.

Rackl (J.). Die Reisen des Venetianers Alvise da Cà da Mosto an der Westküste Afrikas (1455 u. 1456). Nürnberg, 1898; 8°.

Rehn (F.). Die Entwicklung des Wucherrechts im deutschen Recht mit Berücksichtigung der wuchergesetzlichen Bestimmungen im bürgerlichen Gesetzbuch. Cottbus, 1898; 8°.

Rein (P.). Die Bestimmungen des bürgerlichen Gesetzbuches über die Gewährleistung bei Viehveräusserungen etc. München, 1899; 8°.

Riemschneider (E.). Das formelle und Materielle Noterbrecht des Vaters und die Wirkung der Codicillar-Klausel in einem Testamente, in welchem dem Vater der Pflichtteil " vermacht „ worden ist. Berlin, 1898; 8°.

Ribbentrop (F.). Begriff der Frucht nach römischem Recht und nach dem bürgerlichen Gesetzbuch. Magdeburg, 1899; 8°.

Riede (K.). Der Begriff der Gewalt im Reichsstrafgesetzbuch. Erlangen, 1899; 8°.

Ritter (P.). Die Sonderrechte der deutschen Staaten und die Reichsverfassung. Königsberg, 1899; 8°.

Romatzeck (W.). Die Zwangs-Hypothek nach der Novelle zur Subhastationsordnung für Bayern vom 29 Mai 1886 und der Einfluss der neuesten Reichs-Gesetzgebung auf dieselbe. Fürth, 1898; 8°.

Römpler (E.). Studie über die Darstellung der Persönlichkeit in den Geschichtswerken des Thukydides und Xenophon. Erlangen, 1898; 8°.

Rosencrantz (O.). Die staatsrechtliche Stellung von Elsass-Lothringen. Insterburg, 1899; 8°.

Rosendorff (R.). Das Wechselblanket. Rerlin, 1899; 8°.

Rossi (O.). Die Haftung für heimliche Mängel der Kaufsache. München, 1898; 8°.

Rossteutscher (E.). Die Passivlegitimation bei rei vindicatio, Publiciana und hereditatis petitio. Coburg, 1899; 8°.

Roth (C.). Sonn- und Festtagsfeier in Bayern. Erlangen, 1899; 8°.

Roth (K.). Die erzählenden Zeitformen bei Dionysius von Halikarnass. Bayreuth, 1898; 8°.

Sander (E.). Ein Beitrag zur Lehre von der diligentia quam suis. Berlin, 1898; 8°.

Saran (W.). Der grobe Unfug insbesondere der sogenannte Pressunfug. Bromberg, 1898; 8°.

Schanzenbach (C.). Gibt es oder in wie weit gibt es in gegenseitigen Verträgen eine Pflicht zur Annahme der Gegenleistung? Bonn, 1898; 8°.

Schauer (A.). Behandlung der Eigentümer-Hypothek nach römischen Recht. Coburg, 1898; 8°.

Schierholz (A. v.). Deutsche Erbpacht und preussische Rentengüter. Arnstadt, 1898; 8°.

Schiagnitz (P.). Inwieweit ist zur Erfüllung einer Obligation die Mitwirkung des Gläubigers erforderlich? Coburg, 1899; 8°.

Schipmann (J.). Die rechtliche Behandlung des Zwanges bei Testamenten. Berlin, 1898; 8°.

Schippers (W. A.). In wie weit ist der Erbe befugt Erbschaftssachen zu vindizieren, ... Leipzig-Reudnitz, 1898; 8°.

Schlegel (E.). Die Zurücknahme einer Kreditzusage wegen Gefährdung des Gegenanspruchs, ... Freienwalde a. O., 1898; 8°.

Schleipen (A.). Die Konventionalstrafe nach gemeinem Recht verglichen mit der Vertragsstrafe des deutschen bürgerlichen Gesetzbuchs. Köln, 1898; 8°.

Schlotter (P.). Die unbestellte Ware. Schleiz, 1899; 8°.

Schmitz (C.). Ueber den Bereicherungsanspruch des nach § 690 C. P. O. widerspruchsberechtigten Eingentümers gegen den Pfandgläubiger nach beendeter Mobiliarzwangsvollstreckung. Köln, 1899; 8°.

Schumtz (F.). Die Entwicklung des Elsass- Lothringischen Gefängnisswesens seit der Annektion. Strassburg i. E., 1899; 8°.

Schneider (P.). Depositum und Mandat. Essen, 1899; 8°.

Schnütgen (R.). Das Differenzgeschäft seine geschichtliche Entwicklung und Klagbarkeit, etc.... Düsseldorf, 1899, 8°.

Schöntag (K.). Ueber die Vertragsstrafe nach dem bürgerlichen Gesetzbuche. Regensburg, 1898; 8°.

Schreher (H.). Der Nachlass an Mieth- und Pachtzinsen nach gemeinem Recht und dem bürgerlichen Gesetzbuch für das deutsche Reich. Viesbaden, 1898; 8°.

Schrömbgens (H.). Das Kaufmännische Zurückbehaltungsrecht, verglichen mit der Kompensationsbefugnis und dem Pfandrechte. Kaldenkirchen, 1899; 8°.

Schultz (A.). Die Konvaleszenz im bürgerlichen Gesetzbuch. Münster i. W., 1899; 8°.

Schultze (R.). Kritik der Religionstheorie Rauwenhoff's. Berlin, 1898; 8°.

Schurr (F.). Xenophon quo consilio commentariorum Socraticorum prioribus libris tribus adiecerit quartum et qua ratione ipsius libri quarti argumentorum ordinem excogitaverit. Mergentheimi, 1897; 8°.

Schwanenberg (P.). Die Verantwortlichkeit des Mieters eines Hauses für eine darin entstandene Feuersbrunst. Bonn, 1898; 8°.

Schwarz (E.). Haftet der ehemalige Besitzer einer fremden Sache, welcher sie gegen Entgelt veräussert hat, dem Eigenthümer derselben auf Herausgabe des Kaufpreises? Breslau, 1898; 8°.

Schwarz (G.). Der Vertragsschluss nach dem bürgerlichen Gesetzbuche und dem Handelsgesetzbuche vom 10 Mai 1897. Bamberg, 1899; 8°.

Schwartz (O.). Der Eigentumserwerb nach dem preussischen Gesetze vom 5 Mai 1872 und seine Anfechtbarkeit wegen Irrtums. Stargard i. P., 1898, 8°.

Sellmann (A.). Caspar Dornau, ein pädagogischer Neuerer im Anfang des siebzehnten Jahrhunderts. Langensalza, 1898; 8°.

Sempell (O.). Gemeinrechtliche Streitfragen auf dem Gebiete der Werkverdingung und ihre Entscheidung durch das bürgerliche Gesetzbuch. M. Gladbach, 1899; 8°.

Sobtzick (F.). Die bedingte und die befristete Obligation. Breslau, 1898; 8°.

Sommer (E.). Wird eine Schuld getilgt, wenn ein Dritter zahlte, der sich irrtümlich für den wahren Schuldner hielt? Halle a. S., 1899; 8°.

Sonntag (A.). Das simulierte Rechtsgeschäft. Gera, 1899; 8°.

Steinbach (B.). Das Schicksal des Vermögens einer untergegangenen juritischen Person nach dem burgerlichen Gesetzbuch. Erlangen, 1898; 8°.

Strauss (S.). Eigentumserwerb durch Specification nach dem bürgerlichen Gesetzbuche für das deutsche Reich. Bamberg, 1899; 8°.

Strousberg (H.). Die rechtswidrige Aneignung des elektrischen Stromes. Berlin, 1898; 8°.

Stabenrauch (W. v.). Verwaltung und Nutzniessung des Ehemannes am eingebrachten Gute der Ehefrau nach dem bürgerlichen Gesetzbuche. ... München, 1898; 8°.

Süssheim (M.). Die Begünstigung. München, 1898, 8°.

Teubieg (H.). Das Pfändungs-Pfandrecht in seiner materiell rechtlichen Bedeutung. Rheydt, 1898; 8°.

Thomer (E.). Die Rechtsstellung der Handlungsagenten nach dem zur Zeit geltenden Recht und nach dem am 1. Januar 1900 in Kraft tretenden Handelsgesetzbuch (I. Buch, 7. Abschnitt). Köln, 1898; 8°.

Tolkiemit (R.). Einziehung nach § 40 des Reichsstrafgesetzbuches. Beuthen O.-S., 1898; 8°.

Trappenberg (E.). Die rechtliche Bedeutung der Kündigung. Barmen; 1899; 8°.

Trappenberg (W.). Kann dar delegierte Schenker dem Delegatar gegenüber das *beneficium competentiae* geltend Machen? Herford, 1898; 8°.

Traumann (F.). Wirkungen des Erwerbs im guten Glauben nach gemeinem Recht und bürgerlichem Gesetzbuch. Bonn, 1898; 8°.

Treskow (W. v.). Ueber das Erfordernis eines in Gelde schätzbaren Interesse für die Klagbarkeit von Obligationen. Gotha, 1899; 8°.

Tretzel (H.). Der Gesetzsbegriff bei Kreittmayr. Rothenburg o. Tbr., 1899; 8°.

Uebersicht des Personal-Standes bei der kgl. bay. Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen nebst dem Verzeichnisse der Studierenden im Winter-Semester 1898-99, u. Sommer-Semester 1899; 8°.

Varnhagen (H.). Editionis criticae vetustissimi quod sermone anglico conscriptum est dramatis pars prior. Erlangae, 1898; 4°.

Verzeichniss der Vorlesungen, welche an der K. Bayerischen Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen im Winter-Semester 1898-99; Sommer-Semester 1899; 8°.

Vesberg (H.). Ueber die Rückwirkung des Strafgesetzes nach gemeinem deutschen Strafrecht, dem preussischen und dem deutschen Reichsstrafgesetzbuche. Breslau, 1898; 8°.

Wanninger (F. X.). Die Abänderungen des Eisenbahnfrachtrechtes durch das neue Handelsgesetzbuch. Passau, 1898; 8°.

Waubke (H.). Ueber die Haftung des verkaufenden Pfandgläubigers für rechtliche und thatsächliche Mängel. Elberfeld, 1898; 8°.

Weber (F.). Platonische Notizen über Orpheus. München, 1899; 8°.

Weerts (J. H. T.). Vergleichende Untersuchung der Religionsphilosophie Kants und Fichtes. Norden, 1898; 8°.

Wendel (P. J.). Die Rechtsstellung der Komplementare und Kommanditisten gegenüber der Kommanditgesellschaft und deren Gläubiger während Bestehens und im Konkurs der Gesellschaft. Bonn, 1899; 8°.

Wenderoth (E.). Die sogenannte Chikane nach römischem Recht und dem bürgerlichen Gesetzbuche. St. Johann a. d. Saar, 1898; 8°.

Wentrup (A.). Der Gläubigerverzug im bürgerlichen Gesetzbuch. Lingen, 1899; 8°.

Wiegand (W.). Die Verrechnung von Zahlungen nach gemeinem Rechte. Wiesbaden, 1898; 8°.

Wilde (L.). Die rechtliche Natur des beschränkt generellen Kaufs. Krefeld, 1899; 8°.

Wildt (F.). Unter welchen Voraussetzungen wird die Inhabung im gemeinen Recht und im bürgerlichen Gesetzbuche geschützt? Köln, 1898; 8°.

Whilhelm (F.). Das ist Rechtsirrtum und ist er entschuldbar? Erlangen, 1898; 8°.

Wilke (G.). Die Hauptberührungs- und Unterscheidungspunkte der Erziehungsgedanken John Locke's und Jean Jacques Rousseau's. Scheinfeld, 1898; 8°.

Willenbücher (H.). J. M. Guyaus Prinzip des Schönen und der Kunst. Giessen, 1899; 8°.

Witzleben (M. v.). Ausserkontrakliche Haftung für blosse Erteilung einer Auskunft oder eines Rates, etc. ... Cöthen, 1898; 8°.

Wirtz (E.). Die rechtlichen Wirkungen der Delegation und Expromission auf eine Nichtschuld nach römischem und neuerem Recht. Münstereifel, 1898; 8°.

Wirtz (H.). Ueber die Rechte an einer zwei Häusern gemeinsamen Scheidemauer nach römischem Recht, unter besonderer Berücksichtigung der Partikulargesetzgebung und des neuen bürgerlichen Gesetzbuches. Coblenz, 1898; 8°.

Wrede (F.). Giebt es im gemeinen Recht einen Selbsthülfeverkauf? Köln, 1898; 8°.

Zagel (G.). Die Gegenreformation im Bistum Bamberg unter Fürstbischof Neithard von Thüngen 1591-98. Bayreuth, 1898; 8°.

Zitelmann (F. C.). Die Voraussetzungen für das Recht und die Pflicht des Käufers, dem Verkäufer die Ware zur Verfügung zu stellen. Erlangen, 1899; 8°.

* *Dall'Università di Giessen:*

Becker (C.). Ueber den Einfluss der internationalen Getreidekonkurrenz auf die jährlichen Schwankungen der landwirtschaftlichen Geldroherträge und auf die Anbauflächen im Grossherzogtum Hessen. Giessen, 1898; 8°.

Becker (W.). Die Initiative bei der Stiftung des Rheinischen Bundes 1254. Giessen, 1899; 8°.

Dippel (R.). Quae ratio intercedat inter Xenophontis historiam Graecam et Plutarchi vitas quaeritur. Gissae, 1898; 8°.

Guthmann (I.). Die negativen Bedingungen in ihren Beziehungen zu den unechten Unterlassungsdelikten. Breslau, 1898; 8°.

Hansult (G. M.). Das Patronat in der evangelischen Landeskirche des Grossherzogtums Hessen. Friedberg, 1898; 8°.

Helm (K.). Untersuchungen über Heinrich Helsers Evangelium Nicodemi. Halle a. S., 1899; 8°.

Hildesheimer (M.). Des Samaritaners Marqah Buch der Wunder. Berlin, 1898: 8°.

Kinkel (W.). Beiträge zur Theorie des Urteils und des Schlusses. Giessen, 1898; 8°.

Kornemann (E.). Zur Stadtentstehung in den ehemals keltischen und germanischen Gebieten des Römerreichs. Giessen, 1898; 8°.

Personal-Bestand der Grossherzoglich Hessischen Ludwigs-Universität zu Giessen. Winterhalbjahr 1898/99. Sommerhalbjahr, 1899; 8°.

Reuter (R.). Der Raufhandel im deutschen Reichsstrafgesetzbuch. Breslau, 1899; 8°.

Simon (C.). Das Wechselblankett nach deutschem Recht unter Berücksichtigung des französischen und englischen Rechts. Darmstadt, 1898; 8°.

Swrakoff (K. D.). Der Einfluss der zeitgenössischen Philosophie auf Basedows Pädagogik. Giessen, 1898; 8°.

Vorlesungsverzeichniss der Grossherzoglich Hessischen Ludwigs-Universität zu Giessen. Sommerhalbjahr 1899; Winterhalbjahr, 1899-1900; 8°.

Weinel (H.). Die Wirkungen des Geistes und der Geister im nachapostolischen Zeitalter bis auf Irenäus. Tübingen, 1898; 8°.

* *Dalla Biblioteca dell'Università di Upsala:*

Ahlström (A.). Étude sur la langue de Flaubert. Macon, 1899; 8°.

Alstermark (B. J.). De religiöstsvärmiska rörelserna i Norrland 1750-1800. 1. Herjeådalen och Helsingland. Strengnäs, 1898; 8°.

Annerstedt (C.). Bref af Olof Rudbeck d. ä. rörande Upsala universitet. Utgifna med inledning. Upsala, 1899; 8°.

Årrskrift. Upsala Universitets. 1898. Upsala, 1898; 8°.

Beckman (K. F. N.). Språkpsykologi och modersmålsundervisning. Lund, 1899; 8°.

Bensow (J. O.). Till läran om Bibelns normativa auktorität. Stockholm, 1899; 8°.

Edén (N.). Om centralregeringens organisation under den äldre Vasatiden 1523-1594. Upsala, 1899; 8°.

Föreläsningar och öfningar vid Kongl. Universitetet i Upsala höst-terminen 1898. Upsala, 1898; 8°.

— vår-terminen. Upsala, 1899; 8°.

Girgensohn (P. G.). Die skandinavische Politik der Hansa 1375-95. Upsala, 1898; 8°.

Gustafsson (P. J.). Den lutherska konfirmationens väsen och liturgiska anordning. Upsala, 1899; 8°.

Hall (M. P. F.). Bidrag till kännedomen om Cistercienserorden i Sverige. 1. Munkklostren. Geffe, 1899; 4°.

Helander (P. J.). Haquin Spegel Hans lif och gärning intill år 1693. Upsala, 1899; 8°.

Johansson (J.). Profeten Hosea. Öfversättning och utläggning. Upsala, 1899; 8°.

Lené (G. A.). Les substantifs postverbaux dans la langue française. Upsala, 1899; 8°.

Ljunggren (S. A.). De gente patricia Claudiorum nonnulla. 1. Per spatium liberæ civitatis. Upsala, 1898: 8°.

Magnusson (A. M.). Nicolaus Olai Botniensis. Upsala, 1898; 8°.

Nilsson (J. W.). De diplomatiska förbindelserna mellan Sverige och Frankrike under Gustaf IV Adolf. Upsala, 1899; 8°.

Östberg (H. O.). Les voyelles vélaires accentuées, la diphtongue au et la désinence -avus dans quelques noms de lieux de la France du Nord. Upsala, 1899; 8°.

Samuelsson (J.). Studia in Valerium Flaccum. Upsala, 1899; 8°.

Sjögreen (N. E. K. M.). Jahjâ Bin 'Abd El-M'ṭî Ez-Zâwawi's Kitâb El-Fuṣûl. Kap. 1-2. Leipzig, 1899; 8°.

Wahlström (L. K.). Sverges förhållande till Danmark 1788-89. Upsala, 1898; 8°.

Westholm (A.). Étude historique sur la construction du type " Li filz le rei „ en français. Vesterås, 1899, 4°.

Albertotti (G.). Scritti inediti di Giulio Cesare Cordara e documenti relativi. Modena, 1899; 4° (*dall'A.*).

Arnò (C.). Cesare Nani. Modena, 1899; 8° (*Id.*).

Calmo (A.). Le lettere..... riprodotte sulle stampe migliori con introduzione ed illustrazioni di V. Rossi. Torino, 1888; 8° (*dono del Prof. V. Rossi*).

* **Chijs** (J. A. van der). Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India anno 1670-71. Uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen met medewerking van de Nederlandsch-Indische Regeering en onder toezicht. Batavia, s' Hage, 1898; 8° (*dalla Società di arti e scienze di Batavia*).

Conti (P. A.). Cenni storici di Moneglia. Genova, 1899; 8° (*dall'A.*).

* **Colenbrander** (H. T.). Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandes-India anno 1631-1634. Uitgegeven door het Departement van Koloniën onder toezicht. S' Gravenhage, 1898; 8° (*Id.*).

Compagnoni-Natali (G. B.). Cenni di Paleoantropologia ovvero dall'Archeologia alla Paletnologia in ordine all'antichità e all'evoluzione dell'uomo. Montegiorgio, 1899; 8° (*inviato dall'A. per il premio Vallauri*).

** **Croiset** (A. et M.). Histoire de la littérature grecque. Tome cinquième. Paris, 1899; 8°.

De-Bottazzi (G.). Italiani in Germania. Torino, 1895; 8° (*dall'A.*).

— Neue theoretisch-praktische Grammatik der italienischen Sprache für deutsche Schulen und zum Selbstunterricht. Stuttgart, 1898; 8° (*Id.*).

Ferrari (A.). Il fondamento della morale. Studi. Alessandria, 1899; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di filosofia*).

Ferrero (E.). Vincenzo De-Wit. Berlin, 1899; (*dall'A.*).

— Giuseppe Müller. Berlin, 1899 (*Id.*).

Foras (A. de). Girard du Pas abbé d'Abbondance, etc. et les anniversaires de Ripaille. Annecy, 1899; 8° (*Id.*).

— Cartulaire concernant l'ancien Prieuré de Saint-Paul. Redigé de 1270 à 1280. Annecy, 1899; 8° (*Id.*).

Giorcelli (G.). Storia della lunga contesa fra i marchesi Moscheni di Bergamasco ed i marchesi Faà di Bruno nell'acquese. Alessandria, 1899; 4° (*dall'A.*).

* **Hacklin** (A.). Olavus Laurelius. Hans lif och verksamhet (1585-1670). 1896; 8° (*dalla Biblioteca Universitaria di Upsala*).

* **Hodgkin** (Th.). Italy and Her invaders. 744-814. Vol. VII-VIII. Oxford, 1899; 8°.

Mancini (C.). Il linguaggio simbolico della regina delle epigrafi Osche scoverto ed interpretato. Napoli, 1899; 4° (*dall'A.*).

Maspero (G.). Histoire ancienne des peuples de l'Orient classique. Les Empires. Paris, 1899; 8° (*Id.*).

Nadaillaic (de). L'Amérique préhistorique d'après un livre nouveau du professeur Cyrus Thomas. Paris, 1899; 8° (*dall'A.*).

— La Chine du XX siècle. Paris, 1899; 8° (*Id.*).

— Les progrès des États-Unis. Arras, Paris. 1899; 8° (*Id.*).

Pio ricordo di Cesare Pomba. Torino, 1899; 8° (*dalla signora Rosa Bellono vedova Pomba*).

Poggi (V.). Miscellanee savonesi. Opere del Bernini in Savona. — Un vescovo di Savona barone del Primo Impero. — Scoperte archeologiche. — Contributo al regesto di papa Sisto IV. Savona, 1899; 8° (*dall'A.*).

— Bronzi votivi di Vado. 1 f. v.

Rogadeo (E.). Gli ordinamenti marittimi di Trani. Trani, 1899; 8° (*dall'A.*).

Rossi (F.). Manoscritti Copti esistenti nel Museo Egizio e nella Biblioteca Nazionale di Torino raccolti da B. Drovetti. Firenze, 1899; 8° (*Id.*).

Rossi (V.). Francesco Gonzaga prigioniero dei Veneziani (Agosto 1509). Sonetti pubblicati da V. R. Venezia, 1889; 8° (*Id.*).

— Un elefante famoso. Alessandria, 1890; 8° (*Id.*).

— Pasquinate di Pietro Aretino ed Anonime per il conclave e l'elezione di Adriano VI pubblicate ed illustrate. Palermo, 1891; 16° (*Id.*).

— Dialoghi in sonetti pubblicati da V. R. Livorno, 1892; 8° (*Id.*).

— La guerra dei Veneziani contro Ferrara nel 1509. Poemetto storico contemporaneo. Venezia, 1892; 8° (*Id.*).

— Jacopo D'Albizzotto Guidi e il suo inedito poema su Venezia. Venezia, 1893; 8° (*Id.*).

— *Caio Caloria Ponzio* e la poesia volgare, letteratura di Sicilia nel secolo XV. Palermo, 1893; 8° (*Id.*).

— Il canzoniere inedito di Andrea Michieli detto Squarzòla o Strazzòla. Torino, 1895; 8° (*Id.*).

— Un ballo a Firenze nel 1459. Bergamo, 1895; 8° (*Id.*).

— Due sonetti di Lorenzo Moschi. Pubblicati da V. R. Bergamo, 1896; 8° (*Id.*).

** **Sanuto** (M.). I Diarii. T. LIV, fasc. 230, 231; LV, 232.

Vismara (A.). Rime e sciolti. Milano, 1899; 12° (*dall'A.*).

** **Vivaldi** (V.). Storia delle controversie intorno alla nostra lingua. Vol. 3°. Catanzaro, 1898; 8°.

Wiese (B.) u. **Pèrcopo** (E.). Geschichte der italianischen Litteratur. Leipzig u. Wien, 1899; 8° (*dal Bibliographisches Institut*).

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Dal 19 Novembre al 3 Dicembre 1899.

* **Atti** dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania. An. LXXVI, 1898; ser. 4ª, vol. XII. Catania, 1899; 4°.

Atti del Collegio degli ingegneri e degli architetti in Palermo. 1899, gennaio-giugno. Palermo; 8°.

* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; t. LVIII, disp. 5ª, Venezia, 1899; 8°.

* **Beiträge** zur Geologie der Schweiz. Geotechnische Serie, I. Lieferung. Bern, 1899; 4° (*dalla Commissione Geologica svizzera*).

* **Bergens** Museum Aarbog for 1899. Bergen, 1899; 4°.

* **Bulletin** mensuel du magnétisme terrestre de l'Observatoire Royal de Bruxelles par L. Niesten. Janvier, février, mars et juillet 1899. Bruxelles; 16°.

* **Comptes-rendus** de l'Académie des Sciences de Cracovie. Juin-juillet 1899; 8°.

* **Prace** matematyczno-fizyczne. T. X. Warszawa, 1899-900; 8° (*dalla Società di scienze matematiche e fisiche*).

Primera Reunión del Congreso científico latino americano celebrada en Buenos Aires del 10 al 20 de Abril de 1898, por iniciativa de la Sociedad Científica Argentina ecc.

I. Organización y Resultados generales del Congreso.

IV. Trabajos de la 3ª Sección (Ciencias médicas). Buenos Aires, 1898; 2 vol. 8° (*dalla Biblioteca Naciónal*).

* **Proceedings** of the Royal Irish Academy. Third series, vol. V, No. 3. Dublin, 1899; 8°.

Publicationen für die Internationale Erdmessung. Die astronomisch-geodätischen Arbeiten des k. und k. militär-geographischen Institutes in Wien. XIII, XIV u. XV Bd. Wien, 1899; 4°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Vol. XXXII, fasc. 16°. Milano, 1899; 8°.

Report on the Madras Observatory for 1898-99. Calcutta; 4°.

* **Transactions** of the Manchester Geological Society. Vol. XXVI, Part IX, 1899; 8°.

* **Журналъ** русскаго физико-химическаго Общества при Императорскомъ С. Петербургскомъ Университетѣ. T. XXXI, n. 7. 1899; 8°.

Franchi (S.). Sull'età mesozoica della zona delle pietre verdi nelle Alpi occidentali. Roma, 1899; 8° (*dall'A.*).

Haeckel (E.). Kunst-Formen der Natur. III Liefg. Leipzig u. Wien, 1899; 4° (*Id.*).

Hulth (J. M.). Öfversikt af faunistiskt och biologiskt vigtigare litteratur rörande nordens fåglar. Stockholm, 1899; 4° (*Id.*).

Marron (M. M. Miranda y). El catorce de noviembre. Mexico, 1899; 8° (*dalla Biblioteca Nazionale del Messico*).

Novarese (V.). Le Alpi piemontesi. Roma, 1899; 8° (*dall'A.*).

Pascal (G.). Repertorio di matematiche superiori (Definizioni, Formole, Teoremi, Cenni biografici). II. Geometria. Milano, 1900; 16° (*Id.*).

— Die Variationsrechnung. Autorisierte deutsche Aufgabe von A. Schepp. Leipzig, 1899; 8° (*Id.*).

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.). Icones florae Germanicae et Helveticae simul terrarum adjacentium ergo Mediae Europae. Tomo 23. Decas 13/14. Lipsiae, 1899; 4°.

Vincenti (G.). Fonografia-Filologica. Relazione circa l'istituzione di una sezione speciale di Fonografia universale a mano presso gl'Istituti scientifici del Regno. Torino, 1895; 8°.

— La Fonografia universale Michela e la Fono-Telegrafia universale Vincenti. Torino, 1893; 4° obl. (*dal Prof. G. Vincenti*).

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 26 Novembre al 10 Dicembre 1899.

---

* **Abhandlungen** der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Historisch-philologische Klasse. N. F., Bd. III, No. 1. Berlin, 1899; 4°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Classe di Scienze morali, storiche e filolog., Serie V, vol. VI. Notizie degli Scavi: giugno 1899. Roma; 4°.

Legge, decreti, rescritti, ministeriali e regolamenti pel grande Archivio del Regno e per gli Archivi provinciali. Napoli, 1847; 8° (*dalla Direzione dell'Archivio di Stato in Napoli*).

* **Monumenta Palaeographica Sacra.** Atlante paleografico-artistico compilato sui manoscritti esposti in Torino alla mostra d'arte sacra nel M. DCCC XCVIII e pubblicato dalla R. Deputazione di Storia patria delle antiche provincie e della Lombardia per cura di F. Carta, C. Cipolla e C. Frati. Torino, Frat. Bocca, 1899; in-f°

* **Nachrichten** von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Philologisch-historische Klasse, 1899, Heft 2, 3. Göttingen; 8°.

** **Pompei.** Nuovi scavi. Casa dei Vettii. Napoli, 1899. Testo e Atl. in-f°.

* **Publications** de l'École des Lettres d'Alger. Bulletin de Correspondance Africaine. Histoire de la conquête de l'Abyssinie (XVI^e siècle). Texte arabe, fasc. III-IV; Traduction française et notes, fasc. II-III.

Sanskrit Critical Journal of the Oriental Nobility Institute; Vol. XXVIII, No. 4-9, 1899; Woking, England; 8°.

Uebersicht der Akademischen Behörden, Professoren, Privatdocenten, Lehrer Beamten etc. an der k. k. Leopold-Franzens-Universität zu Innsbruck für das Studienjahr 1899-900; 8°.

Bigoni (G.). Quattro documenti genovesi sulle contese d'Oltremare nel secolo XIII. Firenze, 1899; 8° (*dall'A.*).

Carutti (D.). Bibliografia Carloalbertina. Pel cinquantesimo anniversario della morte del Re Magnanimo. Torino, 1899; 4° (*dalla R. Deputazione sovra gli Studii di Storia Patria per le Antiche provincie e la Lombardia*).

Siri (Antonietta). Francesco Crispi e l'Italia. Firenze, 1899; 8° (*dall'A.*).

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Dal 3 al 17 Dicembre 1899.

---

* **Abhandlungen** der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. XII Bd., 1899; 8°.

* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. Entr. 5^a, t. XLVIII. Buenos Aires, 1899; 8°.

* **Annales** des Mines. 9^{me} série, t. XVI, livrs. 7, 8. Paris, 1899; 8°.

* **Buletinul** Societații de Sciințe din Bucuresci-Romania. Anul VIII. No. 4 și 5. Bucuresci, 1899; 8°.

* **Communications** de la Société mathématique de Kharkow. 2^e Sér., t. VI, Nos. 5 et 6. Kharkow, 1898; 8°.

* **Journal** of the Linnean Society. Botany. Vol. XXVI, No. 178. London, 1899; 8°.

* **Memorie** della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Serie V, tomo VII, fasc. 3, 4, 1898-99; 4°.

* **Nachrichten** von der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physik. Klasse. 1899. Heft 2, Göttingen, 1899; 8°.

* **Proceedings** and **Transactions** of the R. Society of Canada. Second Ser., vol. 4°. Ottawa, 1898; 8°.

* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXV, No. 421. London, 1899; 8°.

Publicationen für die Internationale Erdmessung. Die astronomisch-geodätischen Arbeiten des k. und k. militär-geographischen Institutes in Wien, XVI Bd. Wien, 1899; 4°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Vol. XXXII, fasc. XVII. Milano, 1899; 8°.
* **Rendiconti** del Circolo matematico di Palermo. Tom. XIII, fasc. 6. Palermo, 1899; 8°.

Dal Ministero dell'Interno:

Atti della settima adunanza degli scienziati italiani tenuta in Napoli dal 20 settembre al 5 ottobre 1845: Parte seconda. Napoli, 1846; in-4°.
Giornale Sanitario sovranamente disposto contenente le principali notizie, le decisioni di massima emanate dal Supremo Magistrato di Salute di Napoli, e gli ordini superiori dettati onde garantire questi reali dominii al Cholera-Morbus. Napoli, 1831; 4°.
Notizie, memorie ed istruzioni riguardanti il Cholera-Morbus. Napoli, 1831; 8°.
Regolamenti Sanitarii per lo Regno delle Due Sicilie sanzionati da Sua Maestà in conseguenza della legge de' 20 ottobre 1819. Napoli, 1831; 4°.
— Id. Id. Napoli, 1847; 4°.
Regolamento pel servizio interno del Grande Archivio di Napoli; approvato con Dicasteriale determinazione del 30 luglio 1861. Napoli, 1861; 8°.
Relazione dei tremuoti di Basilicata del 1851. Napoli, 1853; 4°.

** **Barrande** (G.). Système Silurien du centre de la Bohême. 1ère partie: Recherches Paléontologiques. Vol. VII. Classe des Échinodermes. Fam. des Crinoïdes. Prague, 1899; 4°.
Cantor (M.). Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II Bd., 2 Halbbd. von 1550-1668. Leipzig, 1900; 8° (*dall'A.*).
Galilei (G.). Le opere. Vol. IX. Firenze, 1898; 4° (*dal Ministero dell'Istruzione Pubblica*).
Raspail (X.). A propos d'un projet de réforme à la nomenclature des êtres organisés et des corps inorganiques. Mexico, 1899; 8° (*dall'A.*).

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 10 al 24 Dicembre 1899.

---

* **Almanach** der k. Akademie der Wissenschaften. Wien, 1897; 8°.
* **Analecta** Bollandiana. T. XVIII, fasc. III. Bruxelles, 1899; 8°.
Annali di Statistica. Atti della Commissione per la statistica giudiziaria civile e penale. Sessione del luglio 1898. Roma, 1899; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

* **Archiv** für österreichische Geschichte. Herausg. von der zur Pflege vaterländischer Geschichte aufgestellten Commission der k. Akad. der Wissenschaften. Bd. 85, 86. Wien, 1898-99; 2 vol. 8°.

* **Atti** e **Rendiconti** dell'Accademia di scienze, lettere e arti dei Zelanti di Acireale. Nuova serie, vol. IX. Acireale, 1899; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Serie V. Classe di Sc. mor., stor. e filol., ser. V, vol. VII. Notizie degli Scavi: Luglio 1899. Roma; 4°.

Atti della Società di Archeologia e Belle Arti per la provincia di Torino. Vol. VII, fasc. 2. Torino, 1900; 8°.

** **Bibliotheca** Philologica Classica. Vol. XXVI, 1899. Trimestre tertium. Lipsiae, 1899; 8°.

* **Boletin** de la Real Academia de la historia; t. XXXV, cuad. VI. Madrid, 1899; 8°.

* **Fontes rerum austriacarum.** Œsterreichische Geschichts-Quellen. Herausg. von der Commission der k. Akad. der Wissenschaften in Wien. 50 Bd., II Abth. Wien, 1898; 8°.

* **Giornale** della Società di letture e conversazioni scientifiche di Genova. Anno XX, fasc. IV. Genova, 1899; 8°.

* **Jaarbock** van de k. Akad. van Wetenschappen gevestigd te Amsterdam. Amsterdam, 1899; 8°.

Inauguration (Die Feierliche) des Rectors der Leopold-Franzens-Universität zu Innsbruck für das Studienjahr 1899/1900 am 30 October 1899. Innsbruck, 1899; 8°.

* **Prijsvers.** Pater ad Filium, carmen praemio aureo ornatum in certamine poetico Hoeufftiano. Accedunt quatuor poemata laudata. Amstelodami, 1899; 8° (*dall'Accad. R. delle Scienze di Amsterdam*).

* **Sitzungsberichte** der philosophisch-philologischen und der historischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München, 1899. Bd. II, Heft 1. München, 1899; 8°.

* **Sitzungsberichte** der k. Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Classe. 138, 139, 140 Bd., Jahr. 1897-98. Wien, 1898; 3 vol. 8°.

Statistica giudiziaria civile e commerciale e statistica notarile per l'anno 1897; Parte I. Statistica giudiziaria civile e commerciale. Roma, 1899; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

* **Transactions** of the Royal Society of Literature. 2. Series, vol. XXI, part I. London, 1899; 8°.

* *Dall' Università di Strassburg i. E.:*

Asp (T.). Die Geschichte des finländischen Bank- und Münzwesens bis 1865. Strassburg, 1898; 8°.

Dennig (E.). Der Hausierhandel in Baden insbesondere in Bezug auf die Hausindustrie. Karlsruhe, 1899; 8°.

Feilchenfeld (L.). Rabbi Josel von Rosheim, ein Beitrag zur Geschichte der Juden in Deutschland im Reformationszeitalter. Strassburg, 1898; 8°.

Gerken (H.). Die Sprache des Bischofs Douglas von Dunkeld (Vocalismus und Consonantismus der Reimwörter) nebst Anhang: Zur Echtheitsfrage des " King Hart ". Strassburg, 1898; 8°.

Goette (A.). Der Ehrenbrief des Jakob Püterich von Reichertshausen an die Erzherzogin Mechthild. Strassburg, 1899; 8°.

Heer (F. J.). Die historischen und geographischen Quellen in Jāqūt's Geographischem Wörterbuch. Strassburg, 1898; 8°.

Henczynski (R.). Das Leben des heiligen Alexius von Konrad von Würzburg. Berlin, 1898; 8°.

Hertling (C.). Quaestiones mimicae. Argentorati, 1899; 8°.

Hund (A.). Colmar vor und während seiner Entwickelung zur Reichsstadt. Strassburg, 1899; 8°.

Kanner (S.). Das Lotto in Œsterreich. Ein Beitrag zur Finanzgeschichte Œsterreichs. Strassburg, 1898; 8°.

Karst (J.). Aussprache und Vokalismus des Kilikisch-Armenischen. Strassburg, 1899; 8°.

Kisch (W.). Begriff und Wirkungen der besonderen Streitgenossenschaft. Strassburg, 1899; 8°.

Kistiakowski (T.). Gesellschaft und Einzelwesen. Berlin, 1899; 8°.

Lühe (W.). Hugo von Die und Lyon Legat von Gallien. Breslau, 1898; 8°.

Maurer (T.). Die Religionslehre Spinozas im theologisch-politischen Traktat. Strassburg, 1898; 8°.

Mayer (M. E.). Der Causalzusammenhang zwischen Handlung und Erfolg im Strafrecht. Strassburg, 1899; 8°.

Nuglisch (A.). Das Finanzwesen des Deutschen Reiches unter Kaiser Karl IV. Strassburg, 1899; 8°.

Piatt (H.). Neuter il in Old French. Strassburg, 1898; 8°.

Petri (E.). Die Gewährleistung für Mängel im Recht beim Sachkauf nach B. G. B. Strassburg, 1899; 8°.

Riber (J.). Das jugendliche Alter als Grund der Straflosigkeit im römischen Recht. Strassburg, 1898; 8°.

Rohrbach (P.). Die Berichte über die Auferstehung Jesu. Strassburg, 1898; 8°.

Sandbach (F. E.). Handschriftliche Untersuchungen über Otto von Diemeringen's Deutsche Bearbeitung der Reisebeschreibung Mandeville's. Strassburg, 1899; 8°.

Schlapp (O.). Die Anfänge von Kants Kritik des Geschmacks und des Genies, 1764 bis 1775. Göttingen, 1899; 8°.

Schoembs (J.). Ariosts Orlando Furioso in der englischen Litteratur des Zeitalters der Elisabeth. Soden a T., 1898; 8°.

Stieve (A.). Der Gegenstand des Bereicherungsanspruch nach dem bürgerlichen Gesetzbuche. Strassburg, 1899; 8°.

Tokiwai (Tsuru-Matsu) Studien zum Sumāgadhāvadāna. Darmstadt, 1898; 8°.

Uhl (A.). Quaestiones criticae in L. Annaei Senecae dialogos. Strassburg, 1899; 8°.

Uhry (L.). Die Scholien des Gregorius Abulfarag Barhebraeus zur Genesis Capitel 21 bis 50. Leipzig, 1898; 8°.

Vopel (H.). Die Altchristlichen Goldgläser. Stuttgart, 1898; 8°.
Wirtz (P.). De Theophrasti Eresii libris phytologicis. Argentorati, 1898; 8°.

Bonghi (R.). Pensieri inediti con ricordi biografici per Francesco Crispi. Lucera, 1899; 8° (*dal Sindaco di Lucera*).
Burnouf (E.). Le Bhâgavata Purana ou histoire poétique de Krichna traduit et publié par E. Burnouf. Tom. V. Paris, Impr. Nationale, 1898; in-f° (*dal Ministero di Grazia, Giustizia e dei Culti del Governo Francese*).
De-Filippi (F.). La spedizione di S. A. R. il Principe Luigi Amedeo di Savoia Duca degli Abruzzi al Monte Sant'Elia (Alaska), 1897. Milano, 1900; 8° (*dono di S. A. R. il Duca degli Abruzzi*).
Manfroni (G.). Storia della marina italiana dalle invasioni barbariche al trattato di Ninfeo. Livorno, 1899; 8° (*dall'A.*).
Mazzarella (G.). La condizione giuridica del marito nella famiglia matriarcale. Contributo alla giurisprudenza etnologica. Catania, 1899; 8° (*Id.*).

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

Dal 17 al 31 Dicembre 1899.

---

* **Accademia** Reale delle Scienze di Amsterdam: Verhandelingen. Afd. Natuurkunde 1° Sectie Dl. VI, N. 6-7; 2° Sectie Dl. VI, N. 3-8. Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde Année 1898/99 Dl. VII; Proceedings (Section of Science). Vol. I; 8°.
* **Annales** de la Société belge de microscopie. T. XXIV. Bruxelles, 1899; 8°.
Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1899. Rio de Janeiro, 1899; 8°.
* **Archives** Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Sér. II, t. III, 2° livr. La Haye, 1899; 8°.
* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-Phys. Classe, 1899, V. Leipzig; 8°.
* **Bollettino** del R. Comitato Geologico d'Italia. Anno 1899, n. 3. Roma; 8°.
* **Bulletin** de la Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Tom. X, fasc. IV; 1896. Bruxelles, 1899; 8°.
* **Bulletin** de l'Académie Royale des sciences et des lettres de Danemark. 1899, Nos 4, 5. Copenhague; 8°.
Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. Vol. X, n. 55-59. Lincoln Nebraska, 1898; 8° (*dall'Univ. di Nebraska*).

* **Denkschriften** der k. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-natur. wissenschaftliche Classe. Bd. 65; 67, I-II Theil; 66. Wien, 1898-99; 4° vol. 4°.
* **Documents** et **Rapports** de la Société Paléontologique et Archéologique de l'Arrondissement judiciaire de Charleroi. T. XXIII. Charleroi, 1899; 8°.
* **Festschrift** zur Feier ihres Fünfzigjährigen Bestehens herausg. von der physikalisch-medizinischen Gesellschaft zu Würzburg. Würzburg, 1899; 8°.
** **Fortschritte** der Physik im Jahre 1898, Bd. LIV. 2 Abt. Braunschweig, 1899; 8°.
* **Giornale** della R. Accademia di Medicina. A. LXII, n. 9-11. Torino, 1899; 8°.
* **Kansas** University Quarterly. Ser. A: science and mathematics. Vol. VIII, No. 3. Lawcance, 1899.
* **Memorias** y Revista de la Sociedad Científica " Antonio Alzate ". T. XII (1898-99), N. 7-8. Mexico; 8°.
* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LX, No. 1. London, 1899; 8°.

Primera Reunión del Congreso científico latino americano celebrada en Buenos Aires del 10 al 20 de Abril de 1898, por iniciativa de la Sociedad Científica Argentina ecc.
II. Trabajos de la 1ª Sección (Ciencias exactas é ingeniería). Buenos Aires, 1898; 8° (*dalla Biblioteca Naciónal*).

* **Proceedings** of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. XXXIV, Nos. 21-23. Boston, 1899; 8°.
* **Proceedings** of the American Philosophical Society held at Philadelphia. Vol. XXXVIII, No. 159. 1899; 8°.
* **Report** of the Survey Botanical series. III. Minnesota Plant Life by Conway Mac Millan. Minneapolis, Minn. 1899; 8° (*dal Geological and Natural History Survey of Minnesota*).

Report (Nineteenth Annual) of the United States Geological Survey to the Secretary of the Interior 1897-98. Ch. D. Walcott Director. In Six Parts.
I. Director's report, including-triangulation and spirit levelling. IV. Hydrography. VI. Mineral resources of the United States, 1897, etc. Washington, 1898, 4 vol.; 4°.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey showing the progress of the Work during the fiscal Year ending with June, 1897. Washington, 1898; 4°.

* **Sitzungsberichte** der K. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-natur.-wissenschaftlichen Classe. 1898, CVII Bd., Abth. I, VI-X Heft; CVII Bd., Abth. II a, III-X Heft; CVII Bd., Abth. II b, IV-X Heft; CVII Bd., Abth. III, I-X Heft. Wien, 1898; 8°.
* **Smithsonian Institution.** Smithsonian miscellaneous collections 1171. Index to the literature of Tallium 1861-1896. By Martha Doan. Washington, 1899; 8°.
* **Transactions** of the Academy of Science of St-Louis. Vol. VIII, n. 8-12; IX, 1-7. 1898-99; 8°.

* *Dall'Università di Strassburg i. E.:*

Amson (A.). Ueber das Ausreissen grösserer Aeste der Arteria axillaris bei Verrenkung des Oberarms. Strassburg, 1898; 8°.

Bamler (K.). Strassburger Temperaturmittel nach 100jährigen Beobachtungen. Barmen, 1899; 8°.

Bartholdy (K.). Beiträge zur Anatomie der Nähte des Schädeldaches. Strassburg, 1899; 8°.

Baar (P.). Ueber die im Gefolge von Hautkrankheiten auftretenden Epidermiscysten unter besonderer Berücksichtigung der bullösen Erkrankungen. Strassburg, 1899; 8°.

Bethe (A.). Ueber die Primitivfibrillen in den Ganglienzellen vom Menschen und anderen Wirbelthieren. Jena, 1898; 8°.

Boeglin (H.). Ueber Hauttuberculose insbesondere Tuberculosis cutis propria. Strassburg, 1898; 8°.

Borstelmann (P.). Ueber zwei isomere Aethylcrotonsäuren. Strassburg, 1898; 8°.

Breithaupt (G.). Ueber das optische Verhalten eingebrannter Gold- und Platinschichten. Strassburg, 1898; 8°.

Briou (A.). Ueber die Oxidation der Stereoisomeren Weinsäuren im thierischen Organismus. Strassburg, 1898; 8°.

Camerer (W.). Die Behandlung der Inguinalbubonen nach Erfahrungen im Hamburger Freimaurerkrankenhaus. Strassburg, 1898; 8°.

Conradi (H.). Zur Frage der Toxinbildung bei den Milzbrandbakterien. Leipzig, 1899; 8°.

Deetz (E.). Ein Beitrag zur Pathogenese der Cysten in den langen Röhrenknochen. Strassburg, 1898; 8°.

Delunsch (V.). Ueber spontane Zerreissungen der Nabelschnur und ihrer Gefässe bei der Geburt. Strassburg, 1899; 8°.

Engel (H.). Ueber die Incubationsdauer des Typhus abdominalis. Strassburg, 1899; 8°.

Faust (E. S.). Ueber das Glutolin, ein Albuminoid des Blutserums. Leipzig, 1898; 8°.

Fleurent (H.). Ein Beitrag zur Kenntnis der Resultate der Behandlung der Prostatahypertrophie mit Resection der Vasa deferentia. Strassburg, 1898; 8°.

Frédéric (J.). Beiträge zur Anatomie und Entwicklungsgeschichte der Aeste der Aorta descendens beim Menschen. Jena, 1898; 8°.

Gerst (P.). Ueber Neuralgien im Diabetes. Strassburg, 1898; 8°.

Goldschmidt (F.). Ueber die Einwirkung von Säuren auf Eiweissstoffe. Strassburg, 1898; 8°.

Gross (A.). Zur Kenntnis des Ovovitellins. Strassburg, 1899; 8°.

Gumpper (E.). Ueber die Heilbarkeit der sympatischen Iridocyclitis. Strassburg, 1898; 8°.

Guthrie (T.). Ueber einige neue Ketodilactone. Strassburg, 1898; 8°.

Hannig (E.). Ueber die Staubgrübchen an den Stämmen und Blattstielen der Cyathaeaceen und Marattiaceen. Leipzig, 1898; 4°.

Haven-Boyd (H. de). Ueber Methylallylmilchsäure und ihre Umlagerung in Dimethylhydrofurancarbonsäure. Strassburg, 1898; 8°.

Heimann (S.). Einige Fälle von Steinen in der Urethra. Strassburg, 1898; 8°.

Hirsch (S.). Ueber einen Fall von Ruptura recto-vaginalis bei spontaner Geburt. Strassburg, 1899; 8°.

Hoffmann (A.). Beitrag zur Lehre von der Tabaksamblyopie. Strassburg, 1898; 8°.

Holtzmann (A.). Ueber die Varicen der unteren Extremitäten und ihre operative Behandlung nebst Mitteilung einer neuen Modification der bisherigen Behandlungsmethoden. Strassburg, 1898; 8°.

Holzhäuser (K.). Blasensteine mit Seidenfäden. Strassburg, 1898; 8°.

Homburger (A.). Ueber die Beziehungen des Morbus Basedowii zu Psychosen und Psychoneurosen. Strassburg, 1899; 8°.

Horber (T.). Ueber das Mundbodenkarcinom. Strassburg, 1898; 8°.

Hügel (G.). Ueber Acanthosis nigricans im Anschluss an einen neuen Fall aus der dermatologischen Universitätsklinik der Herrn Prof. Dr. Wolff. Strassburg, 1898; 8°.

Hynitzsch (J.). Anatomische Untersuchungen über die Hypertrophie der Pharynxtonsille. Wiesbaden, 1899; 8°.

Iuga (G.). Die cyklischen Minimalflächen. Strassburg, 1898; 8°.

Jaeger (E.). Ein weiterer Beitrag zur Casuistik der Spina bifida occulta mit localer Hypertrichosis. Strassburg, 1899; 8°.

Janes (C.). Ueber Nabelschnurtorsion. Strassburg, 1899; 8°.

Kahn-Hut (D.). Die Operation des grauen Staar's in geschlossener Kapsel. Strassburg, 1898; 8°.

Kornemann (H.). Ueber Ankylose des Steissbeins und die dadurch hervorgerufenen geburtshülflichen Störungen. Strassburg, 1899; 8°.

Krapf (H.). Ueber den Knochenabscess. Strassburg, 1898; 8°.

Kreyenberg (M.). Ueber Jodoformexantheme. Naumburg a. S., 1898; 8°.

Krieger (H. T.). Ueber die Darstellung krystallinischer tierischer Eiweissstoffe. Strassburg, 1899; 8°.

Kuhn (A.). Die relativen Indicationen zum Kaiserschnitt. Strassburg, 1898; 8°.

Kunlin (J.). Ueber eine merkwürdige Umwandlung einer α-Ketonsäure in die zugehörige α-Amidosäure. Strassburg, 1899; 8°.

Lachner-Sandoval (V.). Ueber Strahlenpilze. Bonn, 1898; 8°.

Lentze (W.). Beiträge zur Prognose der Retinitis albuminurica. Strassburg, 1899; 8°.

Levy (S.). Ein Beitrag zur Aetiologie der Uterusmyome. Strassburg, 1898; 8°.

Loeb (R.). Der Milzbrand in Elsass-Lothringen. Strassburg, 1898; 8°.

Lux (M.). Ueber Keto- und Hydroxylactone. Strassburg, 1898; 8°.

Maas (O.). Ueber die Pigmentierungen der Leber, besonders über die Haemochromatose. Strassburg, 1898; 8°.

Marx (H.). Ueber die klinische Bedeutung des Digitoxinum crystallisatum. Strassburg, 1898; 8°.

Matsuyama (Y.). Zwei Fälle von acuter käsiger Pneumonie. Strassburg, 1898; 8°.

Mauch (R.). Ueber physikalisch-chemische Eigenschaften des Chloralhydrats und deren Verwertung in pharmaceutisch-chemischer Richtung. Strassburg, 1898; 8°.

Mély (G.). Ueber Vorkommen von Bauchbrüchen bei Neugeborenen und ihre geburtshülfliche Bedeutung. Strassburg, 1898; 8°.

Moennichs (G.). Robert Boyle als Geophysiker. München, 1899; 8°.

Mühlenbein (L.). Klinische Betrachung der in der Strassburger gynaecologischen Klinik seit dem Jahre 1888 beobachteten Dermoidcysten. Strassburg, 1898; 8°.

Nöldeke (E.). Experimenteller Beitrag über die Bedeutung des Diplokokkus lanceolatus Fraenkel in der Pathologie des Auges. Strassburg, 1899; 8°.

Partenheimer (A.). Ueber Schussverletzungen der Milz. Strassburg, 1898; 8°.

Prestinary (T. H.). Statistisches über Behandlung der Gonorrhoe. Strassburg, 1899; 8°.

Presuhn (V.). Zur Frage der bakteriologischen Fleischbeschau. Strassburg, 1898; 8°.

Rath (D.). Ueber Kopftrauma und Ohrerkrankung. Strassburg, 1898; 8°.

Roth (E.). Ueber die Einwirkung von Essigsäureanhydrid auf tricarballylsaures Natrium. Strassburg, 1898; 8°.

Salomon (H.). Ueber die Einwirkung von Benzoesäureanhydrid auf tricarballylsaures Natrium. Strassburg, 1899; 8°.

Scheib (J.). Nachbehandlung der wegen Hydrocele Operierten mit Hülfe der Hautfaltennaht. Strassburg, 1898; 8.

Schierbel (A.). Welche diagnostische Schwierigkeiten bieten Mesenterialcysten? Strassburg, 1899; 8°.

Schmidt (A.). Ueber Pemphigus traumaticus und die bei bullösen Erkrankungen der Haut überhaupt vorkommenden Veränderungen des Blutes im Anschluss an zwei Fälle aus der dermatologischen Klinik der Herrn Prof. Dr. Wolff. Strassburg, 1899; 8°.

Schmidt (C.). Ueber die Verletzungen des Zwerchfells mit scharfen Instrumenten. Lahr, 1898; 8°.

Schwellenbach (A.). Zwei Fälle von Aphasie mit besonderer Berücksichtigung der Amusie. Strassburg, 1898; 8°.

Stadler (E.). Ueber die Einwirkung von Kochsalz auf Bakterien, die bei den sog. Fleischvergiftungen eine Rolle spielen. München, 1899; 8°.

Steingiesser (F.). Ueber Sitz, Häufigkeit und Prognose der Halswirbelfrakturen. Bühl, 1899; 8°.

Sternberg (W.). Ueber die Einwirkung von Benzaldehyd auf tricarballylsaures Natrium bei Gegenwart von Essigsäureanhydrid. Strassburg, 1899; 8°.

Suren (J.). Kritische Geschichte der Lehre von der Extrauterinschwangerschaft mit vorzüglicher Berücksichtigung der Aetiologie und Pathologie. Strassburg, 1899; 8°.

Throu (H.). Beiträge zur Kenntnis der Isopropylisoparaconsäure. Strassburg, 1899; 8°.

Weber (R. H.). Ueber die Anwendung der Dämpfung durch Inductionsströme zur Bestimmung der Leitfähigkeiten von Legirungen. Leipzig, 1899; 8°.

Weidenreich (F.). Zur Anatomie der centralen Kleinhirnkerne der Säuger. Stuttgart, 1899; 8°.

Weil (J.). Ueber Frühdiagnose bei progressiver Paralyse. Strassburg, 1899; 8°.

Weinreich (H.). Ueber kongenitale Defektbildung des Oberschenkels. Potsdam, 1898; 8°.

Will (G.). Zur Casuistik der seltenen Urinfisteln der Weiber. Strassburg, 1899; 8°.

Woehrlin (A.). Ueber Verletzungen und traumatische Aneurysmen der Arteria Maxillaris interna. Tübingen, 1898; 8°.

Würtz (A.). Ein Beitrag zur Posttyphösen Periostitis im Kindesalter. Leipzig, 1898; 8°.

Zimmermann (A.). Tabische Gelenk- und Knochenerkrankungen. Strassburg, 1899; 8°.

De Acosta (A. de Gordon y). Declaremo en Caba, guerra a la Tuberculosis. Habana, 1899; 8° (*dall'A.*).

Delpino (F.). Gaetano Licopoli, parole commemorative. Napoli, 1898; 8° (*Id.*).

— Nuove specie Mirmicofile fornite di nettarii estranuziali. Napoli, 1898; 8° (*Id.*).

— (F.). Questioni di Biologia vegetale. Chiavari, 1898; 8° (*Id.*).

— Parere sulla " Relazione e voto della Società Africana d'Italia sull'opportunità d'impiantare giardini sperimentali di colture tropicali nell'Eritrea ". Napoli, 1898; 8° (*Id.*).

— Rapporti tra la evoluzione e la distribuzione geografica delle *Ranuncolacee.* Bologna, 1899; 4° (*Id.*).

— Note di biologia vegetale. Apparecchio sotterratore dei semi. Como, 1899; 8° (*Id.*).

** **Geikie** (J.). Earth Sculpture or the origin of Land-Forms. London, 1898; 8°.

** **Haddon** (A. C.). The Study of Man. London, 1898; 8°.

Lanciai (G. B.). Elementi di fisica ad uso dei Licei e degli Istituti Tecnici. 1° vol. Torino, 1899; 8° (*dall'A.*).

Peano (G.). Formulaire de mathématiques publié par la Revue de mathématiques. Turin, 1896-1899; 8° (*Id.*).

Troncone (A.), Calcolo grafico del π. Maracaibo (Venezuela), 1899; 8° (*Id.*).

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche

Dal 24 Dicembre 1899 al 7 Gennaio 1900.

** **Antologia** (Nuova). Rivista di Scienze, Lettere ed Arti. Roma, 1899; 8°.

** **Archivio** storico italiano. Firenze, 1899; 8°.

* **Archivio** storico lombardo. Milano, 1899; 8°.

* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti, 1899. Vol. 22°. Venezia; 8°.

* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; t. LIX, disp. 1ª. Venezia, 1899; 8°.

** **Berliner** philologische Wochenschrift. 1899; 8°.

** **Bibliografia** italiana. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Vol. 33. N. 12-24. Milano, 1899; 8°.

** **Bibliothèque** de l'École des Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Vol. 60. Paris, 1899; 8°.

** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne, 1899; 8°.

** **Bollettino** ufficiale del Ministero dell'Istr. pubbl. Roma, 1899; 8°.

* **Bulletin** of the New York Public Library Astor Lonox and Tilden Foundations. Vol. III. No. 7-12, 1899; 8°.

* **Bulletin** d'Histoire ecclésiastique et d'Archéologie religieuse des Diocèses de Valence, Gap, Grenoble et Viviers. XIXᵉ année, 1899. Romans; 8°.

* **Bullettino** di Archeologia e Storia dalmata. Spalato, 1899; 8°.

** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia Cristiana. Roma, 1899. N. 1-2; 8°.

Dictionary of the Lepcha-Language compiled by the late General G. B. Mainwaring revised and completed by Albert Grünwedel, Berlin. Berlin, 1898; 8° (*Dono: of Majesty's Secretary of State for India in Council*).

* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma, 1899; 4°.

** **Giornale di Erudizione**; Corrispondenza letteraria, ecc. Vol. 1-8. Firenze, 1899.

** **Giornale storico** della Letteratura italiana. Vol. 33, suppl. 2°; 34, fasc. 1-3. Torino, 1899; 8°.

* **Historische** Zeitschrift. Bd. 83, 84, Heft 1, München, 1899; 8°.

** **Journal Asiatique,** ou Recueil de Mémoires, d'Extraits et de Notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples orientaux. Vol. 13; 14, fasc. 1-2. Paris, 1899; 8°.

** **Journal** des Savants. Paris, 1899; 8°.

Mélanges de littérature et d'histoire religieuse publiés à l'occasion du jubilé épiscopal de Mgr. de Cabrières, évêque de Montpellier 1874-99. Paris, 1899, 2 vol. 8° (*dono di Mons. Vescovo de Cabrières*).

** **Moyen (Le) Age**; Bulletin mensuel d'histoire et de philologie. Paris, 1899; 8°.

** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthe's Geographischer Anstalt. Bd. 45. Gotha, 1899; 8°.

* **Rendiconti** della R. Accademia dei Lincei — Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. 1899. Vol. 8°, fasc. 1-8. Roma; 8°.

** **Revue** archéologique. Vol. 34. Paris, 1899; 8°.

** **Revue** de Linguistique et de Philologie comparée. Vol. 32°. Paris, 1899; 8°.

* **Revue** de l'Université de Bruxelles. (1898-99) IV° année, Nos. 1-10; V (1899-900), Nos. 1-3. Bruxelles, 1898-900; 8°.

** **Revue** des deux Mondes. Paris, 1899; 8°.

* **Revue** géographique internationale. Paris, 1899; 4°.

** **Revue** numismatique. IV° série, T. III°. Paris, 1899; 8°.

** **Rivista** di filologia e d'istruzione classica. Vol. 27. Torino, 1899; 8°.

* **Rivista** di Sociologia. An. IV, fasc. 1-7. Roma, 1899; 8°.

* **Rivista** internazionale di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma, 1899; 8°.

* **Rivista** italiana di Sociologia. Anno III, fasc. 1-5. 1899. Roma; 8°.

** **Rivista storica** italiana; pubblicazione bimestrale. Anno XVI. Torino, 1899; 8°.

** **Séances** et Travaux de l'Académie des Sciences morales et politiques. Compte rendu. Paris, 1899; 8°.

Stampa (La). Gazzetta Piemontese. Torino, 1899; f°.

Boselli (P.). Esposizione finanziaria del Ministro del Tesoro fatta alla Camera dei Deputati nella seduta del 28 novembre 1899. Roma 1899; 8° (*dall'A.*).

Crescimanno (G.). Figure dantesche. Venezia, 1893; 8° (*Id.*).

De-Bottazzi (G.). Barone Federico Leutrum secondo documenti ufficiali inediti. Torino, 1899; 8° (*Id.*).

Perrens (F. T.). Les libertins en France au XVII° siècle. Nouvelle édition. Paris, 1899; 8° (*Id.*).

Renier (R.). Un poema sconosciuto degli ultimi anni del sec. XIV (*Fimeroida* di Jacopo Del Pecora) analizzato ed illustrato. Bologna, 1882; 8° (*Id.*).

— Tarocchi di Matteo Maria Boiardo. Bologna, 1884; 8° (*Id.*).

— La discesa di Ugo d'Alvernia allo inferno secondo il codice franco-italiano della Nazionale di Torino. Bologna, 1883; 8° (*Id.*).

— Il tipo estetico della donna nel Medioevo, appunti ed osservazioni. Ancona, 1885; 8° (*Id.*).

— Un nuovo documento di Uberto Foglietta. Genova, 1888; 8° (*Id.*).

Renier (R.). Dalla corrispondenza di Guido Postumo Silvestri. Spigolature. Bergamo, 1894; 8° (*dall'A.*).

— Appunti sul contrasto fra la madre e la figliuola bramosa di marito. Bergamo, 1897; 8° (*Id.*).

— Un codicetto di dedica ignoto del rimatore Gaspare Visconti. Bergamo, 1895; 8° (*Id.*).

— L'erba prodigiosa di San Giovanni. Palermo, 1891; 8° (*Id.*).

Valdarnini (A.). Principio, intendimento e storia della classificazione delle umane conoscenze secondo Francesco Bacone. Firenze, 1880; 8°.
— Andrea Cesalpino, filosofo. Discorso. Firenze, 1882; 8°.
— Saggi di filosofia sociale. Torino, 1890; 8°.
— Il metodo sperimentale di Aristotile e Galileo. Torino, 1898; 8°.
— Saggi di filosofia speculativa. 2ª ediz. Bologna, 1899; 8°.
— La Scuola in Italia. Asti, 1899; 8° (*Inviati in dono dall'A. per il premio di Filosofia di Fondazione Gautieri*).

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Dal 31 Dicembre 1899 al 14 Gennaio 1900.

---

* **Abhandlungen** der mathem.-physischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. XXV, N. 4, 5. Leipzig, 1899; 8°.
* **Acta** mathematica. Zeitschrift herausg. von G. Mittag-Leffler. 1898. Stockholm, 1899; 4°.
* **American Journal** of Science. Editor Edward S. Dana. New-Haven, 1899; 8°.
** **Annalen** der Physik und Chemie. Leipzig, 1899; 8°.
** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris, 1899; 8°.
** **Annals** of Mathematics, second series. Vol. 1°. Charlottesville; 4°.
* **Annals** and Magazine of Natural History. VII Ser. Vol. 3°, 4°. London, 1899; 8°.
** **Archiv** für Entwickelungsmechanik der Organismen. Bd. 8, 9. Leipzig, 1899; 8°.
** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève, 1899; 8°.
** **Archives** italiennes de Biologie... sous la direction de A. Mosso. Vol. 32°. Turin, 1899; 8°.
** **Archivio** per le Scienze mediche, diretto da G. Bizzozero, Vol. 23. Torino, 1899; 8°.
* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie Vª. Vol. 7°, 8°. Roma, 1899; 8°.
** **Annuaire** pour l'an 1900, publié par le Bureau des Longitudes. Paris; 18°.
** **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig, 1899; 8°.
* **Bibliotheca mathematica**; Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausg. von G. Eneström. Stockholm, 1899; 8°.
* **Bulletin** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXXV, No. 7. Cambridge, 1899; 8°.
** **Bulletins** de la Société anatomique de Paris, etc. Paris, 1899; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa, 1899; 8°.

* **Comptes-rendus** hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Vol. 128, 129. Paris, 1899; 8°.

Den Norske Nordhavs-Expedition, 1876-1878. XXV. Zoologi: Thalamophora, XXV. Hydroida. Christiania, 1899; 2 fasc. in-4° (*dono del Governo Norvegese*).

* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma, 1899; 4°.

* **Gazzetta** chimica italiana. Roma, 1899; 8°.

Gazzetta delle Campagne, ecc. Direttore Enrico Barbero. Torino, 1899; 4°

* **Giornale** del Genio civile. Roma, 1899; 8°.

* **Giornale** scientifico di Palermo. Palermo, 1899; 4°.

* **Jornal** de sciencias Mathematicas e Astronomicas. Publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Vol. 13°. Coimbra, 1899; 8°.

** **Journal** für die reine u. angewandte Mathematik. Berlin, 1899; 4°.

* **Journal** of Comparative Neurology. Granville, Ohio, 1899; 8°.

* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca N. Y., 1899; 8°.

* **Journal** of the Chemical Society. Vol. 77 e 78. London, 1900; 8°.

* **Journal** of the R. Microscopical Society, 1899, part 6. London, 1899; 8°.

** **Journal** de Conchyliologie, comprenant l'étude des mollusques vivants et fossiles. Paris, 1899; 8°.

** **Journal** de Mathématiques pures et appliquées. Paris, 1899; 4°.

* **Katalog** der Bibliothek der k. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akad. der Naturforscher. Bd. II. 6. Halle, 1899; 8°.

* **Mémoires** de l'Acad. Roy. des Sciences et des Lettres de Danemark, 6me sér. Sect. des Sciences, t. IX, n. 3. Copenhague, 1899; 4°.

* **Monatshefte** für Mathematik und Physik. Wien, 1899; 8°.

Morphologisches Jahrbuch. Herausg. v. C. Gegenbaur. Leipzig, 1899; 8°.

** **Nature**, a Weekly illustrated Journal of Science. London, 1899; 8°.

** **Neues Jahrbuch** für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, etc. Stuttgart, 1899; 8°.

* **Nova Acta** Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae curiosorum. Tomus LXXII, LXXIV. Halle, 1899; 4°.

** **Philosophische Studien**. Leipzig, 1899; 8°.

* **Physical Review**; a journal of experimental and theoretical physics..... Published for Cornell University. New York, 1899; 8°.

* **Proceedings** of the Chemical Society of London. Vol. 15°. No 216. London, 1899; 8°.

* **Proceedings** of the Canadian Institute. New Series. No. 3, vol. 1. Toronto, 1899; 8°.

** **Quarterly Journal** of pure and applied Mathematics. London, 1899; 8°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Vol. XXXII, fasc. 18. Milano, 1899; 8°.

** **Repertorium** zu den Acta und Nova Acta der K. Leopoldino-Carolinischen Deutschen Akad. der Naturforscher v. Dr. Arnim Graesel. II. Bd. Nova Acta Bd. IX-LXIII. Halle a. S., 1899; 4°.

* **Revue** sémestrielle des publications mathématiques. Amsterdam, 1899; 8°.

** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris, 1899; 8°.

* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma, 1899; 8°.

Rivista di Topografia e Catasto pubblicata per cura di N. Jadanza. Torino, 1899; 8° (*dono del socio Jadanza*).

* **Science Abstracts.** Physics and Electrical Engineering. London, 1899; 8°.

* **Settimana** (La) medica dello Sperimentale, organo dell'Accademia medico-fisica fiorentina. Firenze, 1899; 8°.

* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze, 1899; 8°.

* **Transactions** of the Royal Scottish Society of Arts. Vol. XV, part 1ª. Edinburgh, 1899; 8°.

* **Transactions** of the Zoological Society of London. Vol. XV, part 4. 1899; 4°.

* **Zeitschrift** für mathematischen und naturwissenschaftl. Unterricht, herausg. v. J. C. Hoffmann. Leipzig, 1899; 8°.

** **Zeitschrift** für physikalische Chemie. Leipzig, 1899; 8°.

** **Zoologischer Anzeiger,** herausg. von Prof. J. Victor Carus in Leipzig. 1899; 8°.

* *Dall'Università di Heidelberg:*

Allendorff (P.). Zur Kenntnis aromatischer Ketone. Schönebeck a. Elbe. 1898; 8°.

Alffers (F.). Quantitative Trennungen im Bromstrome mit Hydroxylamin und Wasserstoffsuperoxyd. Heidelberg, 1898; 8°.

Amberg (S.). Ein Beitrag zur Lehre von den Gynatresieen. Heidelberg, 1899; 8°.

Anger (A.). Ueber den Umsatz und Ansatz der Aschenbestandtheile, vornehmlich von Kalk, Magnesia, Kali u. Phosphorsäure, bei Milchkühen. Bonn, 1898; 8°.

Assmy (P.). Ueber den Einfluss der Durchtrennung motorischer Nerven auf die Narbenbildung bei extramedianen Bauchschnitten. Tübingen, 1899; 8°.

Baeumges (M.). Ueber traumatische Lähmungen nach Chloroformnarkose. Heidelberg; 8°.

Bamberg (F.). I. Ueber Triphenyl-methyl-methan. II. Zur Kenntnis der aromatischen Sulfinsäuren und Thiophenole. Heidelberg, 1898; 8°.

Bandke (E.). Ueber Gleichgewichte in basischen Lösungsmitteln. Berlin, 1898; 8°.

Bartels (A.). I. Ueber Einwirkung von Aethylengas auf Pseudocumol bei Gegenwart von Aluminiumchlorid. II. Eine neue Methode zur Darstellung hoch-alkylierter Kohlenwasserstoffe. III. Ueber Hexaäthylbenzol. Heidelberg, 1899; 8°.

Berchelmann (W.). Eine Synthese aromatischer Aldehyde. Heidelberg, 1898; 8°.

Berendes (R.). Zur Kenntnis der aromatischen Sulfinsäuren. Halle a. S., 1898; 8°.

Betteridge (F. H.). I. Zur Kenntniss alkylirter Bernstein- und Glutarsäuren. II. Ueber das kryoskopische Verhalten substituirter Oxyketone in Naphtalin. Breslau, 1898; 8°.

Bles (E.). Ueber tuberkulöse Lymphome und ihr Verhältnis zur Lungentuberkulose. Jena, 1899; 8°.

Beetzelen (E.). Ueber das Hydrazid der Phenylessigsäure. Heidelberg, 1898; 8°.

Burgny (F.). Ueber die Bodenverhältnisse des norddeutschen Flachlandes in ihrer Beziehung zum geologischen Aufbau desselben. Berlin, 1899; 8°.

Cohnheim (O.). Ueber die Resorption im Dünndarm und der Bauchhöhle. München, 1898; 8°.

Deibel (L.). Kann Phthise als Indication zur Einleitung der Früh-resp. Fehlgeburt gelten? Heidelberg, 1899; 8°.

Dohrn (M.). Kryoskopische Untersuchungen. Heidelberg, 1899; 8°.

Droop (H.). Untersuchungen über das Wesen und Wirken der Brache. Heidelberg, 1898; 8°.

Eicken (C. v.). Ueber die Desinfektion inficierter Wunden. Tübingen, 1899, 8°.

Emanuel (E.). Ein Fall von Angioma arteriale racemosum des Gehirns nebst Bemerkungen zur Frage von dem Bau und der Genese der Hirnsandbildungen. Leipzig, 1899; 8°.

Engelken (H.). Metastasirende embryonale Drüsengeschwulst der Nieregegend im Kindesalter. Jena, 1899; 8°.

Epple (H.). Ueber Hydrate des Natriumcarbonats. Heidelberg, 1899; 8°.

Feldbausch (F.). Der Einfluss verschiedener Stoffe auf die rothen Blutkörperchen und die Bedeutung der letzteren für die Gerinnung. Berlin, 1899; 8°.

Frenzel (C.). I. Ueber das Auftreten von Sauerstoff bei Reduktionsprozessen. II. Zur Synthese aromatischer Aldehyde. Heidelberg, 1899; 8°.

Friedemann (W. H.). I. Zur Kenntnis der Tetrachlorterephtalsäure. II. Ueber die Einwirkung von Oximen auf Diazokörper. Münster i. W., 1899; 8°.

Fries (A.). Synthesen in der Pyridinreihe. Heidelberg, 1898; 8°.

Fritzweiler (R.). Ueber die Methylaethylbernsteinsäuren. Neustadt a. Haardt, 1898; 8°.

Geissmar (F.). Zur Kasuistik der kongenitalen Liddefekte. Hamburg, 1898, 8°.

Glück (H.). Entwurf zu einer vergleichenden Morphologie der Flechten-Spermogonien. Heidelberg, 1899; 8°.

Goldsmith (J. N.). Ueber Derivate des Methyl-1-phenyl-3-cyclohenons-5. Heidelberg, 1898; 8°.

Graf (W.). Ein Beitrag zur Kenntnis der aromatischen Aldehyde. Heidelberg, 1899; 8°.

Grenever (A.). Beiträge zur Kenntnis der Hexaalkyldiarsoniumverbindungen. Bonn, 1899; 8°.

Grünhagen (C.). Ueber Condensationsproducte des Citrals und Citronellals mit Malonsäureester. Wiesbaden, 1898; 8°.

Gunzert (L.), Beitrag zur Statistik der Epulis. Berlin, 1898; 8°.

Haberland (K. R.). Die Löslichkeit von Salzhydraten bei Gegenwart von Nichtelectrolyten und gleichjonigen Electrolyten. Wiesbaden, 1898; 8°.

Hähnle (O.). Ein Beitrag zur Kenntnis des Mesitoltribromids. Ulm a. D., 1899; 8°.

Hampe (W.). " Untersuchungen über das Pentabromid des as m-Xylenols ". Leipzig-R, 1899; 8°.

Heyer H., Ueber einen Fall von Ohrcarcinom, behandelt mit Resection des Felsenbeins. Leipzig, 1899; 8°.

Herz (N.). Kritische Beiträge zur Lehre von der Lymphbewegung. Heidelberg, 1899; 8°.

Hinrichsen (W.). I. Ueber Condensationen aromatischer Dibromide durch metallisches Natrium. II. Derivate des *o*-Jodphenetols. Berlin, 1899; 8°.

Hoeren (L.). Ueber Regelmässigkeiten bei der Krystallisation concentrierter Salzlösungen. Heidelberg, 1898; 8°.

Hofmann (W.). Ein Beitrag zur Kenntnis colloidaler Metallhydroxyde. Heidelberg, 1898; 8°.

Hutzler (R.). Ueber die Frage der Umwandlung von Buttersäure in Isobuttersäure. Heidelberg, 1898; 8°.

Jameson (H. L.). Contributions to the Anatomy and Histology of Thalassema neptuni Gaertner. Jena, 1899; 8°.

Imass (A.). 1. Direkte Bestimmung des Randwinkel von wässrigen Salzlösungen Capillarröhren aus verschiedenen Glassorten. II. Ueber die Ausbreitung von wässrigen Salzlösungen an der Oberfläche fester Körper unter Wasser. Heidelberg, 1899; 8°.

Jordan (H.). Ueber das Hydrazid und Azid der Phenylpropionsäure. Bonn, 1899; 8°.

Joukowsky (D.). Beiträge zur Frage nach den Bedingungen der Vermehrung und des Eintritts der Konjugation bei den Ciliaten. Heidelberg, 1898; 8°.

Kaufmann (F.). Ueber einen Fall von Wundscharlach. Frankenthal, 1899; 8°.

Kaufmann (R.). Ueber die Aufnahme von Erdalkalien durch Cholerabacillen. Berlin, 1898; 8°.

Kehrer (F. A.). Ueber die Vorgänge bei der Wundheilung. Heidelberg, 1898; 4°.

Koebner (M.). Zur Kenntnis der aromatischen Aldehyde. Berlin, 1899; 8°.

Krause (M.). I. Ueber einige Derivate des *m*-Oxybenzaldehydes. II. Ueber einige neue Oxyazokörper. Heidelberg, 1898; 8°.

Lewin (I.). Beiträge zur Kenntnis der Isomerie der Formylverbindungen. Heidelberg, 1898; 8°.

Lewin (M.). Ueber die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis. Leipzig, 1898; 8°.

Lipstein (A.). Beiträge zur Casuistik der Leberchirurgie. Leipzig, 1899; 8°.

Loeb (A.). Beitrag zur Lehre vom Meningotyphus. Naumburg a. S., 1898; 8°.

Lossen (W.). Beiträge zur Kenntnis der desinfizierenden Wirkung des Chloroforms, namentlich im gasförmigen Zustand. Heidelberg, 1899; 8°.

Lotmar (H.). Teilungsverhältnis und Löslichkeit. Göttingen, 1899; 8°.

Löwy (E.). Zur Synthese aromatischer Aldehyde. Heidelberg, 1898; 8°.

Mannheimer (N.). Untersuchungen über die Möglichkeit algebraischer Differentialgleichungen für additiv und multiplicatorisch-periodische Functionen zweiter Gattung. Leipzig, 1898; 8°.

Manz (R.). Beiträge zur Kenntnis der Möller (Barlow'schen) Krankheit. Heidelberg, 1899; 8°.

Mayer (J.). Ueber Metalltrennungen in alkalischer Lösung durch Wasserstoffsuperoxyd und durch Hydroxylamin. Karlsruhe, 1898; 8°.

Meyer (E. A.). Casuisticher Beitrag zur Lehre von der Chorea chronica progressiva (Huntingtons Chorea, Chorea hereditaria). Heidelberg, 1899; 8°.

Michaëlis (W.). Ueber die Verseifungsgeschwindigkeit aromatischer Aethylester und den Einfluss des Katalysators auf die Grenze der Esterbildung. Heidelberg, 1899; 8°.

Naab (J. P.). Die chirurgische Behandlung der Nasenrachenfibrome. Tübingen, 1898; 8°.

Naphtali (M.). I. Beiträge zur Friedel-Crafts'schen Reaction. II. Ueber Orthophenetidin und seine Derivate. Berlin, 1899; 8°.

Narraway (F. W.). Ueber die Reaction zwischen Bibromyden und alkoholischem Kali, insbesondere über das Decylen und seine Derivate. Heidelberg, 1899; 8°.

Osann (F.). Ueber die allgemeine Reaktion bei Kindern nach Jnjektionen mit Koch'scher Lymphe. Karlsruhe; 8°.

Pip (W.). I. Ueber die electrische Leitfähigkeit einiger aromatischer Säuren. II. Ueber die Farbstoffbildung aus Diazobenzolsulfosäure und salzsaurem Monoäthyl-*p*-toluidin. Heidelberg, 1898; 8°.

Preuner (G.). Ueber die Bedeutung colloidaler Salze für den Färbeprozess. Heidelberg, 1898; 8°.

Quosig (K.). Ueber Gastrostomieen. Strassburg i. E., 1898; 8°.

Reinecke (E.). Ueber Polymerisation hydroaromatischer Ketone. Braunschweig, 1899; 8°.

Rösch (F.). Ueber die Irreduktibilität der partiellen Differentialgleichung $a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y)z = 0$. Heidelberg, 1899; 8°.

Roth (J.). Ueber die Variabilität der Gasbildung bei dem Bacterium Coli commune. Berlin, 1898; 8°.

Rovaart (H. van de). Ueber Bromderivate des as. *o*-Xylenols. Heidelberg, 1898; 8°.

Schieffer (H.). Beitrag zur Kenntniss des Indens und des β-Hydrindons. Bonn, 1898; 8°.

Schmidt (O.). Zur Kenntnis der Einwirkung von Phosphorpentachlorid auf Salicylsäure. Heidelberg, 1898; 8°.

Schmitt (F.). Ueber Metalltrennungen in einem Chlorwasserstoffstrome. Heidelberg, 1899; 8°.

Schnitzspahn (K.). Ueber die Konstitution des Cyanwasserstoffsesquichlorhydrates und dessen synthetische Verwendung. Heidelberg, 1898; 8°.

Schwabacher (F.). Einwirkung von Monochloressigsäure auf Oxyazoverbindungen. Heidelberg, 1899; 8°.

Seckelson (E.). Bestimmung der Dimagnetisirungsconstante (Susceptibilität) einiger Metalle. Berlin, 1898; 8°.

Sello (H.). Mittheilungen über die ungewölnlichen Ausgänge und die Complicationen der genuinen fibrinösen Pneumonie. Berlin, 1898; 8°.

Sieglitz (G.). Ein Fall von augeborenem Tumor coccygeus. Heidelberg, 1899; 8°.

Smith (H. M.). Kryoskopische Untersuchungen. Heidelberg, 1898; 8°.

Sohn (K. B.). Untersuchungen über einige beiderseitig orthoständig substituirte Benzolderivate. Bonn, 1898; 8°.

Sondheimer (A.). Ueber: I. Indazole und Isindazole. II. Die Bildung eines achtgliedrigen Ringes. Heidelberg 1899; 8°.

Stang (A.). I. Ueber Citrylidenbisacetessigester. II. Beiträge zur kondensierenden Wirkung des Ammoniaks und der Amine. Heidelberg, 1898, 8°.

Stollé (R.). Studien mit Hydrazin. Heidelberg, 1899; 8°.

Sundheimer (H.). Ueber Polyphenylensulfid $(C_6H_4.S.C_6H_4.S)_4$. Heidelberg, 1899; 8°.

Vogt (H.). Ueber einen Fall von Weil'scher Krankheit. München, 1898; 8°.

Vogt (H.). Die Paralyse des Nervus facialis im Anschlusse an Otitis media acuta. S. a. l.; 8°.

Völtz (W.). Zur Kenntnis des Futterwertes der Abdeckereiprodukte (Kadavermehle). Berlin, 1899; 8°.

Voss (G. v.). Ueber die Schwankungen der geistigen Arbeitsleistung. Leipzig, 1898; 8°.

Wachs (C.). Ueber Anilidbildung. Leipzig, 1899; 8°.

Walker (A. J.). Ueber Konstitution und kryoskopisches Verhalten von *o*-Cyanphenolen. Heidelberg, 1899; 8°.

Wehr (O.). Ueber die Einwirkungsprodukte von Basen auf das Tribromid des Pseudocumenols. Heidelberg, 1899; 8°.

Weiss (R.). I. Zur Synthese hydroaromatischer Verbindungen. II. Beitrag zur Kenntnis des Benzamarons. Heidelberg, 1898; 8°.

Welde (R.). Zur Kenntniss des Bromhydrats des Dibromanhydro-*p*-oxypseudocumylalkohols und seiner Umwandlungsprodukte. Heidelberg, 1899; 8°.

Willms (F.). Ein Beitrag zur Ureterentransplantation. Heidelberg, 1898; 8°.

Wolf (F.). Weitgehende Besserungen bezw. Genesungen von Geisteskranken unter specieller Bezugnahme auf § 1569 bürgerlichen Gesetzbuches. Pforzheim, 1899; 8°.

Zinn (C.). Beitrag zur Kenntnis der Verbreitungsweise des Echinococcus multilocularis und der bei demeselben auftretenden Riesenzellen. Heidelberg, 1899; 8°.

Kestel (R. W. O.). Radiant Energy a Working Power in the Mechanism of the Universe. Port Adelaide, 1898; 8° (*dall'A.*).

Lussana (S.). Influenza della pressione sulla resistenza elettrica dei metalli. Pisa, 1899; 8° (*Id.*).

— Alessandro Volta e la pila nel secolo decimonono. Discorso. Siena, 1899; 8° (*Id.*).

Tommasina (T.). Sur la constatation de la fluorescence de l'aluminum et du magnésium dans l'eau et dans l'alcool sous l'action des courants de la bobine d'induction. Paris, 1899; 4° (*Id.*).

Vecchi (S.). Sulle figure complete determinate da un numero qualunque di punti o da un numero qualunque di tangenti di una conica e sulle loro correlative nello spazio. Parma, 1899; 4° (*dall'A.*).

— Saggio di un disegno polarimetrico. Parma, 1899; 4° (*Id.*).

** **Vinci** (Leonardo da). Il Codice Atlantico; fasc. XVII. Milano, 1899; 8°.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche

Dal 7 al 21 Gennaio 1900.

---

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Serie V. Classe di Sc. mor., stor. e filol., vol. VII. Notizie degli Scavi; agosto, 1899; 4°.

* **Bibliotheca** Indica: A Collection of Oriental Works published by the Asiatic Society of Bengal. New series, Nos. 931, 951-955. Calcutta, 1899; 8°.

Bulletin de l'Institut International de Statistique. T. XI. Première livr. Rome, 1899; 8°.

* **Catalogue** printed Books and Manuscripts in Sanskrit belonging to the Oriental Library of the Asiatic Society of Bengal. Fasc. I. Calcutta, 1899; 4°.

* **Consiglio** Comunale di Torino. Sedute dal 21 luglio al 29 dicembre 1899; dal N° XXII al XXXVI. Torino, 1889; 4°.

* **Notulen** van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenscappen. Deel XXXVII. Afl. 3. Batavia, 1899; 8°.

** **Raccolta** ufficiale delle Leggi e dei Decreti del Regno d'Italia. 1899; 8°.

Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Anno XVI, quad. 6-12. Valle di Pompei, 1899; 8°.

Statistica dei Monti di Pietà nell'anno 1896. Roma, 1899; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

* **Tijdschrift** voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen etc.; Deel XLI, Aflev. 5, 6; XLI, Batavia, 1899; 8°.

Valle di Pompei; Anno IX. Maggio 1899; 8°.

** Dall'Università di Basilea:*

Bericht über das Gymnasium in Basel. Schuljahr 1898-1899. Basel, 1899; 4°.

Blocher (H.). Der gegenwärtige Stand der Hypothekar-Statistik. Basel, 1898; 8°.

Bruckner (W.). Charakteristik der germanischen Elemente im italienischen. Basel, 1899; 4°.

* **Catalogue** des Écrits académiques suisses 1898-93. Basel, 1899; 8°.

Fueter (E.). Der Anteil der Eidgenossenschaft an der Wahl Karls V. Basel, 1899; 8°.

Kretzschmer (W.). Ueber den Richard Cantillon zugeschriebenen " Essai sur la nature du commerce en général " mit besonderer Berücksichtigung der Lehren von Otto Effertz. Liestal, 1899; 8°.

Oeri (A.). De Herodoti fonte Delphico. Basileae, 1899; 8°.

Overbeck (F.). Die Bischofslisten und die apostolische Nachfolge in der Kirchengeschichte des Eusebius. Basel, 1898; 4°.

Personal-Verzeichnis der Universität Basel für das Wintersemester 1898/99. Sommersemester 1899. Basel, 1899; 8°.

Verzeichnis der Vorlesungen and der Universität Basel im Sommer-Semester 1899; Winter-Semester 1899-1900. Basel, 1899; 4°.

* *Dall'Università di Heidelberg:*

Anzeige der Vorlesungen, welche in Sommer-Halbjahr 1899; Winter-Halbjahr 1899-1900 aus der Grossh. Badischen Ruprecht-Karls-Universität zu Heidelberg gehalten werden sollen. 1899; 8°.

Buttenwieser (E. C.). Studien über die Verfasserschaft des Andreas. Heidelberg, 1899; 8°.

Cartellieri (A.). Philipp August und Graf Philipp von Flandern 1180-1186. Leipzig, 1899; 8°.

Denio (E. H.). Nicolas Poussins Leben und Werke. Leipzig, 1898; 8°.

Ginzberg (L.). Die Haggada bei den Kirchenvätern. Amsterdam, 1899; 8°.

Goldschmidt (S.). Die Landarbeiter in der Provinz Sachsen sowie den Herzogtümern Braunschweig und Anhalt, dargestellt nach den Erhebungen des Evangelisch-Sozialen Kongresses. Tübingen, 1899; 8°.

Grunenberg (A.). Die Landarbeiter in den Provinzen Schleswig-Holstein und Hannover östlich der Weser, sowie in dem Gebiete des Fürstentums Lübeck und der freien Städte Bremen, Hamburg und Lübeck. Tübingen, 1899; 8°.

Hatschek (J.). Die Selbstverwaltung in politischer und juristicher Bedeutung. Leipzig, 1898; 8°.

Hoff (H. P.). Die Passionsdarstellungen Albrecht Dürers. Heidelberg, 1898; 8°.

Hohenemser (P.). Kritik der Quellen zur Schlacht bei Hochkirch (14 Oktober 1758). Frankfurt A. M., 1899; 8°.

Jager (J.). Zur Kritik von Amyots Uebersetzung der Moralia Plutarchs. Bühl, 1899; 8°.

Krasinski (A.). Geschichtliche Darstellung der Bauern-Verhältnisse in Polen und der wirthschaftlich-rechtlichen Reformen im ersten Decennium der Regierung Stanislaus Augustus (1764-1774). I e II Teil. Krakau, 1898. 2 fasc.; 8°.

Küffner (G. M.). Die Deutschen im Sprichwort. Ludwigshafen am Rhein, 1899; 8°.

Marriage (M. E.). Poetische Beziehungen des Menschen zur Pflanzen- und Tierwelt im heutigen Volkslied auf hochdeutschem Boden. Bonn, 1898; 8°.

Marx (N.). Die Tabaksteuer und die Entwicklung der Tabakbesteuerung in Deutschland. Mannheim, 1898; 8°.

Moriz-Eichborn (K.). Der Skulpturencyklus in der Vorhalle des Münsters zu Freiburg im Breisgau. Strassburg, 1898; 8°.

Oliver (T. E.). Jacques Milet's Drama, " *La Destruction de Troye la Grant* ,. Its Principal Source; — Its Dramatic Structure. Heidelberg, 1899; 8°.

Popp (J.). Die Metrik und Rhythmik Thomas Murners. Halle a. S., 1898; 8°.

Rabbiner (Z.). Beiträge zur hebræischen Synonymik in Talmud und Midrasch. Berlin, 1899; 8°.

Scheibe (A. F.). Die séance royale vom 23 Juni 1789. Eine kritische Studie. Berlin, 1899; 8°.

Schlesing (E.). Der Verhältnis zwischen Leidenschaften und Freiheit in der Lehre des Spinoza. Heidelberg, 1899; 8°.

Schweitzer (H.). Die mittelalterlichen Grabdenkmäler mit figürlichen Darstellungen in den Neckargegenden von Heidelberg bis Heilbronn. Strassburg, 1898; 8°.

Sexauer (H.). Der Sprachgebrauch des Romanschriftstellers Achilles Tatius. Karlsruhe, 1899; 8°.

Somborn (A.). Die Elfenbein- und Beinschnitzerei unter besonderer Berücksichtigung ihrer Lage in Erbach i. O. und in Geislingen a. Steig. Heidelberg, 1899; 8°.

Urban (E.). Owenus und die deutschen Epigrammatiker des XVII. Jahrhunderts. Berlin, 1899; 8°.

Walther (M.). Malory's Einfluss auf Spenser's Faerie Queene. Eisleben; 8°.

Weydmann (E.). Geschichte der ehemaligen gräflich sponheimischen Gebiete. Konstanz, 1899; 8°.

Wick (A.). Tobias in der dramatischen Literatur Deutschlands. Heidelberg, 1899; 8°.

Wielenga (B.). Spinozas " Cogitata Metaphysica „ als Anhang zu seiner Darstellung der cartesianischen Prinzipienlehre. Heidelberg, 1899; 8°.

Źmigrodzki (M. v.). Geschichte der Baukunst der Araber und der Bauweise der Mauren in Spanien. Krakau, 1899; 8°.

Bollack (L.). Grammaire abrégée de la Langue Bleue - Bolak - Langue internationale pratique. Paris, 1899; 8° (*dall'A.*).

Carle (G.). Provvedimenti di polizia ferroviaria riguardanti i ritardi dei treni. Discorso pronunziato in Senato nella tornata del 18 dicembre 1899. Roma, 1899; 8° (*Id.*).

Halbherr (F.). Lavori eseguiti in Creta dalla Missione archeologica italiana

dal 9 giugno al 9 novembre 1899. Roma, 1899; 8° (*dal Prof. Luigi Pigorini, Presidente della Scuola Archeologica Italiana*).

Mestre (A.). Les personnes morales et le problème de leur responsabilité pénale. Paris, 1899; 8° (*dall'A.*).

Orano (G.). Note su la estensione della legge penale più mite alle condanne irrevocabili. 8° (*Id.*).

— Les récidivistes doivent-ils être soumis à un régime disciplinaire plus sévère que les condamnés qui subissent une première peine et en quoi cette aggravation du régime doit-elle consister? 8° (*Id.*).

** **Sanuto** (M.). I Diarii. T. LV, fasc. 233-236. Venezia, 1899; 4°.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Dal 14 al 28 Gennaio 1900.

---

* **Acta** Societatis scientiarum Fennicae. T. XXIV. Helsingforsiae, 1899; 4°.

* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. Entrega VI, T. XLVIII. Buenos Aires, 1899; 8°.

* **Anales** del Museo Nacional de Montevideo, t. II, fasc. 12. 1899; 4°.

* **Annales** de la Faculté des Sciences de Toulouse. Deuxième série, T. I, 2°, 3° fasc. (1899). Toulouse; 4°.

Annali delle Università toscane. T. XXII. Pisa, 1899; 4°.

Annuario storico meteorologico italiano, redatto dal P. Giuseppe Boffito barnabita. Vol. II, 1899. Torino, 1900; 8°.

Atti del Collegio degli Ingegneri e degli Architetti nella provincia di Novara. Vol. I. Anni 1898-1899. Novara, 1899; 8°.

* **Bidrag** till Kännedom af Finlands Natur och Folck. Utgifina Finska Vetenskaps- Societen, n. 57. Helsingfors, 1898; 8°.

Bollettino quindicinale della Società degli Agricoltori italiani. Anno IV (1899), n. 14-24. Roma; 8°.

* **Bulletin** de la Société d'études scientifiques d'Angers. XXVIII° année, 1898. Angers, 1899; 8°.

* **Bulletin** de la Société géologique de France. 3° série, XXVII, 1899. N. 1-2. Paris, 1899; 8°.

* **Bulletin** de la Société Mathématique de France. T. XXVII, fasc. 4. Paris, 1899; 8°.

* **Bulletin** de la Société des Sciences naturelles de l'Ouest de la France. T. IX, 2me et 3me trim. 1899. Nantes; 8°.

* **Bulletin** du Muséum d'histoire naturelle. Année 1899, Nos 4-5. Paris, 1899; 8°.

* **Bulletin** of the Illinois State Laboratory of Natural history. Vol. V, Art. IX. Urbana, Illn., 1899; 8°.
* **Denkschriften** der medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena; vol. VI, 3 Lief. Jena, 1899; 4°.
* **Field Columbian** Museum. Botanical series. Vol. I, No. 5. Chicago, 1899; 8°.
* **Földtani** Közlöny kiadja a Magyarhoni Földtani Társulat. Vol. XIX, n. 5-7. Budapest, 1899; 8°.
* **Giornale** della R. Accademia di Medicina. A. LXII, n. 12. Torino, 1899; 8°.
* **Journal** of Morphology. Edited by C. O. Whitman, ...with the co-operation of Ed. Ph. Allis. XV, No. 3. Boston, 1899; 8°.
* **Journal** of the Linnean Society. Zoology, vol. XXVII, No. 177. London, 1899; 8°.
* **List** of Linnean Society of London, 1899-900. London, 1899; 8°.
* **Mémoires** de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier: Section des sciences, 2° sér., t. II, n. 5. Section de Médecine, 2° série, t. 1r, n. 2, 3. Montpellier, 1899; 8°.
* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LX, No. 2. London, 1899; 8°.
* **Proceedings** of the Cambridge philosophical Society. Vol. X, Part IV. Cambridge, 1900; 8°.
* **Proceedings** of the Royal Irish Academy. Ser. II, vol. IV, Nos. 1-5. Dublin, 1884-1886.
* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXV, No. 422. London, 1900; 8°.
* **Rendiconto** dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. Ser. 3a, vol. V, fasc. 8° a 12°. Napoli, 1899; 8°.

Report of the Superintendent of the U. S. Naval Observatory for the ending June 30, 1899. Washington, 1899; 8°.

* **Rivista** mensile del Club alpino italiano. Vol. XVII, n. 7-12. Torino, 1899; 8°.
* **Stazioni** sperimentali agrarie italiane. Vol. XXXI, fasc. 3-6. Modena, 1899; 8°.

** **Verhandlungen** der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 1, Nr. 8-15. 1899; 8°.

* *Dall' Università di Basilea:*

Betsch (G.). Ueber Paradiaminochinon. Basel, 1899; 8°.

Bierbrauer (K.). Ueber Verbindungen der Oxalsäure und ihrer Alkalisalze mit Arsen-, Antimon- und Wismuttrioxyd. Berlin, 1898; 8°.

Bollag (M.). Ueber den Einfluss der Witterung auf Morbidität und Mortalität der Diphtherie. Bern, 1899; 4°.

Braun (A.). I. Weitere Untersuchungen über die Bildung von Indazolen. II. Ueber einige Derivate des Acetophenons. Basel, 1899; 8°.

Burri (R.). Wirkung subconjunctivaler Kochsalzinjectionen bei Chorioiditis in macula. Berlin, 1899; 8°.

Elmiger (J.). Ist die progressive Paralyse eine specifische Erkrankung des centralen Nervensystems? Zürich, 1899; 8°.

Feilmam (E.). Beiträge zur Kenntnis der Metabrom-β-phenylhydroxylamins. Basel, 1898; 8°.

Föhrenbach (W.). Ueber Condensationen von Aminen, Phenolen und Alkoholen mit Dinitrometadichlorbenzol. Basel, 1899; 8°.

Frank-Kamenetzky (A.). Bromide des Isopentans. Karlsruhe, 1899; 8°.

Geese (W.). Ueber die Oxydationsprodukte des Dichinoyltetroxims und einige Derivate des Tetraamidophenols. Braunschweig, 1898; 8°.

Gerngross (L.). Ueber die Einwirkung von Cuminol auf Benzylidenanilin und von Benzaldehyd auf Cumylidenanilin bei Gengenwart von Cyankalium. München, 1899; 8°.

Gresheintz (A.). Ueber die Beziehungen der Hypsistaphylie zur Leptoprosopie. Berlin, 1898; 8°.

Haag (H.). Ueber Gesichtsschädelform, Aetiologie und Therapie der angebornen Choanalatresie. Berlin, 1899; 8°.

Hagmann (G.). Die diluviale Wirbeltierfauna von Vöklinshofen (Ober-Elsass). Strassburg, 1899; 8°.

Heberlein (K. B.). Beiträge zur Kenntnis des Tellur's. Strassburg, 1898; 8°.

Immermann (F.). Ueber Doppeleier beim Huhn. Basel, 1899; 8°.

Isler (J.). Ueber Glioma retinae. Basel, 1899; 8°.

Köhler (R.). Untersuchungen über die α-Phenyl-*p*-Methylcinchoninsäure sowie α-Methyl-*p*-Methylcinchoninsäure und deren Derivate. Basel, 1898; 8°.

Kollegorsky (W.). Ueber Abkömmlinge des Benzylidenmethylamins. Basel, 1899; 8°.

Koller (A.). Ein Fall von Situs viscerum inversus totalis und seine Deutung. Basel, 1899; 8°.

Krafft (A.). Ueber Vinylessigsäure. Basel, 1899; 8°.

Kries (O.). Die Entwicklung und Rückbildung des Corpus luteum spurium beim Menschen. Berlin, 1899; 8°.

Kuhn (J.). Beiträge zur klinischen Thorakographie. Stuttgart, 1899; 4°.

Labhardt (A.). Ueber traumatische Tuberculosen in der Chirurgie. Aarau, 1899; 8°.

Meisser (B.). Chamaeprosopie. Ein aetiologisches Moment für manifeste Ozaena (Rhinitis atrophica fœtida). Berlin, 1898; 8°.

Noerr (W.). I. Die Einwirkung von Chlormonoxyd auf Benzol. II. Ueber die Einwirkung von Bromcyan und Aluminiumchlorid auf Benzolkohlenwasserstoffe und von Bromcyan allein auf Dimethyl- und Diaethylanilin. München, 1899; 8°.

Polis (P.). Die Strömungen der Luft in den barometrischen Minima und Maxima, ein Beitrag zur Theorie der Cyklonen und Anticyklonen. Hamburg, 1899; 4°.

Pourtalés (A. de). Untersuchungen über die puerperale Wundinfection. Berlin, 1898; 8°.

Pröscher (F.). Ein Beitrag zur Erforschung der Constitution des Eiweissmoleküls. Darmstadt, 1899; 8°.

Röser (P.). Zur Kenntnis des Pleistocän im südlichen Schwarzwald. Basel, 1899; 8°.

Ruedi (T.). Anatomisch-physiologische Befunde bei Mikrotie mit Atresia auris congenita. Wiesbaden, 1899; 8°.

Samtleben (A.). Zur Kenntnis einiger Perhaloïde. Leipzig, 1899; 8°.

Schrader (W.). Ueber zwei neue Nitrotoluidin-Sulfosäuren und einige Derivate derselben. Braunschweig, 1898; 8°.

Schwendener (B.). Untersuchungen über Chondrodystrophia Fœtalis. Schaffhausen, 1899; 8°.

Senn (G.). Ueber einige coloniebildende einzellige Algen. Basel, 1899; 4°.

Surbeck (G.). Die Molluskenfauna des Vierwaldstättersees. Genève, 1899; 8°.

Tobler (T.). Experimentelle Untersuchungen ueber die Wirkung der hinteren Scleròtomie. Wiesbaden, 1898; 8°.

Troller (J.). Ueber Stichkanalinfektionen bei Hautnähten und ihre Beziehungen zur Art des Nahtmaterials. Tübingen, 1898; 8°.

Weil (A. O.). Zur Kenntnis des Pinakolinnitrimins. Strassburg i/E., 1898; 8°.

Weiss (R.). Ueber die Bakterienflora der sauern Gährung einiger Nahrungs- und Genussmittel. Karlsruhe, 1899; 8°.

Weltert (J.). 23 Fälle von Antrumempyem mit consecutiver Orbitalphlegmone. Zürich, 1899; 8°.

Weth (R.). Ueber eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Differentialgleichung. Zurich, 1899; 4°.

Wikander (E. Hjalmar). Beiträge zur Kenntnis der Jodoso-Jodo- und Jodoniumverbindungen des *m*-Jodnitrobenzols und des *m*-Jodacetanilids. Freiburg i. Br., 1899; 8°.

Böckh (H.). Die geologischen Verhältnisse der Umgebung von Nagy-Maros. Budapest, 1899; 8° (*dall'A.*).

Cauchy (A.). Œuvres complètes, publiées sous la direction de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction Publique. IIe série, T. VI. Paris, 1899; 4° (*dono del Governo francese*).

Rossetti (G.). La scienza pratica ossia la vera sorgente della febbre, della tubercolosi, del tifo ecc. Torino, 1899; 8° (*dall'A.*).

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 21 Gennaio al 4 Febbraio 1900.

* **Annales** du Musée Guimet.
Revue de l'Histoire des Religions. Tome XXXIX, Nos. 1, 2. Paris, 1899; 8°.

* **Annales** du Midi. Revue archéologique, historique et philologique de la France méridionale, N. 42, 43. Toulouse, 1899; 8° (*dall'Università di Tolosa*).

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Classe di Scienze morali, storiche e filolog.; serie V, vol. VII. Notizie degli Scavi: settembre 1899. Roma; 4°.

* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. LIX, disp 2ª Venezia, 1900; 8°.

* **Berichte** über die Verhandlungen der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (Philolog.-hist. Classe), 1899, IV. Leipzig, 1899; 8°.

* **Boletin** de la Real Academia de la historia; t. XXXVI, cuad. I. Madrid, 1899; 8°.

* **Bulletin** de la Société d'Études des Hautes-Alpes. 18ème année, IIe série, N. 30, 31. Gap, 1899; 8°.

* **Bulletin** de la Société de Géographie, etc.; 7me série, t. XX, 4e trim. 1899. Paris, 1899; 8°.

Calendario del Santuario di Pompei per l'anno 1900. Valle di Pompei; 16°.

* **Comptes-rendus** de l'Académie des Sciences de Cracovie, octobre-novembre 1899; 8°.

* **Comptes-rendus** des séances de la Société de Géographie; Nos. 5-7, mai-décembre 1899. Paris; 8°.

* **Géographie** (La). Bulletin de la Société de Géographie. N. 1, 15 Janvier, 1900. Paris; 8°.

Inventaire sommaire des Archives Départementales antérieures à 1790.

Eure. Archives civiles. Sér. E. Evreux, 1899.

Hautes-Alpes. Tome 5ème, Sér. H. Tome 1er. Hospices de Briançon, d'Embrun et de Gap. Gap, 1899.

Haute-Vienne. Archives civiles, Sér. B. Tome I. Sénéchaussées de Bellac, Le Dorat, Saint-Yrieix. Limoges, 1899: 3 vol. in-4° (*dal Governo della Rep. Francese*).

* **Mémoires** de la section des lettres de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier. 2ème série, t. II, n. 2. Montpellier, 1899; 8°.

* **Mémoires** de l'Académie de Stanislas. 5me série, t. XVI. Nancy, 1899; 8°.

** **Monumenta Germaniae historica.** Epistolarum tomi V, pars posterior Karolini aevi III. Berolini, 1899; 4°.

* **Transactions** of the Royal Society of Literature, 2d series. Vol. XXI, Part II. London, 1899: 8°.

* **Vjestnik** kr. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskog Zemaljskog Arkiva. Godina II. Svezak 1. Zagreb, 1900; 8°.

Amryc (C.). Pantheism, the light and hope of modern reason. Copyrighted, 1898; 8° (*dal sig. C. Mayo di Chicago*).

Cipolla (C.). Pubblicazioni sulla storia medioevale italiana (1896). Venezia, 1899; 8° (*dall'A.*).

De Feis (L.). Le antichità di Cipro ed i fratelli Luigi ed Alessandro Palma di Cesnola. Roma, 1890; 8° (*Id.*).

Fraccaroli (G.). Il metodo critico del Prof. Girolamo Vitelli. Torino, 1899; 8° (*Id.*).

Gambarotta (G.). L'adulterio e la teorica dei diritti necessarî. Torino, 1898; 8° (*dall'A. per il premio di filosofia Gautieri*).

Gizzi (G. G.). Sensazione, sentimento, emozione, commozione, affetto e passione. Firenze, 1899; 8° (*Id.*).

— Il fenomeno di sostituzione, contributo alla teoria della conoscenza. Roma, 1899; 8° (*Id.*).

Hess (B.). Poging tot Misdriif volgens het italiaansche Recht. Groningen 1898; 8° (*dall'A.*).

Villa (G.). La Psicologia contemporanea. Torino, 1899; 8° (*Id.*).

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Dal 28 Gennaio all'11 Febbraio 1900.

---

* **Abhandlungen** der mathem.-physischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. XXV, N. 6, 7. Leipzig, 1900; 8°.

Abhandlungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. I Bd. 1-5 Heft. Wien, 1899; 8°.

* **Annales** des Mines. 9^{me} série, t. XVI, livrs. 9 10. Paris, 1899; 8°.

* **Annuario** della R. Accademia dei Lincei, 1900. Roma; 16°.

* **Atti** della Società toscana di Scienze naturali. Processi verbali. Vol. XI, adunanza del 2 luglio 1899; XII, adunanza del 19 novembre 1899. Pisa, 1899-1900; 8°.

Bollettino della Associazione " *Mathesis* „ fra gl'Insegnanti di Matematica delle Scuole Medie. Anno IV, n. 2-4. Torino, 1899-900; 8°.

* **Buletinul** Societații de Sciințe din Bucuresci-Romania. Anul VIII. No. 6. Bucuresci, 1899; 8°.

* **Bulletin** mensuel de magnétisme terrestre de l'Observatoire Royal de Bruxelles par L. Niesten. Août 1899. Bruxelles; 16°.

* **Carte** géologique de la Suisse. Notice explicative de la feuille XVI 2de ed.) au 1 : 100.000 par E. Renevier et H. Schardt. Berne, 1899; 8° 1 fol. (*dalla Commissione geologica della Società elvetica di scienze naturali*).

* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. Bd. XXVIII, Heft 3. Berlin, 1900; 8°.

* **Jahrbuch** der k. k. geologischen Reichsanstalt zu Wien. Jahr. 1899, XLIX Bd., 3 Heft. Wien; 8°.

* **Journal** of the Chemical Society. Vol. 77 e 78. February, 1900. London; 8°.

* **Proceedings** of the Chemical Society of London. Vol. 16°. No. 217. London, 1900; 8°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Vol. XXXII, fasc. XIX e XX. Milano, 1900; 8°.

Revue de Mathématique publiée par G. Peano. Tomo VI. Torino, 1896-99; 8° (*dal Socio G. Peano*).

* **Sitzungsberichte** der k. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 19 October XXXIX (21 December), LIII. Berlin, 1898; 8°.

* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt. N. 11-16, 1899. Wien; 8°.

* **Журналъ** русскаго физико-химическаго Общества при Императорскомъ С. Петербургскомъ Университетѣ; t. XXXI, n. 8. 1899; 8°.

Fatio (V.). Faune des Vertébrés de la Suisse. Vol. II. Histoire naturelle des Oiseaux. 1ère partie. Genève et Bâle, 1899; 8° (*dall'A.*).

Guarini-Foresio (E.). Transmission de l'électricité sans fil. 2me édit. Liège, 1900; 8° (*Id.*).

Helmert (F. R.). Neuere Fortschritte in der Erkenntnis der mathematischen Erdgestalt. Leipzig, 1900; 8° (*Id.*).

Penzig (O.). Flora popolare Ligure. Primo contributo allo studio dei nomi volgari delle piante in Liguria. Genova, 1897; 8°.

— Onoranze a Marcello Malpighi. Genova, 1898; 8°.

— Anallospora, nuovo genere di tuberculariee. Genova, 1898; 8°.

— Prodotti vegetali del mercato di Breitenzorg (Giava). Genova, 1898; 8°.

— Ueber javanische Phalloideen. Leide, 1898; 8°.

— Sopra una nuova specie di Prosopis dell'America meridionale. Genova, 1899; 8° (*Id.*).

Penzig (O.) et **Saccardo** (P. A.). Diagnoses Fungorum novorum in insula Java collectorum. Series prima et secunda. Genova, 1897; 2 fasc. 8° (*da O. Penzig*).

Pirotta (R.) e **Albini** (A.). Osservazioni sulla biologia del tartufo giallo (Terfezia Leonis Tul.). Rouen, 1900; 8° (*dal Socio Pirotta*).

Rosenbusch (H.). Studien im Gneissgebirge des Schwarzwaldes. Heidelberg, 1899; 8° (*dall'A.*).

Romiti (G.). Necrologia di Giovanni Zoia. Firenze, 1900; 8°.

— Sull'anatomia dell'utero gravido. Firenze, 1900; 8°.

— Sul distacco della placenta nella donna. Pisa, 1899; 8° (*Id.*).

Ruffini (F. P.). Linee radicali e punti radicali. Bologna, 1900; 8° (*Id.*).

Sars (G. O.). An account of the Crustacea of Norway. Vol. III. Cumacea. Part I et II, Cumidae, Lampropidae (part). Bergen, 1899; 8° (*dal Museo di Bergen, Norvegia*).

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche

Dal 4 al 18 Febbraio 1900.

* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (Philolog.-Hist. Classe), 1899, V; 8°.

Relazione sull'amministrazione delle Gabelle per l'esercizio 1898-99. Roma, 1900; 4° (*dal Ministero delle Finanze*).

Boffito (G.). Perchè fu condannato al fuoco l'astrologo Cecco d'Ascoli. Roma, 1900; 4° (*dall'A.*).

Boselli (P.). Risposta del Ministro del Tesoro (P. Boselli) all'interpellanza dell'on. Senatore P. Vacchelli. Roma, 1900; 8° (*Id.*).

Cosentini (F.). La sociologia e G. B. Vico. Savona, 1899; 8° (*dall'A. per il premio di Filosofia Gautieri*).

Gentile (G.). Rosmini e Gioberti. Pisa, 1898; 8° (*Id.*).

Marre (A.). Heureux son sort! [Canzone musicata]. Paris, f° (*dall'A.*).

** **Mazzatinti** (G.). Inventari dei manoscritti delle biblioteche d'Italia. Vol. IX. Forlì, 1899; 8°.

Morando (G.). Corso elementare di Filosofia. Milano, 1898-99, 3 vol.; 8° (*dall'A. per il premio di Filosofia Gautieri*).

Paoli (A.). La Scuola di Galileo nella Storia della filosofia. Pisa, 1899; 4° (*Id.*).

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Dall'11 al 25 Febbraio 1900.

* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. Entr. 1ª, t. XLIX. Buenos Aires, 1900; 8°.

Anuario del Observatorio astronomico nacional de Tacubaya para el año de 1900. Año XX. Mexico, 1899; 8°.

Atti del Collegio degli ingegneri e degli architetti in Palermo, 1899, luglio-dicembre. Palermo; 8°.

* **Atti** dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Anno LIII, sessione 1ª. Roma, 1900; 4°.

Bollettino dei Musei di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Torino. Vol. XIV, 1899, n. 354-366. Torino; 8°.

Bulletin de la Société Philomatique de Paris, 1898-1899, N. 3; (1899); 8°.

Comunicaciones del Museo Nacional de Buenos Aires. Tomo I, n. 5. Buenos Aires, 1899, 8° (*dal Direttore del Museo Dr. Prof.* C. Berg).

** **Erläuterungen** zur geologischen Specialkarte von Preussen und den Thuringischen Staaten. Lief. 67. No. 31-33, 37-39. Berlin, 1899. Testo in-8° e Atl. in-f°.

Giornale di scienze naturali ed economiche pubblicato per cura della Società di Scienze naturali ed economiche di Palermo. Vol. XXII, 1899. Palermo; 4°.

* **Memoirs** of the Royal Society of South Australia. Vol. I, Part I. Adelaide, 1899; 4°.

* **Memorie** della Pontificia Accad. dei Nuovi Lincei. Vol. XV, XVI. Roma, 1897-98; 4°.

* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXVI, No. 424. London, 1900; 8°.

* **Quarterly** Journal of Geological Society. Vol. LVI, Part. 1. No. 221. London, 1900; 8°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Vol. XXXIII, fasc. 1°. Milano, 1900; 8°.

Report of the Sixty-Ninth Meeting of the British Association for the advancement of Science, held at Dover in September 1899. London, 1900; 8°.

* **Transactions** of the R. Society of South Australia. Vol. XXIII, Part 1ª, 2ª. Adelaide, 1899; 8°.

* **Transactions** of the Manchester Geological Society. Vol. XXVI, Nos. X-XII. Manchester, 1900; 8°.

Sars (G. O.). An account of the Crustacea of Norway. Vol. III. Cumacea. Part III et IV, Cumidae, Lampropidae (part). Bergen, 1900; 8° (*dal Museo di Bergen, Norvegia*).

Tietze (F.). Contributo all'Acarologia d'Italia. Osservazioni sull'Acarofauna del litorale di Malamocco. Padova, 1899; 8° (*dall'A.*).

— Due crani scafoidei. Idee sulla scafocefalia. Padova, 1899 (*Id.*).

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 18 Febbraio al 4 Marzo 1900.

* **Abhandlungen** der philologisch-historischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft. Bd. XX, N. 1. Leipzig, 1900; 8°.

Annali di Statistica. Atti della Commissione per la statistica giudiziaria civile e penale. Sessione del dicembre 1898. Roma, 1899; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

* **Boletin** de la Real Academia de la Historia. T. XXXVI, cuad. II. Madrid, 1900; 8°.

Bollettino di Legislazione e Statistica doganale e commerciale. Anno XVI, dall'aprile a tutto dicembre 1899. Roma, 1899; 8° (*dal Ministero delle Finanze*).

* **Commentari** dell'Ateneo di Brescia per l'anno 1899. Brescia, 1899; 8°.

* **Géographie** (La). Bulletin de la Société de Géographie. N. 2, 15 février, 1900. Paris; 8°.

* **Mémoires** et **Documents** publiés par la Société Savoisienne d'Histoire et d'Archéologie, t. XXXVIII. Chambéry, 1899; 8°.

Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione, da maggio a dicembre 1899. Roma, 1899; 8° (*dal Ministero delle Finanze*).

* **Studi** e Documenti di storia e diritto. Anno XX, fasc. 3°, 4°. Roma, 1898; 4° (*dall'Accademia di Conferenze storico-giuridiche*).

* **Tijdschrift** voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen etc.; Deel XLII, Aflev. 1. Batavia, 1899; 8°.

Vorlese-Ordnung an der k. k. Leopold-Franzens-Universität zu Innsbruck im Sommer-Semester 1900; 8° (*dall'Università di Innsbruck*).

Ambrosi (L.). La psicologia dell'immaginazione nella storia della filosofia. Roma, 1898; 8°.

— Che cos'è la materia? Roma, 1899; 8° (*Inviati dall'A. per il premio di filosofia di Fondazione Gautieri*).

Colonna (F.). Scoperte di antichità in Napoli dal 1876 a tutto il 1897 con notizie delle scoperte anteriori ecc. Napoli, 1898; 8° (*dall'A.*).

Gerini (G. B.). Paolo Mattia Doria, filosofo e pedagogista. Asti, 1899; 8° (*Id.*).

Pulciano (L.). Relazione statistica sulla amministrazione della Giustizia nel distretto della Corte d'Appello di Torino nell'anno 1899. Torino, 1900; 8° (*dal Procuratore Generale del Re della Corte d'Appello di Torino*).

Zuccante (G.). Intorno alle origini della morale utilitaria dello Stuart Mill. Milano, 1897; 8°.

— Ancora intorno alle origini della morale utilitaria dello Stuart Mill. I precursori dello Stuart Mill in Inghilterra. Milano, 1898; 8°.

— La morale utilitaria dello Stuart Mill. Esposizione della dottrina. Milano, 1899; 8° (*dall'A.*).

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Dal 25 Febbraio all'11 Marzo 1900.

* **Abhandlungen** der mathem.-physischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. XXVI, N. 1. Leipzig, 1900; 8°.

* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-Phys. Classe, 1899. Mathem. Th. VI; Naturwissenschaftlicher Th.; Allgemeine Th. (51° Bd), 1899. Leipzig; 8°.

Boletin demográfico Argentino. Publicación de la Oficina Demográfica nacional. Año I. Agosto 1899. No. 1. Buenos Aires, 1899; 8°.

Boletin del Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya. Tom. II, n. 5. Mexico, 1899; 4°.

Boletin mensual del Observatorio Meteorológico Central de Mexico; marzo-agosto 1899. Mexico, 1899; 4°.

* **Bollettino** delle sedute dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania; fasc. LX (1899); 8°.

* **Bollettino** dei Musei di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università di Genova. N. 79-89. Genova, 1899; 8°.

Bollettino statistico mensile della Città di Milano. Anno XV, giugno-dicembre 1899; 4°.

* **Bollettino** demografico della Città di Torino. Anno XXVIII, n. 16-36, 1899; 4°.

Bulletin mensuel de Statistique Municipale de la ville de Buenos-Ayres. XIII° année, n. 6, 12; (1899); 4°.

* **Comptes-rendus** de l'Académie des Sciences de Cracovie. Décembre. Cracovie, 1899; 8°.

* **Contributions** to Canadian Palaeontology. Vol. IV. Part I. Ottawa, 1899; 8°.

* **Denkschriften** der medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. Bd. VIII. Liefg. V. Jena, 1900; 4°.

* **Giornale** della R. Accademia di Medicina. A. LXIII, n. 1. Torino, 1900; 8°.

* **Göteborgs** Kungl. Vetenskaps- och Vilterhets- Samhälles. Handlingar. Fjärde följden II. Göteborgs, 1899; 8°.

* **Journal** of the Chemical Society. Vols. LIII-LXXVI, (1888-1899); 77 e 78, fasc. di March, 1900. London; 8°.

* **Journal** ot the Microscopical Society, 1900, part 1. London; 8°.

* **Journal** of the College of Science Imperial University of Tōkyō Japan. Vol. XI, part IV. Tokio, 1899; 4°.

* **John Hopkins** University Circulars. Vol. XVIII, No. 141. Baltimore, 1899; 4°.

* **Memorie** della Società degli Spettroscopisti italiani. Vol. XXVIII, disp. 5ª-12ª (1899). Roma, 1899-1900; 4°.
* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LX, No. 3. London, 1900; 8°.
* **Observations** faites à l'Observatoire météorologique de l'Université Impériale de Mouscou. Décembre 1898, janvier-août 1899; 8°.
* **Observations** météorologiques suédoises publiées par l'Acad. R. des Sciences de Suède. Vol. 36 (1894). Stockholm, 1899; 4°.
* **Proceedings** of the Royal Physical Society. Session 1898-99. Edinburgh, 1900; 8°.
* **Proceedings** of the Chemical Society of London. Vol. 16°. No. 218-220. London, 1900; 8°.
* **Proceedings** of the R. Society. Vol. LXVI, No. 425. London, 1900; 8°.
* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Vol. XXXIII, fasc. 2-4. Milano, 1900; 8°.

Rendiconto dell'Ufficio d'Igiene della Città di Torino per l'anno 1899. N[i] 6-12 (anno XVIII). 1899; 4°.

** **Scientia.** Exposé et développement des Questions scientifiques à l'ordre du jour. N° 2-6.
  Le magnétisme du fer par CH. MAURIN.
  La Stéréochimie par P. FREUNDLER.
  Les Mouvements de roulement en dynamique par P. APPELL.
  Le phénomène de Zeeman par A. COTTON.
  Groupements cristallins par F. Wallerant. Paris, 1899; 8°.

* **Transactions** of the Kansas Academy of Science (1897-98). Vol. XVI. Topeka, 1899; 8°.

** **Verhandlungen** der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 2, Nr. 1-3. 1900; 8°.

* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt. N. 17-18. 1899. Wien; 8°.
* **Year-Book** of the Royal Society. 1900. No. 4. London; 8°.

Caracciolo (R.). L'evoluzione nella affinità chimica. Roma, 1900; 8° (*dall'A.*).

Koelliker (A.). Sur l'entrecroisement des pyramides chez les Marsupiaux et les Monotrèmes. Paris; 8° (*dall'A.*).

Schiaparelli (G. V.). Osservazioni astronomiche e fisiche sulla topografia e costituzione del pianeta Marte ecc. Memoria sesta. Roma, 1899; 8° (*Id.*).

Tommasina (T.). Sur la cristallisation métallique par transport électrique de certains métaux dans l'eau distillée. Paris, 1900; 8° (*dall'A.*).

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 4 al 18 Marzo 1900.

---

* **Annali** dell'Università di Perugia. Pubblicazioni periodiche della **Facoltà** di Giurisprudenza. N. S. Vol. VIII, fasc. 3°-4°; IX, 1°-3°. **Perugia**, 1898-99; 8°.

* **Annuario** della Società Reale di Napoli, 1900; 8°.

* **Atti** dell'Accademia Pontaniana. Vol. XXIX. Napoli, 1899; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Serie V. Classe di Sc. mor., stor. e filol., ser. V. vol. VII. Notizie degli Scavi: Ottobre 1899. Roma; 4°.

* **Atti** e **Memorie** della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in **Padova**. Anno CCCLVIII, 1898-99, N. S., vol. XV. Padova, 1899; 8°.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1899. XLII Bd. Wien, 1899; 8°.

* **Rendiconto** delle Tornate e dei Lavori dell'Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti della Società Reale di Napoli. N. S., Anno XIII, marzo-dicembre 1899. Napoli; 8°.

Bonanni (G.), Ortona resiste ai francesi, 1798-1799. Lanciano, 1900; 8° (*dall'A.*).

Boselli (P.), Sul bilancio dell'Entrata. Discorso del Ministro del Tesoro (P. Boselli) alla Camera dei Deputati nella tornata del 20 febbraio 1900. Roma, 1900; 8° *(Id.)*.

Franchi (F.), Notizie storiche e statistiche della Cassa di Risparmio di Torino dalla fondazione al 1900, ecc. Torino, 1900; in-f° *(dono della Cassa di Risparmio)*.

Martini (A.), Il metodo in generale: l'analisi e la sintesi. Ascoli Piceno, 1899; 8° (*dall'A. per il premio di filosofia di fondazione Gautieri*).

Paoli (G. C.), Fisiocosmos o saggio di una scienza universale della natura delle cose. Sassari, 1900; 2 vol. in-8° *(dall'A.)*.

Puccini (R.), Il progresso morale e le sue leggi. Siena, 1899; 8° (*Id.*).

Rossi (G.), La funzione storica dell'idealissimo morale nel pensiero moderno. Livorno, 1898; 8° *(Id.)*.

Sangiorgio (G.), I primi contorni di una storia commerciale del Mediterraneo. Roma, 1900; 8° (*dall'A.*).

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Dall'11 al 25 Marzo 1900.

---

* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. Entrega II, t. XLIX. Buenos Aires, 1900; 8°.
* **Annales** des Mines. 9me série, t. XVI, livr. 11me (1899). Paris; 8°.
* **Atti** dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Anno LIII, sess. II. Roma, 1900; 4°.
* **Atti** dell'Accademia Olimpica di Vicenza. Vol. XXX, XXXI, 1896-98; 8°.
* **Boletin** del Instituto Geológico de México. N. 12, El Real del Monte. México, 1899; 4°.
* **Bollettino** delle sedute dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania. 1899, fasc. XLI. Catania, 1900; 8°.
* **Bulletin** mensuel de magnétisme terrestre de l'Observatoire Royal de Bruxelles par L. Niesten. Septembre 1899; janvier 1900. Bruxelles, 1900; 16°.
* **Comptes-rendus** de l'Académie des Sciences de Cracovie. Janvier, 1900; 8°.
* **Jahrbuch** des Norvegischen meteorologischen Instituts für 1898. Christiania, 1899; 4°.
* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lett. Ser. II, vol. XXXIII, fasc. V. Milano, 1900; 8°.
* **Sitzungs-Berichte** der Physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg; 1899. Nr. 6, 7; 8°.
* **Verhandlungen** Physik.-medic. Gesellschaft zu Würzburg, N. F. XXXIII Bd. Nr. 2, 3. Würzburg, 1899-1900; 8°.

** **Xenia Orchidacea.** Beiträge zur Kenntnis der Orchideen von H. G. Reichenbach Filetc... Bd. III, Heft 10. Leipzig, 1900; 4°.

Albrecht (Th.). Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation am Schlusse des Jahres 1899. Berlin, 1900; 4° (*dall'A.*).

Cassani (P.). Parole commemorative in omaggio all'illustre prof. Senatore Eugenio Beltrami. Venezia, 1900; 8°.

Sergi (G.). Specie e varietà umane. Saggio di una sistematica antropologia ecc. Torino, 1900; 8° (*dall'A.*).

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 18 Marzo al 1° Aprile 1900.

** **Allgemeine** Deutsche Biographie. Bd. XLV, Lfg. 224-225. Leipzig, 1900; 8°.

* **Analecta** Bollandiana. T. XVIII, fasc. IV. Bruxelles, 1899; 8°.

* **Annales** de la Société d'Archéologie de Bruxelles. T. XIII, livs. III et IV. Bruxelles, 1899; 8°.

Annuario Accademico della R. Università degli studî di Siena per l'anno 1899-1900; 8°.

Annuario della R. Università degli studi di Torino per l'anno accademico 1899-1900. Torino, 1900; 8°.

Atti del Consiglio Provinciale di Torino. Anno 1899. Torino, 1900; 8°.

* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. LIX, disp. 3ª e 4ª. Venezia, 1900; 8°.

* **Bibliotheca** Hagiographica latina antiquae et mediae aetatis ediderunt Socii Bollandiani. Fasc. I-III, A—Iwius. Bruxelles, 1899; 8°.

* **Boletin** de la Real Academia de la Historia. T. XXXVI, cuad. III. Madrid, 1900; 8°.

* **Bollettino** della Società Umbra di Storia Patria. Anno VI, fasc. I. Perugia, 1900; 8°.

* **Consiglio** Comunale di Torino. Sessione straordinaria: gennaio-febbraio 1900. Torino; 4°.

Documente privitóre la Istoria Românilor. Vol. IX, part 2ª (1751-1796), Suppl. II, vol. III, fascíora (1641-1703). Bucuresci, 1899-1900; f° (*dal Ministero dell'Istruzione pubblica di Rumenia*).

* **Eranos.** Acta philologica Suecana. Edenda curavit Vilelmus Lundström. Vol. III, fasc. 4; IV, fasc. 1, 1899-1900. Upsaliae; 8°.

Fondazione Villari. Firenze, 1900; 8° (*dal Comitato promotore*).

* **Géographie** (La). Bulletin de la Société de Géographie. N. 3, 15 mars, 1900. Paris; 8°.

* **Transactions** of the Royal Society of Literature. 2. Series, vol. XXI, part II. London, 1900; 8°.

Bobba (M.). Verso l'ideale. Appello ai giovani. Torino, 1900 (*dall'Autrice*).

Hurmuzaki (L. de). Fragmente din istoria Romănilor. T. II. Traducere făcută de Joan Slavicĭ. Bucuresci, 1900; 8° (*dal Ministero dell'Istruzione pubblica di Rumenia*).

Jorga (N.). Acte et fragments relatifs à l'histoire des Roumains rassemblés dans les dépôts de manuscrit de l'Occident. I. Bucarest, 1895 (*Id.*).

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

Dal 25 Marzo all'8 Aprile 1900.

* **Abhandlungen** der mathem.-physischen Classe der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. XXVI, N. 2. Leipzig, 1909; 8°.

* **Archives** du Musée Teyler, série II, vol. VI, 4e partie. Haarlem, 1899; 8°.

* **Atti** della Società Italiana di scienze naturali, vol. XXXVIII, fasc. 4°. Milano, 1900; 8°.

* **Atti** della Società dei Naturalisti di Modena. Serie IV, vol. I, (1899). Modena, 1900; 8°.

* **Atti** del Reale Istituto d'Incoragg. di Napoli. 5a serie, vol. 1°. 1899; 4°.

* **Atti** della Società Veneto-Trentina di Scienze naturali residente in Padova. Serie II, vol. IV, fasc. 1°, anno 1899. Padova, 1900; 8°.

* **Atti** della Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino. A. XXXIII, fasc. 1°, 2°. 1899. Torino; 4°.

* **Boletin** del Instituto Geológico de México. N. 13, Geologia de los Alrededores de Orizaba ecc. México, 1899; 4°.

* **Bulletin** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXXIV; XXXV, Nos. 3-6. Cambridge, Mass., 1899; 8°.

* **Bulletin** de l'Académie Royale des sciences et des lettres de Danemark. 1899, No. 6; 1900, No. 1. Copenhague; 8°.

* **Compte-rendu** des travaux presenté à la 80me et 81me session de la Société Helvétique des sciences naturelles réunie à Engelberg les 13, 14 et 15 septembre 1897 (80me); — idem, réunie à Bern du 31 juillet au 3 août 1898 (81me). Genève, 1897-98; 8°.

** **Fortschritte** der Physik im Jahre 1898. Bd. LIV, 3 Abth. Braunschweig, 1900; 8°.

* **Giornale** della R. Accademia di Medicina. A. LXIII, n. 2. Torino, 1900; 8°.

* **Jahresbericht** der Ornithologischen Vereins München für 1897 und 1898. München, 1899; 8°.

* **Journal** of the Asiatic Society of Bengal. Vol. LXVIII, Part II, Natural science, Nos 2-3. Calcutta, 1899; 8°.

* **Memorias** y Revista de la Sociedad Científica " Antonio Alzate ". T. XII (1898-99), N. 9 y 10. Mexico; 8°.

* **Mitteilungen** der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1897, Nr. 1436-1450. Bern, 1898; 8°.

* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LX, Nos 4, 5. London, 1900; 8°.

* **Occasional** Papers of the California Academy of Sciences, VI. San Francisco, 1899; 8°.

Osservazioni meteorologiche eseguite nell'anno 1899, col riassunto composto sulle medesime da E. Pini. Milano, 1899; 4° (*dal R. Osserv. Astronomico di Brera*).

* **Proceedings** of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. XXXV, Nos 1-3. Boston, 1899; 8°.

* **Proceedings** of the Asiatic Society of Bengal. Nos VIII-XI (1900). Calcutta; 8°.

* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXVI, No. 426. London, 1900; 8°.

* **Proceedings** of the Chemical Society of London. Vol. XV, Nos 202-216 (January-December, 1899). Vol. XVI, No. 221. London, 1900; 8°.

* **Proceedings** of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. 1899. Part II. Philadelphia, 1899; 8°.

* **Proceedings** of the California Academy of Sciences. 3. Ser., Botany vol. I, Nos. 6-9; Geology I, Nos 5-6; Zoology I, Nos 11-12. San Francisco, 1898-1899; 8°.

* **Proceedings** of the United States National Museum. Vol. XXI. Washington, 1899; 8° (*dalla Smithsonian Institution*).

* **Rad** jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. Knjiga 141. Razredi Matematičko-prirodoslovni. 28. Zagrebu, 1899; 8°.

* **Rendiconto** dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. Serie 3ª, vol. VI, fasc. 1° e 2°. Napoli, 1900; 8°.

* **Rozprawy** Akademii Umiejętności wydział Matematyczno-Przyrodniczy. Ser. II, t. XIV, XVI. Krakowie, 1899; 8°.

* **Sitzungsberichte** der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1899. Heft III. München, 1900; 8°.

* **Transactions** of the Wisconsin Academy of sciences, arts, and lettres. Vol. XII, Part 1 (1898). Madison, Wisc.; 8°.

* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt. Sitzung. N. 1, 2, 1900. Wien; 8°.

* **Verhandlungen** der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft bei ihrer Versammlung zu Engelberg den 13. 14. und 15. September 1897. 80. Jahresversammlung. Luzern, 1898; 8°.

— — Versammlung zu Bern den 1. 2. und 3. August 1898. 81. Jahresversammlung. Bern, 1898; 8°.

Carruccio (A.). Per la inaugurazione della Società Zoologica italiana nella R. Università di Roma. Roma, 1900; 8° (*dall'A.*).

* **Cory** (Ch. B.). The Birds of Eastern North America-Water Birds (Part 1). Key to the families and species. Chicago, 1899; 4° (*dal Field Columbian Museum*).

Folgheraiter. Ricerche sulle cause delle azioni magnetiche locali in regioni giudicate per la costituzione geologica non perturbate. Roma, 1900; 8° (*dall'A.*).

Pirotta (R.) e **Longo** (B.). Osservazioni e ricerche sul *Cynomorium coccineum* L. Roma, 1900; 8° (*dal Socio corrisp. Pirotta*).

Righi (A.). Volta e la Pila. Milano, 1900; 8°.

— Sul fenomeno di Zeeman nel caso generale d'un raggio luminoso comunque inclinato sulla direzione della forza magnetica. Bologna, 1900; 8° (*dall'A.*)

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche

Dal 1° al 22 Aprile 1900.

Annali di Statistica. — Statistica industriale. Lombardia, Roma, 1900; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

Annali di Statistica. — Statistica industriale. Fasc. VI, A. Notizie sulle condizioni industriali della provincia di Lucca (2ª ed.). Ser. IV, n. 13 *bis*. Roma, 1900; 8° (*Id.*).

Anuario Estadístico de la República Oriental del Uruguay. Año 1898. Montevideo, 1900; 8° (*dalla Direccion General de Estadística de la Rep.*).

Assemblea Generale ordinaria della Società Anonima Canavese per la strada ferrata Torino-Ciriè-Lanzo, 31 marzo 1900. Torino; 8°.

* **Atti** della R. Accademia della Crusca. Adunanza pubblica del dì 7 gennaio 1900. Firenze; 8°.

* **Atti** della Società Ligure di Storia patria. Vol. IX, fasc. 3 e 4. Genova, 1877-78; 8°.

** **Bibliotheca** Philologica Classica. Vol. XXVI, 1899. Trimestre quartum. Lipsiae, 1899; 8°.

Campagne del Principe Eugenio di Savoia. Vol. XII, XIII e XIV e Atlanti. Torino, 1898-1900; 3 vol. in-8° e 3 Atl. in-f° (*Dono di* S. M. il Re d'Italia).

* **Géographie** (La). Bulletin de la Société de Géographie. N. 4. 15 avril. Paris, 1900; 8°.

Geschichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Im Autrage der Akademie Bearbeitet von Adolf Harnak. Berlin, 1900; 3 vol. divisi in 4; in-8° (*dono della R. Accad. delle Scienze di Berlino*).

Indice sommario delle serie dei documenti del R. Archivio di Stato in Siena al 1° gennaio 1900. Siena, 1900; 8° (*dal Dirett. del R. Archivio*).

* **Jugoslavenska Akademija** Znanosti i Umjetnosti. Monumenta historico-juridica Slavorum meridionalium. Vol. VII, Sveska I; Rad, Knjiga 140; Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika..... Svezak 19. Gradja za povjest književnosti hrvatske. Kńiga 2; Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena, Svezak IV., 2. Polovina. Zagrebu, 1899; 8°.

* **Memorie** del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Classe di lettere, scienze storiche e morali. Vol. XXI, fasc. 2°. Milano, 1900; 4°.

* **Rivista Ligure** di scienze, lettere ed arti. Organo della Società di letture e conversazioni scientifiche. Anno XXII, fasc. 1. Genova, 1900; 8°.

* **Rozprawy** Akademii Umiejętności wydziat Filologiczny. Ser. II, t. XIV. Historyczno-Filozoficzny. Ser. II, t. XII, XIII. Krakowie, 1899; 8°.

* **Sitzungsberichte** der philosophisch-philologischen und der historischen

Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München, 1899. Bd. II, Heft II, III. München, 1900; 8°.

Tabella indicante i valori delle merci nell'anno 1899 per le statistiche commerciali. Roma, 1900; 8° (*dal Ministero delle Finanze*).

* **Tridentum.** Rivista mensile di studi scientifici. Anno III, fasc. 1°. Trento, 1900; 8°.

Amelli (D. A.). Paolo Diacono, Carlo Magno e Paolino d'Aquileja in un epigramma inedito intorno al canto Gregoriano e Ambrosiano estratto da un codice di Montecassino. Montecassino, 1899; 4° (*dall'A.*).

** **Baglioni** (B.). La personalità umana teoricamente e socialmente considerata ecc. Perugia, 1898; 8°.

Billia (L. M.). Max Muller e la scienza del pensiero. Venezia, 1890; 8°.

— Della legge suprema dell'educazione e di alcune applicazioni di essa. Torino, 1891; 8°.

— Sul principio di divisione della scienza dell'educazione. Alessandria, 1892; 8°.

— Difendiamo la famiglia. Saggio contro il divorzio e specialmente contro la proposta di introdurlo in Italia. Torino, 1893; 8°.

— Il divorzio in Italia. Conferenza. Parma, 1894; 8°.

— La logica di Antonio Rosmini e un suo critico recente. Osservazioni. Parma, 1894; 8°.

— La storia della Chiesa. Parma, 1894; 8°.

— La crisi del positivismo. Parma, 1895; 8°.

— Cesare Cantù, la sua opera, il suo carattere. Milano, 1895; 8°.

— L'unità dello scibile e la filosofia della morale. Prelezione. Torino, 1896; 8°.

— Lo Stato al suo posto, ossia delle opinioni di Raffaele Mariano intorno all'Economia politica e alla libertà. Milano, 1896; 8°.

— Che cosa è l'educazione. Torino, 1896; 8°.

— Il carattere morale di Antonio Rosmini. Milano, 1897; 4°.

— Sull'ipotesi dell'evoluzione. Torino, 1897; 8°.

— Lezioni di filosofia della morale. Torino, 1897; 8°.

— Perchè il dazio sul grano? Conferenza. Torino, 1899; 8°.

— Sulle dottrine psicofisiche di Platone. Modena, 1898; 8°.

— L'Esiglio di S. Agostino. Note sulle contraddizioni di un sistema di filosofia per decreto. Torino, 1899; 8°.

— La religione nell'educazione. Discorso. Torino, 1900; 8°.

— L'objet de la connaissance humaine; réponse à quelques critiques. Paris, 1900; 8°.

— Ernesto Naville ed il libero arbitrio. Torino, 1900; 8°.

— Un moralista americano. Milano; 8°.

— Filosofia di Max Müller nelle più recenti sue letture sulla scienza del linguaggio. Milano; 8° (*dall'A.*).

Comparetti (D.). Iscrizione arcaica del Foro romano. Firenze-Roma, 1900; 4° (*dall'A.*).

Credaro (L.). La pedagogia di G. F. Herbart. Roma, 1900; 8° (*dall'A.*).
** **Mieskowsky** (A. v.). Neuestes Russisch-Deutsches Taschenwörterbuch etc. Leipzig; 32°.
Pasolini (P. D.). Caterina Sforza. Roma, 1893. 3 vol. 8° (*dall'A.*).
— Caterina Sforza. Nuovi documenti. Bologna, 1897; 8° (*Id.*).
Paulus Diaconus. Ars Donati quam Paulus Diaconus exposuit nunc primum ex cod. Vaticano Palatino 1746 Monachi Archicoenobij Montis Casini in lucem proferunt. Montis Casini, 1899; 4° (*dall'Archivio della Badia*).
** **Vidari** (G.). Rosmini e Spencer. Studio espositivo-critico di filosofia morale. Milano, 1899; 8°.
** — L'etica di Guglielmo Wundt. Studio espositivo-critico. Sondrio, 1899; 8°.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Dall'8 al 29 Aprile 1900.

---

* **Abhandlungen** herausg. von der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft. XX Bd., 2 Heft; XXVI, 1 Heft. Frankfurt a. M., 1899; 4°.
* **Annali** della R. Accad. d'Agricoltura di Torino, vol. 42°. Torino, 1900; 8°.
* **Atti** dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Anno LIII, (1899-1900), sess. III. Roma, 1900; 4°.
* **Atti** della R. Accademia dei Fisiocritici in Siena. Serie IV, vol. XI, n. 4-10 (1899); XII, n. 1 (1900). Siena; 8°.
* **Bericht** über die Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt am Mein, 1899; 8°.
* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-Phys. Classe. 1900, I. Leipzig; 8°.

Boletin demográfico argentino. Año I, Enero 1900, n. II. Buenos Aires, 1900; 4° (*dal Ministero dell'Interno della Repubblica Argentina*).

* **Bollettino** del R. Orto Botanico di Palermo. Anno III, fasc. I-IV. Palermo, 1899; 8°.
* **Buletinul** Societatii de Sciințe din Bucuresci-Romania. Anul IX. No. 1. Bucuresci, 1900; 8°.
* **Bulletin** of the American Mathematical Society. 2nd Ser., Vol. V; VI, Nos. 1-6. Lancaster, Pa., and New York, 1898-1900; 8°.
* **Bulletin** mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. XXXI, an. 1899; 4°.
* **Bulletin** of the Illinois State Laboratory of Natural history. Vol. V, Art. X. Urbana, Illn., 1900; 8°.
* **Bulletin** of the Philosophical Society of Washington. Vol. 12 (1892-1894). Washington, 1895; 8°.

* **Charter**, Order of Court, Constitution and By-Laws and List of Members of the New York Academy of Sciences. 1899; 8°.

* **Field Columbian Museum.** Zoology Series. Vol. I, Nos. 16-17. Chicago, U. S. A., 1899; 8°.

* **Giornale** della R. Accademia di Medicina. A. LXIII, n. 3. Torino, 1900; 8°.

* **Journal** of Morphology. Edited by C. O. Whitman, ...with the co-operation of Ed. Ph. Allis. Vol. XV, Suppl. Boston, 1899; 8°.

* **Journal** of the Chemical Society. Vol. 77 e 78. April, 1900. London; 8°.

* **List** (A) of the Officers and Fellows of the Chemical Society. London, 1900; 8°.

* **Memoirs** of Geological Survey of India. Palaeontologica Indica, Ser. XV, vol. I, Part 2. New Series. Vol. I: 1. The Cambrian Fauna of the Eastern Salt-Rauge by K. Redlich; 2. Notes on the Morphology of the Pelecypoda. Calcutta, 1899; 4°.

* **Memoirs** of the Geological Survey of India. Vol. XXVIII, Part 1. Calcutta, 1898; 8°.

* **Memoirs** of the Museum of Comparative Zoology at Harward College. Vol. XXIII, No. 2; XXIV Text and Plates; 2 vol. Cambridge U. S. A., 1899; 4°.

* **Memorie** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matematiche e naturali. XVIII, fasc. IX. Milano, 1900; 4°.

* **Memorias** y Revista de la Sociedad Científica " Antonio Alzate ". T. XII (1898-99), N. 11 y 12. Mexico; 8°.

* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LX, No. 6. London, 1900; 8°.

* **Proceedings** of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. XXXV, Nos. 4-7. Boston, 1899; 8°.

* **Proceedings** of the Boston Society of Natural history. Vol. XXIX, Nos. 1-8. Boston, 1899; 8°.

* **Proceedings** of the Royal Society. LXVI. Nos. 427, 428. London, 1900; 8°.

* **Proceedings** of the Chemical Society of London. Vol. 16°. No. 222. London, 1900; 8°.

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Vol. XXXIII, fasc. 6°-8°. Milano, 1900; 8°.

* **Rendiconti** del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XIV, fasc. I e II (1900). Palermo; 8°.

Results of observations of the fixed stars made with the meridian cercle made with the Madras unter the direction of the late N. R. Pogson by C. M Smith. Vol. IX. General Catalogue. Madras, 1899; 4°.

* **Smithsonian Institution.**

Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1173. Index to the literature of Zirconium, by A. C. Langmuir, and Ch. Barkerville. Washington City, 1899; 8°.

* **The International competition** for the Phoebe A. Hearst architectural plan for the University of California. S. l. d. in 4° obl. (*dall'Università di California*).

* **Transactions** of the American Mathematical Society. Vol. I, No. 1. January, 1900. Lancaster, Pa., and New York, 1900; 4°.

* **Transactions** of the American Philosophical Society held at Philadelphia. Vol. XX, N. S., Part I, 1899; 4°.

** **Verhandlungen** der deutschen physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 2, Nr 4-7. 1899; 8°.

Veröffentlichung des K. preussischen geodätischen Institutes (Neue Folge, No. 1). Die Polhöhe von Potsdam; II Heft. Berlin, 1900; 4°.

* **Wissenschaftliche** Meersuntersuchungen herausg. von der Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchungen der deutschen Meere in Kiel und der biologischen Anstalt auf Helgoland. N. F. V Bd., Heft 1. Abt. Kiel. Kiel und Leipzig, 1899; 4°.

* **Журналъ** русскаго физико-химическаго Общества при Императорскомъ С. Петербургскомъ Университетѣ. Т. XXXII, n. 1. 1900; 8°.

---

* **Cory** (Ch. B.). The Birds of Eastern North America. Land Birds (Part II). Key to the families and species. Special edition. Chicago, Ill., 1899; 4° (*dal Field Columbian Museum*).

Klein (C.). Das Krystallpolymeter, ein Instrument für kristallographisch-optische Untersuchungen. Berlin, 1900; 8° (*dall'A.*).

** **Laurent** (H.). Élimination. Paris, 1900; 8°.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 22 Aprile al 6 Maggio 1900.

* **Annuario** della R. Università di Pisa per l'anno accademico 1899-1900. Pisa, 1900; 8°.

* **Annuario** del Ministero della Pubblica Istruzione, 1900. Roma; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Classe di Scienze morali, storiche e filolog., ser. V, vol. VII. Notizie degli Scavi: novembre 1899. Roma; 4°.

* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (Philolog.-hist. Classe), 1900, I. Leipzig; 8°.

* **Boletin** de la Real Academia de la historia; t. XXXVI, cuad. IV. Madrid, 1900; 8°.

* **Notulen** van den Algemeene en Directievergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXXVII. Afl. 1-2. Batavia, 1899; 8°.

Relatorio da Directoria do Gabinete portuguez de leitura no Rio de Janeiro. 1895-1898. Rio de Janeiro, 1899; 8°.

Resoconto della Cassa di Risparmio di Torino dell'anno 1899. Torino, 1900; 4°.

* **Rozprawy** Akademii Umiejętności wydzial filologiczny. Ser. II. Tomo VII. Krakowie, 1895; 8°.

* **Vjestnik** kr. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskog Zemaljskog Arkiva. Godina II. Svezak 2. Zagreb, 1900; 8°.

Anfosso (L.). La litigiosità in Italia, in Francia e nel Belgio. Studî e confronti. Torino, 1900; 8° (*dall'A.*).

— L'arte nei delinquenti. Messina, 1899; 8° (*Id.*).

Chijs (J. A. van der). Register op de Notulen der Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen over de Jaren 1889 t/m 1898. Batavia, 1899; 8° (*dalla Bataviaasch Genootschap van Kusten en Wetenschappen*).

— Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India. Anno 1672. Batavia, 1899; 8° (*Id.*).

Colenbrander (H. T.). Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India Anno 1636. S. Gravenhage, 1899; 8° (*dono del Departement van Koloniën*).

Corsi (A.). La questione finlandese in un libro recente. Roma, 1900; 8°.

— La conferenza diplomatica di La Aja e le onoranze ad Ugo Grozio. Pisa, 1900; 8° (*dall'A.*).

** **Nicolosi** (G.). La psicologia nel Monismo. Parte I. Vittoria (Sicilia). 1899; 8°.

Poggi (V.). L'atto di fondazione del Monastero di S. Quintino di Spigno. Torino, 1900; 8° (*Id.*).

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Dal 29 Aprile al 13 Maggio 1900.

* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. Entrega III, t. XLIX. Buenos Aires, 1900; 8°.

* **Annuario** del Circolo Matematico di Palermo. 1900; 8°.

* **Archives** Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société hollandaise des sciences à Harlem. Sér. II, t. III, 3° et 4° livr. La Haye, 1900; 8°.

Atti della Associazione elettrotecnica italiana sede centrale (Como, 18-23 settembre 1899). Vol. III, fasc. unico. Dicembre 1899. Milano, 1900; 8° (*dono della Presidenza dell'A. E. I.*).

* **Atti** dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Anno LIII, sess. IV. Roma, 1900; 4°.
* **Bollettino** mensuale della Società meteorologica italiana. Serie 2ª, v. XIX, n. 6-12. Torino, 1899-1900.
* **Bulletin** mensuel de magnétisme terrestre de l'Observatoire Royal de Bruxelles par L. Niesten. Octobre 1899-janvier 1900. Bruxelles, 1900; 16°.
* **Bulletin** de la Société Mathématique de France. T. XXVIII, fasc. 1°. Paris, 1900; 8°.
* **Journal** of the Chemical Society. Vol. 77 e 78. May, 1900. London; 8°.
* **Journal** of the Linnean Society. Zoology. Vol. XXVII, No. 178. London, 1900; 8°.
* **Journal** of the R. Microscopical Society, 1900, part 2. London; 8°.
* **Öfversigt** of Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar. Vol. 56, 1899. Stockholm, 1900; 8°.
* **Proceedings** of the Royal Irish Academy. Third Ser., vol. V, No. 4. Dublin, 1900.
* **Proceedings** of the Zoological Society of London for the year 1899. Part IV. London, 1900; 8°.

Relazione sui servizi d'Igiene e Sanità nel Comune di Milano nel biennio 1896-97 del Prof. Guido Bordoni-Uffreduzzi Medico Capo-Ufficiale Sanitario. Milano, 1899; 4° (*dal Municipio della Città di Milano*).

* **Relazione** sul progetto dell'acquidotto pugliese presentato dal R. Ufficio speciale del Genio Civile. Roma, 1900; 4°; Testo e tav. (*dal Ministero dei Lavori Pubblici*).
* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Ser. II, vol. XXXIII, fasc. 9°.

Transactions of the Manchester Geological Society. Vol. XXVI, Part XIII. 1899-1900: 8°.

* **Verhandlungen** der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 12, Heft 2 e Complemento. Basel, 1900; 8°.

Fiorini (M.). Proiezioni cartografiche cicloidali. Firenze, 1900; 8° (*dall'A.*).

Haeckel (E.). Intorno allo stato attuale delle nostre conoscenze sull'origine dell'uomo. Milano, 1899; 8°.

— Metagenesis und Hypogenesis von Aurelia Aurita. Jena, 1881; 4°.

— Kunst-Formen der Natur. 4 Liefg. Leipzig u. Wien, 1900; 4° (*dall'A.*).

Harlé (Ed.). Rochers creusés par des Colimaçons à Salies-du-Salat (Haute Garonne). Toulouse, 1900; 8° (*Id.*).

Lindman (C. A. M.). Vegetationen i Rio Grande do Sul (Sydbrasilien). Stockholm, 1900; 8° (*dalla R. Accademia delle scienze di Stoccolma*).

Noether (M.). Sophus Lie. Leipzig, 1900; 8° (*dall'A.*).

Romiti (G.). Di alcune particolarità fibrose e muscolari nella " fascia transversalis ", alcune delle quali notate ancora sul vivente. Roma, 1900; 8° (*Id.*).

Tommasina (Th.). Sur l'auto-decohération du charbon, et sur l'application de cette découverte aux appareils téléphoniques pour recevoir les signaux de la Télégraphie sans fils. Paris, 1900; 4° (*Id.*).

Vallot (J.) et **Vallot** (H.). Chemin de fer des Houches au sommet du Mont Blanc. Projet Saturnin Fabres. Études préliminaires et avant-projet. Paris, 1899; 4° (*dagli AA.*).

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche

Dal 6 al 20 Maggio 1900.

---

* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. LIX, disp. 5ª e 6ª. Venezia, 1900; 8°.

** **Calendario** generale del Regno d'Italia pel 1900. Roma; 8°.

* **Géographie** (La), Bulletin de la Société de Géographie. An. 1900. N. 5. 15 Mai. Paris; 8°.

** **Jahresberichte** der Geschichtswissenschaft im Auftrage der historischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben von E. Berner. XXI Jahrgang 1898. Berlin, 1900; 8°.

* **Nachrichten** von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Philologisch-historische Klasse, 1899, Heft 4. Göttingen, 1900; 8°.

Popolazione. Movimento dello Stato civile. Anno 1898. Roma, 1900; 8° (*dal Ministero di Agric., Ind. e Comm.*).

* **Rendiconto** delle Tornate e dei Lavori dell'Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti della Società Reale di Napoli. N. S., Anno XIV. Gennaio-aprile 1900. Napoli, 1900; 8°.

Statistica delle cause di morte nell'anno 1898. Roma, 1900; 8° (*Id.*).

* **Vjesnik** hrvatskoga Arheološkoga Družtva. Organ arheološkoga odjela narodnoga muzeja u Zagrebu. N. S. Sveska IV, 1899-1900. Zagrebu, 1900; 8°.

Ciardulli (O.). Gli epitalami e i versi fescennini di Claudio Claudiano. Ariano, 1900; 8° (*dono del Socio R. Renier*).

Consoli (S.). Il neologismo negli scritti di Plinio il giovane. Palermo, 1900; 8° (*dall'A.*).

Hildebrand (K.). Urkunder till Stockholms Historia med understöd af standes medel utgifna at K. Humanistiska Vetenskaps-Samfundet. I. Stockholms Stads Privilegiebref 1423-1700. Första Häftet. Upsala, 1900; 8° (*dalla R. Università di Upsala*).

Prever (G.). Ambiente sociale del Buddismo primitivo. Parte 1ª. Evoluzione delle caste. Savigliano, 1900; 8° (*dono del Socio R. Renier*).

Tagore (S. M.). Abhra, or a few notes on Talc, compiled and translated into English from various sanskrit Works. Calcutta, 1899; 8° (*dall'A.*).

— Our indian Horse: or a few notes on the animal, compiled and translated from the ancien medical and other Works of the Hindus. Calcutta, 1899; 16° (*Id.*).

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Dal 13 al 27 Maggio 1900.

* **Annales** des Mines. 9^{me} série, t. XVI, livr. 12^{e}, 1899; XVII, livr. 1^{e}, 1900. Paris; 8°.

* **Archives** Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société hollandaise des sciences à Harlem. Sér. II, t. III, 5^{e} livr. La Haye, 1900; 8°.

* **Atti** della R. Accademia economico-agraria dei Georgofili di Firenze, 4^{a} serie, vol. XXII, disp. 3^{a}-4^{a}, 1899; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Fisiocritici in Siena. Vol. XII, N. 2, 3. Siena, 1900; 8°.

* **Bollettino** della Società dei naturalisti in Napoli. Ser. I, vol. XIII, 1899. Napoli, 1900; 8°.

Bulletin (Treasury Department. Office of the Coast and Geodetic Survey). No. 40. Second edition. With additions and changes. Washington, 1900; 8°.

* **Földtani** Közlöny havi Folyóirat kiadja a Magyarhoni Földtani Társulat. Vol. XXIX, 1-4, 8-12 Füzet. Budapest, 1899; 8°.

* **Geological Survey of Canada.** Preliminary Report on the Klondike Gold Field Yukon district, Canada by R. G. McConnell. Ottawa, 1900; 8°. Descriptive note on the Sydney Coal Field Cape Breton, Nova Scotia to accompany a revised edition of the Geological Maps of the Coal Field etc. by Hugh Fletcher. Ottawa, 1900; 8°.

* **Mittheilungen** aus dem Jahrbuche der kön. ungar. geologischen Anstalt. XIII Bd., 2 Heft. Budapest, 1899; 8°.

* **Mittheilungen** aus der medicinischen Facultät der k. japanischen Universität zu Tokio. Bd. IV, No. VI. Tokio, 1899; 4°.

* **Nachrichten** von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physik. Klasse, 1899, Heft 3. Göttingen; 8°.

* **Proceedings** of the Royal Society. LXVI, No. 429. London, 1900; 8°.

* **Proceedings** of the Chemical Society of London. Vol. 16. No. 223. London, 1900; 8°.

* **Rendiconto** dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli. Serie 3^{a}, vol. VI, fasc. 3° e 4°. Napoli, 1900; 8°.

* **Schriften** der Physikalisch-Oekonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Pr., XL Jahrg., 1899. Königsberg; 4°.

* **Skrifter** utgifna af kongl. humanistika Vetenskaps-samfundet i Upsala. Band III (1892-1900), VI (1897). Upsala, 1897-1900; 8°.

* **Transactions** of the American Mathematical Society. Vol. I, No. 2. January, 1900. Lancaster, Pa., and New York, 1900; 4°.

* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt. Nos. 4, 5, 1900. Wien; 8°.

* **Журналъ** русскаго физико-химическаго Общества при Императорскомъ С. Петербургскомъ Университетѣ; t. XXXII, n. 2. 1900; 8°.

Philippi (R. A.). Las Tortugas chilenas. Santiago de Chile, 1899; 8°.

— Sobre las Serpientes de Chile. Santiago de Chile, 1899; 8° (*dall'A.*).

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 20 Maggio al 10 Giugno 1900.

---

* **Annales** du Midi. Revue archéologique, historique et philologique de la France méridionale, N. 44. Toulouse, 1899; 8° (*dall'Università di Tolosa*).

* **Annales** du Musée Guimet.
Revue de l'Histoire des Religions. Tome XXXIX, No. 3; XL, Nos. 1, 2. Paris, 1899; 8°.

* **Atti** della Reale Accademia lucchese di scienze, lettere ed arti. T. XXX. Lucca, 1900; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Serie V. Classe di Scienze morali, storiche e filolog.; vol. VII. Notizie degli Scavi: Dicembre 1899, Gennaio e Febbraio 1900. Roma; 4°.

* **Atti** della Commissione centrale permanente per l'esame preventivo delle domande di derivazione delle acque pubbliche istituita con R. Decreto 11 giugno 1899. An. 1899. Roma, 1900; 8° (*dal Ministero dei Lavori Pubblici*).

* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (Philolog.-hist. Classe), 1900, II. Leipzig; 8°.

** **Bibliographie** der deutschen Zeitschriften Litteratur. Bd. I-V (1896-99). Leipzig, 1899; 4°.

* **Bibliotheca** Indica: A Collection of Oriental Works published by the Asiatic Society of Bengal. New series, Nos. 950, 957-963. Calcutta, 1899; 8°.

* **Boletín** de la Real Academia de la Historia. Tomo XXXVI. Cuad. V. Madrid, 1900; 8°.

* **Catalogue** of printed Books and Manuscripts in Sanskrit belonging to the Oriental Library of the Asiatic Society of Bengal. Fasc. II. Calcutta, 1900; 4°.

** **Dictionnaire** bibliographique international des Folkloristes contemporains etc. Fasc. 1 à XI (Vol. I, 1ère partie). Paris; 8°.

** **Dictionnaire** bibliographique des membres des Sociétés savantes etc. Vol. I. Paris; 8°.

Documente privitóre la Istoria Românilor. Vol. XI (1517-1612). Bucuresci, 1900; f° (*dal Ministero dell'Istruzione pubblica di Rumenia*).

Esposizione-Fiera annuale in Torino. Relazione della Commissione provvisoria esecutiva. Torino, 1900; 4° obl.

* **Giornale** storico e letterario della Liguria diretto da Achille Neri e da Ubaldo Mazzini, n[i] 1-6. Spezia, 1900; 8°.

* **Hand Book** to the New York Public Library, Astor Lenox and Tilden Foundations. New York, 1900; 16°.

* **Mitteilungen** des Vereins für Erdkunde zu Leipzig, 1899. Leipzig, 1900; 8°.

* **Pubblicazioni** del R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di filosofia e filologia. Firenze, 1875-1899; 8°.

Amari (M.). Illustrazione di due iscrizioni arabiche.

Pullé (F. L.). L'Inno dell'Atarvaveda alla Terra.

Bartoli (A.). L'Evoluzione del Rinascimento.

Ugdulena (G.). Corso di letteratura greca.

Fossati (C.). Il tumulto dei Ciompi.

Comparetti (D.). Sull'autenticità dell'Epistola ovidiana di Saffo a Faone.

Vitelli (H.). In Hegesippi oratione de Halonneso.

Puini (C.). Enciclopedia Sinico-Giapponese.

Milani. (L. A.). Sei Tavolette cerate.

Vitelli (G.). Miscellanea.

— Intorno ad alcuni luoghi della Ifigenia in Aulide di Euripide.

Paoli (C.). Del Papiro specialmente considerato come materia che ha servito alla scrittura.

Milani (L. A.). Il Mito di Filottete nella letteratura classica e nell'arte figurata.

Chiappelli (A.). Della interpretazione panteistica di Platone.

Morosi (G.). L'invito di Eudossia a Genserico.

Scaduto (F.). Stato e Chiesa negli scritti politici.

Rondoni (G.). I più antichi frammenti del Costituto Fiorentino.

Del Vecchio (A.). Le seconde nozze del coniuge superstite.

Donati (G.). Maestri e scolari nell'India Brahmanica.

Tocco (F.). Le opere latine di Giordano Bruno.

Faggi (A.). La filosofia dell'incosciente, Metafisica e Morale.

Martinati (C.). Notizie storico-biografiche intorno al conte Baldassare Castiglioni.

Sabbadini (R.). Studi sul Panormita e sul Valla. — *Barozzi* (L.). Cronologia della Vita del Panormita e del Valla.

Casanova (E.). La carta nautica di Conte di Ottomanno Freducci d'Ancona.

Marzi (D.). La questione della riforma del Calendario nel quinto Concilio Lateranense (1512-1517).

Coli (E.). Il Paradiso terrestre dantesco.

Festa (M.). Theodori Ducae Lascaris Epistulae CCXVII.

Lemmi (F.). Nelson e Caracciolo e la Repubblica Napoletana (1799).

Gabrieli (G.). I Tempi, la Vita e il Canzoniere della poetessa araba al Hansa.

Salvemini (G.). Magnati e Popolani fiorentini dal 1280 al 1295.

* **Report** of the R. Society of Literature, and List of Fellows 1900. London; 8°.

* **Rivista Ligure** di scienze, lettere ed arti. Organo della Società di letture e conversazioni scientifiche. Anno XXII, fasc. 2. Genova, 1900; 8°.

Carle (G.). Sulle derivazioni di acque pubbliche, modificazioni ed aggiunte alla legge 10 agosto 1884. Discorsi pronunciati nelle tornate del 30 aprile e 1 e 2 maggio del Senato del Regno. Roma, 1900; 8° (*dall'A.*).

— Disposizioni contro i matrimoni illegali. Discorsi pronunziati in Senato nelle tornate dell'8, 11 e 12 maggio 1900. Roma, 1900; 8° (*Id.*).

Nadaillac (de). Les trépanations préhistoriques. Louvain, 1900; 8° (*Id.*).

Pascal (C.). Studi sugli scrittori latini. Torino, 1900; 8° (*Id.*).

Volante (A.). Amor di patria! Al Polo nord. Torino, 1900: 8° (*Id.*).

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Dal 27 Maggio al 17 Giugno 1900.

** **Abhandlungen** der k. Preussischen geologischen Landesanstalt. N. F., Heft 31 und Atl., 33. Berlin, 1900; 8°, 4°.

* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. Entrega IV, V, T. XLIX. Buenos Aires, 1900; 8°.

* **Annales** de la Faculté des Sciences de Marseille. T. X. Paris, 1900: 4°.

* **Annali** della Facoltà di Medicina dell'Università di Perugia e Memorie dell'Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. XI, fasc. 2°-4°. Perugia, 1899; 8°.

* **Anales** del Museo Nacional de Montevideo, t. II, fasc. 13. 1900; 4°.

Annales de l'Observatoire Nationale d'Athènes. Athènes, 1900; 4°.

Annuario della R. Scuola Navale Superiore di Genova. Anno scolastico 1899-1900; 8°.

* **Archives** du Musée Teyler, série II, vol. VI, 5e partie. Haarlem, 1900; 8°.

* **Atti** della Società Toscana di Scienze naturali. Processi verbali. Vol. XII, adunanza del 28 gennaio e 4 marzo 1900. Pisa, 1900; 8°.

* **Atti** della Società Italiana di scienze naturali, vol. XXXIX, fasc. 1-5. Milano, 1899; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Fisiocritici in Siena. Serie IV, vol. XII, n. 4 (1900). Siena; 8°.

* **Bergens** Museum Aarbog for 1899, 2det hefte. Bergen, 1899; 4°.

* **Bergens** Museum. Aarsberetning for 1899. Beretninger afgivne til generalforsamlingen den 6te marts 1900. Bergen, 1900; 8°.

* **Berichte** über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissensch. zu Leipzig. Mathem.-Physische Classe, 1900, II. Leipzig, 8°.

* **Bidrag** till Kännedom af Finlands Natur och Folck. Utgifina Finska Vetenskaps- Societen. N. 58. Helsingfors, 1900; 8°.

Boletim do Museu Paranense de historia natural e ethnographia. Vol. III. No. 1. Parà-Brazil, 1900; 8°.

Boletim mensal do Observatorio do Rio de Janeiro. Janeiro, Março, 1900; 8°.

Boletin mensual del Observatorio Meteorológico Central de Mexico; septiembre-octubre 1899. Mexico, 1900; 4°.

* **Bollettino** delle sedute dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania, 1900, fasc. LXII, LXIII. Catania, 1900; 8°.

Bollettino dell'Associazione " Mathesis " fra gl'Insegnanti di matematica, delle scuole medie. Anno IV, n. 5-6. Livorno, 1900; 8°.

Bollettino statistico mensile della Città di Milano. A. XVI, gennaio-maggio 1900; 4°.

* **Bollettino** del R. Comitato Geologico d'Italia. Anno 1899, n. 4. Roma, 8°.

Bollettino quindicinale della Società degli Agricoltori italiani. Anno V (1900), n. 1-12. Roma; 8°.

* **Bollettino** demografico della Città di Torino. Anno XXIX, n. 1-13, 1900; e Rendiconto dell'anno 1899 e dei mesi di Gennaio-Aprile 1900; 4°.

* **Buletinul** Societaţii de Sciinţe din Bucuresci-Romania. Anul IX. No. 1 şi 3. Bucuresci, 1900; 8°.

Bulletin mensuel de Statistique Municipale de la ville de Buenos-Ayres. XIVe année (1900), 1-4; 4°.

* **Bulletin** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXXV, No. 8. Cambridge, 1898; 8°.

* **Bulletin** of the American Mathematical Society. 2nd Ser. Vol. VI, No. 8, 9. Lancaster, Pa., and New-York, 1900; 8°.

Bulletin de la Société Philomatique de Paris. 9e série, t. I, n. 4, 1898 99. Paris; 8°.

* **Bulletin** de la Société Géologique de France. 3e série, t. XXVII, 1899. N. 4. Paris; 8°.

* **Bulletin** de l'Université de Toulouse. Fasc. 10. Toulouse, 1899; 8°.

* **Bulletin** de l'Académie Royale des sciences et des lettres de Danemark. 1899, No. 6; 1900, No. 2, 3. Copenhague; 8°.

* **Bulletin** of the Illinois State Laboratory of Natural history. Vol. V, Art. XI. Urbana, Illn., 1900; 8°.

Bulletin No. 12. U. S. Department of Agriculture... Legislation for te protection of Birds etc... by T. S. Palmer. Washington, 1900; 8°.

* **Comptes-rendus** de l'Académie des Sciences de Cracovie, février et mars, 1900; 8°.

Den Norske Nordhavs-Expedition, 1876-1878. XXVII. Zoologi: Polyzoa. Christiania, 1900 (*dono del Governo Norvegese*).

* **Geological** Literature added to the Geological Society's Library during the Year ended December 31st. 1899. London, 1900; 8°.

* **Giornale** della R. Accademia di Medicina. A. LXIII, n. 4. Torino, 1900; 8°.
* **Glasnik** hrvatskoga naravoslovnoga Drutštva. Godina XI, Broj 1-6. Zagreb, 1900; 8° (*Società historico-naturalis Croatica*).
* **Journal** of the Chemical Society. Vol. 77 e 78. June, July 1900. London; 8°.
* **Journal** of the R. Microscopical Society, 1900, part 3. London; 8°.
* **Kongligà-Svenska** Vetenskaps-Akademiens. Handlingar Ny Följd. Bd. 32. Stockholm, 1899-1900; 4°.
* **Magnetische** und Meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sterwarte zu Prag im Jahre 1899, 60. Jahrgang. Prag, 1900; 4°.
* **Mémoires** de l'Acad. Roy. des Sciences et des Lettres de Danemark. 6me sér. Sect. des Sciences, t. IX, n. 4-6. Copenhague, 1900; 4°.
* **Mémoires** de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 5e série, t. III, 2e cahier; V, 1r cahier et Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde, juin 1898-mai 1899. Bordeaux, 1899; 8°.
* **Memoirs** of the National Academy of Sciences. Vol. VIII [Fourth Memoir]. Washington, 1899; 4°.
* **Memorie** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matematiche e naturali. XVIII, fasc. X. Milano, 1900; 4°.
* **Memorie** della Società degli Spettroscopisti italiani. Vol. XXIX, disp. 1-3. Roma, 1900; 4°.
* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LX, No. 7. London, 1900; 8°.

North American Fauna. N° 17. Revision of American Voles of the genus Microtus by Vernon Bailey. Washington, 1900 (*dall'U. S. Department of Agriculture*).

Notizie Storiche e descrittive dei RR. Osservatorii di Catania e dell'Etna fino a tutto il 1899. Catania, 1900; 8°.

Observations made at the Royal magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Vol. XXI, 1898. A supplement to vol. XXI of the " Observations ". Batavia, 1899; f° (*Dono del Government of Netherlands India*).

* **Ofversigt** af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar, XLI, 1898-99. Helsingfors, 1900; 8°.
* **Proceedings** of the Zoological Society of London for the year 1900. Part I. London; 8°.
* **Proceedings** of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. XXXV. Nos. 8, 9. Boston, 1899; 8°.
* **Proceedings** of the Cambridge philosophical Society; vol. X, P. 5a, 1900.
* **Proceedings** of the Royal Society. Vol. LXVI, No. 430. London, 1900; 8°.
* **Proceedings** of the Chemical Society of London. Vol. 16°. No 224-226. London, 1900; 8°.
* **Procès-Verbaux** des Séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. An. 1898-99. Bordeaux; 8°.
* **Pubblicazioni** del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sez. di scienze fisiche e naturali. R. Osservatorio di Arcetri, fasc. 11, 12. Firenze, 1900; 8°.

* **Quarterly** Journal of the Geological Society. Vol. LVI, Part. 2, No. 222. London, 1900; 8°.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Twingtigste Jaargang. 1898. Batavia, 1899; 8° (*dal Governement of Netherlands India*).

* **Relazione** sull'andamento dei servizi dal 1° luglio 1898 al 31 dicembre 1899. Roma, 1900; 4° (*dal Ministero dei Lavori Pubblici*).

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Vol. XXXIII, fasc. 10°-13°. Milano, 1900; 8°.

* **Rendiconti** del Circolo matematico di Palermo. Tom. XIV, fasc. III e IV (1900). Palermo; 8°.

Report (Nineteenth Annual) of the United States Geological Survey to the Secretary of the Interior 1897-98. Ch. D. Walcott Director. Part II. Papers Chiefly of theoretic nature. Washington, 1899; 4°.

Report (Twentieth Annual) of the United States Geological Survey to the Secretary of the Interior 1898-99. Ch. D. Walcott Director. Part VI. Mineral resources of the United States, 1898. Metallic products, Coal, and Coke. Nonmetallic products, except Coal and Coke. Washington, 1899: 2 vol. 4°.

* **Report** (Annual) of the Board of Regents of the Smithsonian Institution etc..... June, 30, 1897. Report of the U. S. National Museum. Part 1. Washington, 1899; 8°.

* **Reports** from the Laboratory of the R. College of Physicians Edinburgh. Vol. VII. Edinburgh, 1900; 8°.

* **Rivista** mensile del Club alpino italiano. Vol. XIX, n. 1-5. Torino, 1900; 8°.

* **Sitzungsberichte** der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. I-XXII (11 Januar-19 April 1900). Berlin, 1900; 8°.

* **Sitzungsberichte** der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1900, Heft I; 8°.

Spelunca. Bulletin de la Société de Spéléologie. 4° année, T. V, n. 17-20. Paris, 1899; 8°.

* **Stazioni** sperimentali agrarie italiane. Vol. XXXIII, fasc. 1, 8. Modena, 1900; 8°.

* **Transactions** of the Cambridge philosophical Society. Vol. XVIII, XIX, Part I. Cambridge, 1900; 8°.

** **Verhandlungen** der deutschen physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 2, Nr 8, 9. 1900; 8°.

* **Verhandlungen** des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. N. F. VI Bd., 3 Heft. 1899; 8°.

* **Журналъ** русскаго физико-химическаго Общества при Императорскомъ С. Петербургскомъ Университетѣ. Т. XXXII, n. 3 (Journal de la Société physico-chimique russe). 1900; 8°.

Arcidiacono (S.). L'esplosione centrale dell'Etna il 19 luglio 1899. Modena, 1899; 8° (*dall'A.*).

— Sul periodo eruttivo dell'Etna dal 19 luglio al 5 agosto 1899. Catania, 1899: 4° (*Id.*).

Martini (T.). Nuove ricerche intorno al fenomeno del Pouillet. Venezia, 1900, 8°; (*Id.*).

Mascari (A.). Il cratere dell'Etna dopo l'esplosione del 19 e 25 luglio 1899. Modena, 1899 (*Id.*).

— Sulle protuberanze solari osservate al R. Osservatorio di Catania nell'anno 1899. Catania, 1900; 4° (*Id.*).

Mazzarella (U.). Una imagine del Globo solare per A. Schmidt. Catania, 1899; 4° (*dall'A.*).

— Sulle grandi protuberanze solari. Catania, 1900; 4° (*Id.*).

Raoult (F. M.). Tonométrie. Paris, 1900; 8°.

Reier (Ed.). Esperimenti di Geologia e di Geografia. Fasc. III, Rotture; fasc. IV, Metodi ed apparecchi. Traduz. sulla prima ediz. tedesca del Dr. Francesco Virgilio. Torino, 1900; 8° (*dono del traduttore*).

Riccò (A.). Osservazioni delle filanti della metà di novembre 1899, fatte al R. Osservatorio di Catania. Catania, 1899; 8° (*dall'A.*).

— Eclisse parziale di luna del 16-17 dicembre 1899; 4° (*Id.*).

— Terremoto Etneo del 14 maggio 1898. Modena, 1900; 8° (*Id.*).

Riccò (A.) e **Saija** (G.). Osservazioni di temperatura eseguite nel Jonio e nell'Adriatico dagli ufficiali del piroscafo "Aspromonte" durante l'annata agosto 1897-luglio 1898. Roma, 1900; 4° (*dagli AA.*).

Saija (G.). Sulle variazioni della rifrazione atmosferica. Catania, 1900; 4° (*dall'A.*).

Saija (G.) e **Tredia** (F.). Risultati delle osservazioni meteorologiche del 1899 fatte nel R. Osservatorio di Catania. Catania, 1900; 4° (*dagli AA.*).

Stiattesi (D. R.). Spoglio delle osservazioni sismiche dal 1° novembre 1898 al 3 ottobre 1899, fatte all'Osservatorio di Quarto (Firenze). Borgo S. Lorenzo, 1900; 8° (*dall'A.*).

Stossich (M.). Contributo allo studio degli Elminti. Trieste, 1900; 8° (*Id.*).

Tommasina (T.). Sur l'auto-décohération du charbon et sur l'application de cètte découverte aux appareils téléphoniques... Genève, 1900; 8° (*Id.*).

** **Vinci** (Leonardo da). Il Codice Atlantico; fasc. XVIII. Milano, 1900; f°.

Virgilio (F.). Geomorfogenia della prov. di Bari. Trani, 1900; f°.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Dal 10 al 24 Giugno 1900.

** **Allgemeine** Deutsche Biographie. Bd. XLVI, Lfg. 226. Leipzig, 1900; 8°.

* **Atti** della Reale Accademia dei Lincei. Serie V. Classe di scienze morali, storiche e filolog. Vol. VIII. Notizie degli scavi; marzo 1900. Roma; 4°.

* **Atti** del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. T. LIX, disp. 7ª. Venezia, 1900; 8°.

* **Berichte** über den der k. Sachsis. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Philol.-historisc. Classe. 1900, III. Leipzig; 8°.
* **Biblioteca** storica italiana pubblicata per cura della R. Deputazione di Storia Patria. V. Illustrazioni della spedizione in Oriente di Amedeo VI (Il Conte Verde) per F. Bollati di Saint-Pierre. Torino, 1900; 8°,

** **Bibliotheca** Philologica Classica. Vol. XXVII. 1900. Trimestre primum. Lipsiae, 1900; 8°.

* **Boletin** de la Real Academia de la Historia. T. XXXVI, cuad. VI, 1900. Madrid; 8°.

Bollettino di legislazione e statistica doganale e commerciale. Indice generale delle materie contenute nei dieci volumi dal 1894 al 1898. Roma, 1900; 8° (*dal Ministero delle Finanze*).

* **Bulletin** of the New York Public Library Astor Lonox and Tilden Foundations. Vol. IV. Nos. 1-5, 1900; 8°.

Bulletin de l'Institut International de Statistique. T. XI. Deuxième et dernière livr. Rome, 1899; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

Bulletin de la Société pour la conservation des monuments historiques d'Alsace. II sér., t. XX, livr. 1ère. Strassbourg, 1899; 8°.

* **Comptes-rendus** de l'Athénée Louisianais. 7me série. Tome I, livr. 2me. Nouvelle-Orléans, 1900; 8°.
* **Consiglio** Comunale di Torino. Sessione ordinaria e straordinaria 1900. Torino; 4°.
* **Géographie** (La). Bulletin de la Société de Géographie. N. 6, 15 juin 1900. Paris; 8°.
* **Mémoires** de l'Académie des sciences et des lettres de Danemark. 6me série, Section des lettres, t. VI, n. 1. Copenhague, 1900; 4°.

Memorias do Museu Paraense de Historia Natural e Ethnographia. I. Excavações archeologicas em 1895... 1a Parte. Parà-Brazil, 1900; 4°.

Preisschriften gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. H. Schurtz, Das afrikanische Gewerbe (Nr. XXII d. hist.-nat.-ökr. Sect.). Leipzig, 1900; 8°.

* **Publications** de l'École de Lettres d'Alger. Bulletin de Correspondance Africaine. T. XVI. Études sur les langues du Haut-Zambèze etc. par É. Jacottet; XXIII, La domination espagnole à Oran sous le gouvernement du comte D'Alcandete 1534-1538 etc....., par P. Ruff. Paris, 1899-1900; 8°.

Report (Fifth Annual). The John Crerar library. For the Year 1899. Chicago, 1900; 8°.

Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Anno XVII; quad. 1-6. Valle di Pompei, 1900; 8°.

Sanskrit Critical Journal of the Oriental Nobility Institute; Vol. XXVIII, Nos. 10-12, 1899. Woking, England; 8°.

* **Sitzungsberichte** der philosophisch-philologischen und der historischen Classe der k. b. Akad. der Wissens. zu München. 1899, II Bd. Heft IV; 1900, Heft I. München, 1900; 8°.

Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione, dal 1° gennaio al 31 maggio 1900. Roma, 5 fasc.; 8° (*dal Ministero delle Finanze*).

Statistica degli scioperi avvenuti nell'Industria e nell'Agricoltura durante l'anno 1898. Roma, 1900; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

* **Tridentum.** Rivista mensile di studi scientifici. Anno III, fasc. II. Trento, 1900; 8°.

Valle di Pompei. Anno X. Maggio, 1900; 8°.

Maltese (F.). Pro Patria. Vittoria (Sicilia), 1900; 8° (*dall'A.*).

Allievi (Tito). Scene. Torino, 1900; 8° (*dall'A. per il premio di Letteratura Gautieri*).

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Novembre 1899.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'OVIDIO, MOSSO, CAMERANO, SEGRE, PEANO, VOLTERRA, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA e NACCARI Segretario.

Il Presidente dà il benvenuto ai Soci ed invita il Segretario a leggere l'atto verbale dell'ultima seduta. Questo viene letto ed approvato.

Il Presidente comunica la morte del Socio straniero BUNSEN, e ne ricorda brevemente i grandi meriti scientifici. Egli cita in ispecie gli studi sulla serie del cacodile e sopra la composizione dei gas emessi dai Geysers di Islanda, l'invenzione di metodi eudiometrici e calorimetrici, le analisi d'acque minerali, gli studi di ottica chimica fatti col Roscoe e finalmente i classici lavori di analisi spettrale fatti col Kirchhoff.

Il Socio SEGRE presenta a nome del Prof. PASCAL di Pavia due opere, delle quali il Prof. Pascal medesimo è autore. L'una è la parte seconda del *Repertorio di matematiche superiori*, l'altra

è la traduzione tedesca del *Calcolo delle variazioni*. Rispetto alla prima di queste opere il Socio SEGRE mette in luce la grande copia di cognizioni relative alle diverse parti della Geometria, che vengono fornite da quel Repertorio e lo renderanno utilissimo agli studiosi.

Il Segretario presenta le opere seguenti inviate da Soci:

Die Welträthsel, Bonn, 1899, del Socio straniero HAECKEL.

Sfere terrestri e celesti di autore italiano oppure fatte e conservate in Italia, Roma, 1899, del Socio corrispondente FIORINI.

Sull'assorbimento della luce per parte di un gas posto nel campo magnetico, del Socio corrispondente RIGHI.

Elementi di Fisica, vol. 1°, parte II, Firenze, 1899; del Socio corrispondente RÒITI.

Vorlesungen über Theorie der Turbinen, del Socio corrispondente ZEUNER.

Il Segretario comunica che il Comitato internazionale per un Congresso di Fisica da tenersi in Parigi nell'agosto 1900 invitò l'Accademia a prendere in considerazione tale Congresso e a dar notizia dell'intervento dei Soci qualora questo sia probabile.

Il Presidente legge la commemorazione del Socio corrispondente FRIEDEL, della quale era stato incaricato in una seduta precedente.

Il Socio SEGRE presenta una nota del sig. Carlo ROSATI, *Sulle superficie di Veronese e di Steiner*, e un'altra del Dott. Beppo LEVI, *Sulla trasformazione dell'intorno di un punto per una corrispondenza birazionale fra due spazi*.

Il Socio VOLTERRA presenta una nota del sig. Domenico DE FRANCESCO, *Sul moto spontaneo d'un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante*, e un'altra del Dr. E. ALMANSI, *Sulla torsione dei cilindri cavi a spessore piccolissimo*.

Il Socio PEANO presenta una nota del Prof. Mathias LERCH di Fribourg intitolata: *Nouvelles formules pour la différentiation d'une certaine classe de séries trigonométriques*.

Il Socio PARONA presenta due note, l'una del Prof. Federico SACCO, *Sull' età di alcuni terreni terziarii dell'Appennino*, l'altra del sig. CAPEDER intitolata: *Contribuzione allo studio degli entomostraci pliocenici del Piemonte e della Liguria.*

Tutte queste note verranno pubblicate negli *Atti*.

Il Socio NACCARI presenta una memoria: *Sulle anomalie termiche dei climi di Torino, Milano e Venezia.* La Classe delibera con votazione segreta che questa memoria venga inserita nei volumi accademici.

LETTURE

CARLO FRIEDEL

Commemorazione letta dal Socio ALFONSO COSSA.

Ben a ragione la Classe delle Scienze fisiche e matematiche della nostra Accademia fu dolorosamente commossa all'annunzio della morte, che nel giorno 20 aprile 1899 ci tolse inaspettatamente Carlo Friedel, il quale fino dall'anno 1882 era annoverato tra i suoi soci corrispondenti. La perdita che abbiamo fatto è veramente grave, perchè per la vastità del campo in cui si è esercitato il moltiforme suo ingegno e per la straordinaria attività colla quale attese tanto a ricerche originali, quanto all'insegnamento nella cattedra e nel laboratorio, Friedel deve essere considerato tra gli scienziati più eminenti del nostro tempo.

Nato a Strasburgo il 12 marzo 1832, dopo aver compiuti gli studi nella patria Università, dove ebbe la fortuna di poter udire le lezioni di Pasteur, Daubrée e Bertin, nel 1852 Friedel passò a Parigi e vi seguì i corsi del Collegio di Francia. — Sulla proposta di Sénarmont nel 1856 fu aggregato alla Scuola delle miniere come Conservatore della Collezione mineralogica, ma pur attendendo al diligente disimpegno di questa carica frequentò come allievo il laboratorio di Wurtz, di cui divenne ben presto il prediletto collaboratore. — Da Sénarmont apprese Friedel i buoni metodi di ricerca e la larghezza di vedute nello studio della mineralogia; Wurtz lo iniziò a quelle ricerche di chimica organica, che lo distinsero tra i chimici contemporanei. — Nel 1876 occupò la cattedra di mineralogia alla Facoltà di

Scienze resa libera per la morte di Delafosse, e la tenne fino all'anno 1884, in cui successe al suo maestro Wurtz in quella di chimica organica. — Ma Friedel fino a pochi mesi prima della sua morte conservò sempre l'amore agli studi mineralogici, avvicendandoli assiduamente con le ricerche di chimica organica, e con tale risultato da renderci dubbiosi se il suo nome debba essere annoverato tra quelli dei chimici o non piuttosto dei mineralisti più insigni.

Nel primo ventennio della sua carriera scientifica (1856-1876) Friedel soleva lavorare di preferenza in un piccolo laboratorio privato, che gli fu concesso presso la collezione di mineralogia della scuola delle miniere. Fu là che io ebbi la fortuna di vederlo per la prima volta e di contrarre con lui una cordiale amicizia della quale mi terrò sempre onorato e riconoscente. — Attendeva egli allora ad una di quelle ricerche di sintesi dei composti del carbonio che contribuirono maggiormente a procacciargli fama di chimico eminente. Mi offersi di preparargli del cloruro anidro di glucinio, perchè potesse sperimentare se questo composto agisse nello stesso modo del cloruro di alluminio. Il risultato fu negativo, ma esso contribuisce a differenziare i due metalli ed a mantenere il glucinio nel posto che gli fu assegnato nella classificazione di Mendelejeff. — Questo piccolo servizio mi fu compensato alcuni anni dopo a misura di carbone, poichè Friedel volle occuparsi dell'esame cristallografico dei molibdati di didimio e di piombo da me preparati (1) e confermò così l'isomorfismo di alcuni composti dei metalli della cerite, con quelli omologhi di metalli divalenti; isomorfismo preventivamente accertato nei tungstati degli stessi metalli per le determinazioni delle forme cristalline eseguite da Q. Sella, e che unitamente ai risultati delle determinazioni della caloricità specifica molecolare fatte dall'egregio collega ed amico A. Naccari, mi incoraggiarono a rimanere con quei chimici che ancora sostengono la bivalenza dei metalli della cerite. — Ho evocato questo ricordo non già per associare il mio piccolo nome a quello d'un grande; ma perchè è solo l'amicizia che mi legava a Carlo Friedel, che può giustificare i miei colleghi di avermi conferito

(1) " C. R. ", t. 96°, pag. 990.

e me di avere accettato l'incarico di ricordare negli Atti dell'Accademia l'opera scientifica del compianto collega.

Purtroppo poco versato negli studi di chimica organica, devo limitare il còmpito che mi sono prefisso, ricordando le ricerche più importanti che FRIEDEL ha fatto nel campo della chimica inorganica e della mineralogia.

La serie degli importanti lavori che FRIEDEL pubblicò sui composti organici del silicio, prima colla collaborazione di Crafts e poi con quella di Ladenburg, entrano nel dominio comune alla chimica organica ed inorganica. Il merito principale di queste ricerche consiste nell'avere con esse dimostrato sperimentalmente, in modo ingegnoso e convincente, l'analogia completa tra le combinazioni del carbonio e quelle corrispondenti del silicio. Così ricevette una nuova conferma la tetravalenza del silicio, che era già stata annunziata molti anni prima da Cannizzaro. L'illustre chimico italiano indipendentemente dagli argomenti desunti dalla densità di vapore, e dall'isomorfismo dei fluosilicati coi fluostannati, dedusse dal modo diverso di comportarsi del cloruro di boro e di silicio sugli alcoli, che al cloruro di silicio spetta la formola $Si\,Cl_4$ (1).

Partendo da studi iniziati da Ebelmen, FRIEDEL intraprese colla collaborazione di Guérin importanti ricerche sulle combinazioni del titanio; trovò nuovi composti di questo metallo, e ridusse tutte le sue combinazioni ai tre tipi $Ti\,Cl_4$, $Ti\,Cl_2$ e $Ti_2\,Cl_6$, dimostrando la rimarchevole analogia di proprietà ed il frequente isomorfismo delle combinazioni appartenenti all'ultimo tipo con le combinazioni ferriche corrispondenti. Ideò inoltre un nuovo metodo di separazione del titanio dal ferro.

A FRIEDEL si deve la scoperta di una nuova serie ben definita di sali ottenuti scaldando in tubi chiusi zolfo (o selenio) con fosforo ed alcuni metalli. Sono questi i selenio ed i tioipofosfati aventi una composizione corrispondente alla formola generale $Ph_2S_6M''_2$.

FRIEDEL fu valente e coscienzioso nell'analisi chimica, e lo dimostrò specialmente nelle sue ricerche sulla composizione di

(1) " Nuovo Cimento ", vol. VII, pag. 375. Pisa, 1858.

minerali nuovi e di minerali già conosciuti. — Le specie mineralogiche nuove studiate da FRIEDEL sono: 1° L'*Adamite* (arseniato di zinco). 2° La *Wurtzite* (solfuro di zinco esagonale) chiamato col nome dell'illustre suo maestro, come testimonio di riconoscenza personale, e colla convinzione che i lavori di questo gran chimico, che hanno grandemente contribuito ai progressi della chimica organica, troveranno un qualche giorno la loro applicazione nella chimica minerale e nella mineralogia. Forse il FRIEDEL alludeva alla teoria degli acidi polisilicici, nella speranza, che noi tutti dividiamo, che la teoria del grande chimico alsaziano possa guidarci nel districare l'imbrogliata matassa della costituzione molecolare dei silicati naturali. 3° La *Delafossite*, combinazione di ossido ferrico ed ossido ramoso. 4° La *Carnotite* (vanadato di uranio e di potassio), la cui descrizione formò oggetto dell'ultima della numerosa serie di pubblicazioni scientifiche di FRIEDEL. — Tra i lavori che si riferiscono a minerali già conosciuti, meritano di essere ricordati: l'analisi della Dawsonite trovata nelle marne che involgono i depositi di cinabro del Siele, e quella della brucite, che raramente riscontrasi a Cogne in Val d'Aosta. — Con ricerche sintetiche stabilì che la Hopeite, è realmente costituita da fosfato idrato di zinco. — Nel 1894 aveva ripetutamente asserito che le apofilliti non contengono fluoro; ma nell'anno successivo spontaneamente si ricredette, facendo conoscere che il risultato negativo delle sue prime ricerche doveva ascriversi al difetto del metodo da lui seguito.

Le belle esperienze di FRIEDEL sulla produzione artificiale di alcuni minerali possono essere distinte in tre gruppi secondo il metodo seguito per ottenerli.

1° Colla diffusione lenta di soluzioni opportunamente scelte attraverso una fessura estremamente capillare, egli ottenne la percyllite e la mellite. La produzione artificiale di questo secondo minerale è rimarchevole, perchè è una conseguenza della scoperta da lui fatta di un nuovo metodo di sintesi organica. Ossidando con permanganato potassico l'exametilbenzina ottenne l'acido mellitico. Ora una soluzione del sale potassico di questo acido diffondendosi in una soluzione neutra di cloruro d'alluminio dà origine alla formazione di cristalli di mellite, identici in tutte le loro proprietà a quelli naturali.

2° Le esperienze fatte da Friedel con Sarazin consistono nel riscaldare in un tubo chiuso di acciaio rivestito internamente di platino i componenti amorfi dei minerali in presenza d'acqua, ad una temperatura variabile a seconda delle circostanze da 180° a 500°. In questo modo ottenne: l'analcimo, l'albite, il quarzo, la leadhillite e la fosgenite. Un risultato interessante di queste ricerche fu anche la riproduzione della calcite cristallizzata, ottenuta scaldando per dieci ore a 500° il carbonato calcico amorfo in presenza di una soluzione concentrata di cloruro di calcio. La calcite non era accompagnata da alcuna traccia di aragonite; il che è notevole perchè infirma l'opinione più comunemente accettata sull'influenza della temperatura nella formazione dell'una piuttosto che l'altra delle due forme cristalline caratteristiche per il carbonato di calcio.

3° Nell'anno 1890 e nel seguente, associandosi il proprio figlio Giorgio, Friedel diede un nuovo e più originale indirizzo ai suoi studi di sintesi mineralogica, cercando di ottenere la riproduzione di alcuni minerali come effetto dell'azione di agenti chimici sopra altri minerali, che costituiscono i componenti essenziali delle roccie. Con ciò egli portò un forte contributo allo studio del metamorfismo. — Le ricerche iniziate con questo indirizzo razionale, facendo agire in svariate condizioni di temperatura e di pressione gli alcali, le terre alcaline ed i silicati alcalini sulla mica, ebbero per risultato la produzione artificiale della nefelina, della sodalite, dell'anfigeno, dell'ortosio e della noseana. Tutti questi minerali furono identificati colle determinazioni cristallografiche e coll'analisi chimica. — I cultori della chimica mineralogica si augurano che il giovane ingegnere delle miniere Giorgio Friedel, che si è già distinto coi suoi importanti e lodati lavori sul gruppo dei zeoliti, continui nella via additatagli dal suo illustre genitore a contribuire ai progressi della mineralogia sperimentale, che deve essere considerata la base più sicura per le teorie geologiche.

Ricerche di cristallografia. — Il primo della numerosa serie dei lavori pubblicati da Friedel riflette la determinazione di un esatetraedro emitropo di diamante, che fu inserito nella seconda edizione del trattato di mineralogia di Dufrenoy (1856). In seguito descrisse una nuova geminazione nel quarzo; determinò

le forme cristalline non conosciute del fluosilicato di magnesio del selenito di rame, dell'azotito di bario e della gneiarite (solfo-antimonite di rame). Descrisse una deformazione speciale della magnetite e una nuova forma (romboedrica) nello zolfo che si depone dall'iposolfito di sodio per l'azione dell'acido cloridrico: Provò la pseudoisomorfia del nitrato sodico colla calcite, avendo osservato che un cristallo di questo minerale non può indurre la cristallizzazione in una soluzione soprasatura del sale sodico.

Dal 1860 al 1885 Friedel si occupò ripetutamente dei fenomeni elettrici causati dal calore nei cristalli, studiandoli specialmente nel quarzo, nella blenda, nella scolecite, nel topazio ed in alcuni solfuri metallici.

I risultati di queste sue ricerche si possono così riassumere:

1° Ideò ingegnosamente un metodo preciso e sensibile, per scoprire la piroelettricità polare anche nelle faccie emiedriche a faccie inclinate.

2° Spiegò come in alcuni casi speciali lo sviluppo di elettricità per l'azione del calore dipende da compressioni ineguali, e così aprì la via alla scoperta della piezoelettricità fatta da G. e P. Curie, che furono suoi allievi e collaboratori in queste ricerche.

3° Contrariamente alle asserzioni di Riess e di Rose, negò l'esistenza in certi cristalli di poli centrali di piroelettricità, spiegando la divergenza di opinione colle geminazioni frequenti in questi cristalli.

4° Dimostrò come nella boracite cessano affatto le manifestazioni piroelettriche quando viene raggiunta la temperatura di 265°, alla quale questo minerale diviene *perfettamente* cubico; e pertanto confermò la pseudo simmetria cubica alle ordinarie temperature di questo minerale, che era stata preventivamente annunziata da Mallard in base allo studio delle proprietà ottiche.

5° Scoperse che i fenomeni piroelettrici si osservano anche in cristalli buoni conduttori (panabase, calcopirite).

6° È noto che Marbach osservò il fatto curioso che la pirite e la cobaltite, sperimentati isolatamente con conduttori di platino aventi temperatura diversa, si mostrano ora positivi, ora negativi, in modo che con essi si può costruire una pila termoelettrica, superiore per forza elettromotrice alla coppia classica bismuto-antimonio. Ora Friedel ripetè, confermandole,

queste esperienze, ma non riuscì a trovare una relazione tra l'emiedria a faccie parallele di questi minerali, e l'esistenza di due varietà aventi segni termoelettrici differenti.

Carlo Friedel fu un insegnante molto efficace. Nove anni dopo d'aver cessato di professare mineralogia, pubblicò il corso delle sue lezioni col titolo *Trattato di mineralogia generale* e rese con ciò un grande servigio agli studiosi. Questo trattato è un modello di perspicua chiarezza; esso ha una speciale impronta di originalità e contiene l'esposizione dei migliori metodi che si possono desumere dalla geometria, dalla fisica e dalla chimica per la cognizione completa dei minerali. Comprese gli inconvenienti che derivano da una soverchia trattazione di una parte della scienza a detrimento delle altre. I progressi fatti ultimamente nelle varie parti della mineralogia hanno contribuito ad una specializzazione soverchia, la quale se da un lato ci acconsente d'esplorare a fondo una data parte della scienza, dall'altra disabitua la mente degli studiosi dalle grandi e feconde concezioni sintetiche.

Come scrittore Friedel ebbe il senso della giusta misura; rifuggì dalla soverchia aridità di stile che rende inviluppate e difficilmente comprensibili le cose esposte e della quale molti pare che si compiacciano, quasichè nello scrivere di argomenti scientifici si debba assolutamente bandire ogni vestigio di genialità. Nè incagliò nell'eccesso opposto di coloro che diluiscono i loro concetti in un oceano di frasi e invece di conseguire la desiderata chiarezza vengono a trovarsi di fronte la peggiore nemica d'ogni scrittura: la noia. — Scrisse magistrevolmente le biografie di Wurtz, Silva, Salet, Schutzenberger e Combes. Non si nota in esse lo stile smagliante e la squisita forma letteraria degli elogi storici scritti da Arago e da Dumas; ma lo studioso della storia della chimica, vi trova ordinati e rettamente interpretati tutti i documenti di cui ha bisogno; e si accorge con compiacenza che nello descrivere la vita del maestro e dei colleghi, alla mente dello scrittore fu compagno il cuore.

Oltrechè nella cattedra e nel laboratorio Friedel esplicò in altri modi la sua prodigiosa attività a vantaggio dei progressi della scienza. Fu uno dei fondatori della società chimica di Pa-

rigi della quale fu eletto quattro volte presidente. Frequentò assiduamente le adunanze della società mineralogica di Francia; collaborò prima e diresse poi la pubblicazione del dizionario di chimica del Wurtz; presiedette la commissione internazionale per la modificazione della nomenclatura dei composti organici. Finalmente promosse e diresse la istituzione del corso triennale di chimica applicata presso la facoltà di scienze, ammettendo razionalmente come principio direttivo di questa nuova istituzione che l'insegnamento delle applicazioni deve essere fondato sopra la completa cognizione della chimica generale, ed ebbe la consolazione di vedere i primi trenta allievi usciti alla fine dello scorso anno da questo istituto impiegati in diverse officine di industrie chimiche.

L'opera del Friedel fu meritamente apprezzata; l'Istituto di Francia gli conferì due premii; la Società reale di Londra la gran medaglia Davy. Gli onori, non guastarono il carattere mite, modesto, integerrimo di Friedel, che anche per le doti del suo animo seppe procacciarsi la stima di tutti, e l'affetto di quanti ebbero la fortuna di conoscerlo.

Il nome di Carlo Friedel è ricordato in un nuovo minerale (la friedelite, clorosilicato di manganese) dedicatogli da Bertrand; la sua memoria vivrà benedetta nella storia delle scienze al cui progresso egli ha validamente contribuito.

Sulle superficie di Veronese e di Steiner;

Nota del Dott. CARLO ROSATI.

È dovuto al Lie (*) il teorema: " *Il luogo dei poli di un piano arbitrario rispetto alle coniche di una superficie di Steiner è una seconda superficie di Steiner* ". Fu poi notato e dimostrato (**) che analoga proprietà sussiste per la superficie di Veronese, ma non fu osservato che di qui, per semplice proiezione, nasce una proprietà più generale di quella di Lie, cioè che *il luogo dei poli delle corde di una curva di 4° ordine (gobba o piana) di una superficie di Steiner rispetto alle coniche della medesima passanti per i loro punti d'appoggio è una nuova superficie di Steiner;* e che *se la curva di 4° ordine è assintotica, la nuova superficie di Steiner coincide colla prima.* Queste ed altre proprietà si espongono nella presente Nota con procedimento semplice ed uniforme fondato sopra la notissima rappresentazione in S_5 della geometria delle coniche di un piano (***).

(*) Cfr. Lie, *Petite contribution à la théorie de la surface steinérienne*, " Archiv for Mathematik og Naturvidenskab ", Christiania, vol. 3°, 1878. — Koenigs, *Le lieu des pôles d'un plan*, " Bulletin de la Société mathématique de France ", vol. 16°, 1888. — Brambilla, *Intorno alla superficie di Steiner*, " Rendiconti della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli ", fasc. 1°, gennaio 1898. — Montesano, *La superficie romana di Steiner*, Rendiconti citati, fasc. 4°, gennaio 1899.

(**) Cfr. Brambilla, *Estensione di una proprietà della superficie di Steiner*, Rendiconti citati, fasc. 6°-7°, giugno-luglio 1898 (L'estensione, secondo avverte il sig. Brambilla, gli fu comunicata dal sig. Berzolari).

(***) Cfr. Veronese, *La superficie omoloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni ecc.*, " Memorie della R. Acc. dei Lincei ", 1883-84. — Segre, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano ecc.*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 1885.

§ 1.

1. — *In uno spazio a cinque dimensioni il luogo dei poli di un iperpiano rispetto alle coniche di una superficie di Veronese, è una nuova superficie di Veronese.*

Si ricorra alla rappresentazione piana della superficie di Veronese F_2^4, immaginando l'S_5 nel quale è immersa come lo spazio di coniche di un piano π; e si chiami γ la conica di π immagine della C_1^4 sezione di essa con un iperpiano ρ. Un S_2 di prima specie della ipersuperficie M_4^3, relativa alla F_2^4, interseca ρ in un S_1 che, nella rappresentazione della M_4^3 nella totalità delle coppie di punti di π, ha per immagine una involuzione, sopra una retta, di punti coniugati rispetto alla conica γ. Il polo di questo S_1 rispetto alla conica di F_2^4 contenuta nell' S_2 considerato è rappresentato dalla coppia di punti doppi di questa involuzione, pensata come unico elemento. Dunque il luogo dei poli di ρ rispetto alle coniche della F_2^4 è una superficie esistente nella M_4^3, ed i cui punti, nella rappresentazione della M_4^3, hanno per immagine le coppie di punti della conica γ. Questa superficie è del quart'ordine, perchè un sistema lineare ∞^3 di coniche inviluppo di π (immagine di un S_3 di S_5), ammette quattro coniche degeneri in coppie di punti di γ (*); *appartiene* ad S_5, perchè la completa intersezione di essa coll'iperpiano ρ è la curva C_1^4 *appartenente* a ρ; inoltre non è rigata, perchè non esistono in π schiere di coniche tutte degeneri in coppie di punti della conica γ; quindi (**) è una superficie di Veronese.

Si indicherà con F'^4_2 questa superficie, e con M'^3_4, φ'^4_2 e μ'^3_4 le varietà ad essa coordinate.

2. — Se ρ appartiene alla μ_4^3, cioè è tangente in un punto N alla F_2^4, dalla F'^4_2 si staccano i due S_2 che contengono le co-

(*) Infatti, nella trasformazione quadratica involutoria dei punti coniugati rispetto a tutte le coniche del fascio associato, la conica γ si trasforma in una curva del quart'ordine che ha con essa otto punti comuni, distribuiti in quattro coppie di punti coniugati.

(**) Cfr. Del Pezzo, *Sulle superficie d'ordine n immerse nello spazio di n+1 dimensioni*, " Rendiconti della R. Acc. di Napoli ", 1885.

niche C e C′ sezioni dell'iperpiano colla F_2^4: rimane quindi del luogo una quadrica V_2^2. L'S_3 in cui essa è contenuta è l'intersezione dei due iperpiani tangenti doppî alla F_2^4 lungo le coniche C e C′. Esso contiene l' S_2 tangente in N a questa superficie. dimodochè tale S_2 e la quadrica V_2^2 costituiscono la sua completa intersezione colla M_4^3. Quell'S_2 è pure tangente in N alla quadrica, e le due generatrici della medesima in esso contenute sono le tangenti in N alle coniche C e C′. Ciò resulta con facilità sia per via diretta, sia ricorrendo alla rappresentazione piana, osservando che in questo caso la conica γ è degenere in una coppia di rette.

Se ρ è tangente doppio della F_2^4, cioè appartiene alla φ_2^4, il luogo F_2^4 si riduce all' S_2 .della conica di contatto contato quattro volte.

8. — Ritornando al teorema del n° 1, si osservi che fra le due superficie F_2^4 ed F'^4_2 viene stabilita una corrispondenza biunivoca, se nelle loro rappresentazioni in π si eseguisce un *principio di trasporto*, mediante il quale si fa corrispondere ad un punto del piano, la coppia dei punti di contatto delle due tangenti condotte da esso alla conica γ. *Questa corrispondenza è un'omologia che ha per iperpiano di elementi uniti l'iperpiano* ρ *considerato, il suo polo rispetto alla* μ_4^2 *per centro, e-2 per rapporto anarmonico caratteristico.*

Infatti un punto di π (considerato come conica inviluppo degenere), la coppia dei punti di contatto delle tangenti condotte da esso a γ, la conica γ, appartengono alla stessa schiera e il rapporto anarmonico che formano nella schiera queste tre coniche con l'armonica di γ è $=-2$ (*). È dimostrato dunque che, in quella corrispondenza biunivoca, due punti corrispondenti sono allineati col polo R di ρ rispetto alla μ_4^2, e che, insieme ad esso e all'intersezione della loro congiungente con ρ, formano un rapporto anarmonico $=-2$.

(*) Rappresentando infatti con $x_1^2 x_2 = 0$ una forma binaria cubica con un punto doppio, il gruppo polare del prim' ordine di un elemento $\frac{y_1}{y_2}$ è dato da $\frac{-y_1}{2y_2}$, e il rapporto anarmonico domandato è quindi:

$$\left(\frac{y_1}{y_2},\ 0,\ \frac{-y_1}{2y_2},\ \infty\right) = -2.$$

Ne discende il teorema:

" *Se da un punto* R *di* S_5 *si proiettano i punti di una superficie di Veronese, le ulteriori intersezioni delle rette proiettanti colla* M_4^3 *relativa ad essa formano una seconda superficie di Veronese. Essa è anche il luogo dei poli, rispetto alle coniche della prima superficie, dell'iperpiano* ρ *polare del punto* R *rispetto alla* μ_4^3 " (*).

4. — L'iperpiano ρ sega la F_2^4 in una C_1^4, la quale, essendo di punti uniti nell'omologia considerata, *sarà contenuta anche nella* F'^4_2, come abbiamo già osservato al n° 1.

Analogamente, gli iperpiani tangenti doppî della F_2^4 passanti per R, che costituiscono una Σ_1^4, essendo uniti nell'omologia, *saranno tangenti doppî anche per* F'^4_2.

Il sig. Montesano (l. c. § 1, n° 3) ha osservato che dati tre elementi ABC di una forma elementare, se di un quarto elemento R si prendono i coniugati armonici A'B'C' rispetto alle coppie BC, CA, AB, le coppie AA', BB', CC' sono di punti corrispondenti in una proiettività, nella quale sono uniti l'elemento R e l'elemento T, gruppo polare di prim'ordine di R rispetto alla terna ABC; e di cui il rapporto anarmonico caratteristico è $(\mathrm{SATA'}) = -\frac{1}{2}$. Ci sarà utile questa osservazione per studiare le relazioni fra le altre varietà associate alle due superficie F_2^4 ed F'^4_2.

Sia la forma elementare considerata un S_1 per R, e siano gli elementi ABC le sue intersezioni colla M'^3_4; il punto T in cui interseca ρ sarà il gruppo polare del prim'ordine di R rispetto alla terna ABC (perchè R e ρ, essendo uniti nell'omologia, sono polo e iperpiano polare anche rispetto alla M'^3_4); e gli elementi A'B'C', dovendo esser tali da produrre $(\mathrm{RATA'}) = -\frac{1}{2}$ e quindi $(\mathrm{RA'TA}) = -2$, apparterranno alla M_4^3. Dunque: " *La*

(*) Il prof. Segre mi ha fatto notare che si potrebbe partire da questa proposizione e dedurre con facilità l'altra del n° 1. Egli mi ha comunicato anche la seguente generalizzazione, suscettibile forse di altre applicazioni: " *Se una* M'_{r-1} *di* S_r *contiene una varietà* F *di punti* $\nu-1$)*-pli, la proiezione* F' *di* F *su* M'_{r-1} *da un punto qualunque* R *corrisponde ad* F *in un'omologia che ha* R *per centro, l'iperpiano polare di* R *rispetto alla* M'_{r-1} *per iperpiano di elementi uniti, e* $1-\nu$ *per rapporto anarmonico caratteristico.*

ipersuperficie M_4^3 *è il luogo dei coniugati armonici del punto* R *rispetto alle coppie dei punti d'intersezione degli* S_1 *passanti per esso colla* M'^3_4 „.

Ora si osservi che se $A \equiv B$; anche $A' \equiv B'$ e $C' \equiv A \equiv B$, dunque:

“ *Le due ipersuperficie* M_4^3 *ed* M'^3_4 *sono inscritte nello stesso cono di vertice* R, *e la prima contiene la varietà di contatto di questo cono colla seconda, cioè la* V_3^6 *intersezione della* M'^3_4 *colla quadrica polare di* R *rispetto ad essa* „.

È noto che questa V_3^6 è costituita da S_2 di prima specie della M'^3_4; si dimostri che *essi sono di seconda specie per la* M_4^3, *e precisamente sono tangenti alla* F_2^4 *nei punti della* C_1^4. Infatti gli iperpiani tangenti doppî alla F'^4_2 lungo le coniche situate in questi S_2, passando per R, sono uniti nell'omologia, e quindi sono tangenti doppî anche della F_2^4. Le coniche di contatto con questa superficie avranno per immagine, nella rappresentazione piana, le rette tangenti a γ; allora le coniche di contatto colla F'^4_2, dovendo essere le trasformate di quelle nell'omologia, saranno rappresentate, sulla conica γ, da involuzioni degeneri con un unico punto doppio, e quindi sono contenute negli S_2 tangenti ad F_2^4 nei punti della C_1^4.

Se poi la forma elementare è un fascio di iperpiani il cui S_3 base giace in ρ, e la terna è costituita dai tre iperpiani $\alpha\beta\gamma$ della μ_4^3 passanti per questo S_3, l'iperpiano τ del fascio passante per R sarà il gruppo polare del prim'ordine di ρ rispetto ad $\alpha\beta\gamma$, e gli elementi $\alpha'\beta'\gamma'$, dovendo essere tali che $(\rho\alpha\tau\alpha') = -\frac{1}{2}$ e quindi $(\tau\alpha\rho\alpha') = -2$, apparterranno alla μ'^3_4. Dunque: “ *La* μ'^3_4 *è costituita dagl'iperpiani coniugati armonici di* ρ *rispetto alle coppie di iperpiani della* μ_4^3 *che con* ρ *formano fascio* „.

Le due varietà μ_4^3 e μ'^3_4 hanno comune una Σ_3^9. Gli iperpiani tangenti alla F_2^4 passanti per R, i quali costituiscono una Σ_3^3, essendo uniti nell'omologia, sono pure tangenti alla F'^4_2; rimane dunque della Σ_3^9 comune una Σ_3^6, *la quale è costituita dagl'iperpiani tangenti alla* F_2^4 *nei punti della* C_1^4. Questi iperpiani, infatti, contenendo un S_2 di prima specie della M'^3_4, sono pure tangenti alla F'^4_2; e costituiscono una Σ_3^6, perchè un S_2 arbitrario incontra la V_3^6 in sei punti, per ciascuno dei quali passa un S_2 di questa varietà, che, insieme all'S_2 considerato, determina un iperpiano tangente.

Infine, osservando che fra gli iperpiani che toccano la F_2^4 nei punti della C_1^4, ci sono quelli tangenti doppî della medesima superficie, possiamo enunciare:

" *Gli iperpiani tangenti doppî della prima superficie di Veronese, sono tangenti semplici della seconda, cioè, la φ_1^4 è contenuta nella $\mu_4'^4$* ".

§ II.

5. — Proiettando ora da un S_1 di S_5 sopra un S_3 duale le due superficie di Veronese F_2^4 ed $F_2'^4$, si otterranno due superficie di Steiner σ e σ'; la C_1^4 viene a proiettarsi in una curva gobba di quart'ordine (e di seconda specie) della superficie σ; le corde di essa saranno le proiezioni degli S_1 nei quali ρ interseca gli S_2 di prima specie della M_4^3; si ha quindi il teorema:

" *Il luogo dei poli delle corde di una curva gobba di quart'ordine di una superficie di Steiner, rispetto alle coniche della medesima passanti per i loro punti di appoggio è una seconda superficie di Steiner.*

Se la quartica si scinde in due coniche, il luogo si spezza nei loro piani e in una quadrica tangente alla superficie nel loro punto comune. Le due generatrici della quadrica situate nel piano tangente in quel punto, sono le tangenti in essa alle due coniche ".

Se l'S_1 da cui si fa la proiezione giace nell'iperpiano ρ, la C_1^4 si proietta in una sezione piana della superficie σ, e ne consegue il citato teorema di Lie.

Se il detto S_1 passa per il punto R, la C_1^4 si proietta in una assintotica (*) della superficie σ, e la $F_2'^4$ ha per proiezione la stessa superficie σ, perchè ogni S_2 proiettante, passando per il centro R dell'omologia, proietta tanto un punto della F_2^4 che il suo corrispondente della $F_2'^4$. Dunque:

" *Il luogo dei poli delle corde di una assintotica di una superficie di Steiner rispetto alle coniche di essa passanti per i loro punti di appoggio, è la medesima superficie di Steiner* ".

A questo teorema si può dare un'altra forma. Una conica

(*) Ciò resulta dalla rappresentazione piana della superficie di Steiner, perchè le coniche inviluppo aderenti alle immagini delle assintotiche, rappresentano i punti dell'S_1 da cui è fatta la proiezione.

della superficie si appoggia in due punti a ciascuna assintotica: il polo, rispetto alla conica medesima, della corda comune, dovendo essere un punto della superficie, sarà situato sull'altra conica in cui il piano della prima interseca ulteriormente la superficie. Dunque:

" *In una superficie di Steiner, le corde che una conica ha comuni colle assintotiche, inviluppano una seconda conica, che è la polare reciproca, rispetto alla prima, di quella nella quale il suo piano interseca ulteriormente la superficie* ".

6. — Ritornando al caso in cui la curva del quart'ordine non è assintotica, si osservi che *le due superficie* σ *e* σ' *hanno comune la curva del quart'ordine considerata, e che i piani tangenti alla prima superficie nei punti di quella curva sono tangenti (altrove) anche alla seconda.*

Ciò è reso manifesto dal fatto che l'iperpiano proiettante un S_2 tangente a F_2^4 in un punto della C_1^4, è tangente anche a F'^4_2.

Inoltre, poichè la M'^3_4 contiene la φ_2^4, i quattro iperpiani tangenti doppî alla F_2^4 passanti per l'S_1 da cui è fatta la proiezione, saranno tangenti semplici della F'^4_2. Dunque:

" *I piani tangenti doppî della superficie* σ *sono tangenti semplici a* σ' ".

7. — Alcune altre conseguenze notevoli si ottengono collocando l'S_1 da cui si fa la proiezione in posizione particolare rispetto alle due superficie F_2^4 ed F'^4_2.

Se il detto S_1 si appoggia in un punto M alla F'^4_2, la proiezione σ' è una superficie gobba del terzo grado (*) e la C_1^4 si proietta in una quartica di σ passante per i punti cuspidali di una sua retta doppia; perchè, essendo M della superficie F'^4_2, i due punti in cui la C_1^4 si appoggia alla conica di F_2^4 situata nel-

(*) Non è da pensare che del luogo faccia pure parte un piano, perchè se consideriamo questo caso particolare come limite del generale, facendo avvicinare indefinitamente ai due punti cuspidali di una direttrice doppia i suoi due punti di appoggio colla quartica, il punto del luogo corrispondente a quella retta doppia (considerata come conica della superficie), è un punto sempre perfettamente determinato che tenderà verso *una* posizione limite.

l'S_1 di prima specie passante per M, saranno i punti di contatto delle tangenti condotte ad essa dal punto M. Avremo dunque il teorema:

" *Se la curva del quart'ordine della superficie σ passa pei due punti cuspidali di una sua retta doppia, il luogo dei poli è una superficie gobba del terzo grado* ".

Analogamente:

" *Se la curva del quart'ordine della superficie σ passa pei punti cuspidali di due sue rette doppie, il luogo dei poli si riduce ad una quadrica* ".

Facendo appoggiare l'S_1 in un punto alla F_2^4, questa si proietta in una superficie gobba del terzo grado, e la C_1^4 in una sua quartica di 2ª specie del sistema ∞^5 che ammette le generatrici per corde; quindi:

" *In una superficie gobba del 3° grado, il luogo dei poli delle corde di una quartica di 2ª specie (del sistema che ammette le generatrici come bisecanti) rispetto alle coniche della superficie passanti pei loro punti di appoggio, è una superficie di Steiner* ".

Proiettando da un S_1 appoggiato in un punto a ciascuna superficie di Veronese, si ha il teorema:

" *Se la curva del quart'ordine della superficie gobba del terzo grado passa dei punti cuspidali della sua direttrice doppia, il luogo dei poli è pure una superficie gobba del terzo grado* ".

In particolare la C_1^4 si proietta in un'assintotica della prima superficie, se l'S_1 passa per R; allora le due superficie di Veronese hanno la stessa proiezione, dunque:

" *Se la curva del quart'ordine è un'assintotica della superficie del terzo grado, il luogo dei poli è la superficie medesima* ".

Da cui discende la proprietà;

" *Le corde che una conica di una superficie gobba di terzo grado ha comuni colle assintotiche, inviluppano un punto, che è il polo rispetto alla conica medesima della generatrice della superficie esistente nel suo piano* ".

Sulla trasformazione dell'intorno di un punto per una corrispondenza birazionale fra due spazi;

Nota di BEPPO LEVI, a Torino.

Nel dicembre 1897 l'Accademia accoglieva nei suoi *Att* (vol. 33) una mia nota in cui davo la *Risoluzione delle singolarit puntuali delle superficie algebriche*, ed in cui enunciavo al n° 1 un proposizione, fondamentale pel seguito del lavoro, relativa al mod di trasformarsi dell'intorno di un punto per effetto di una tras formazione birazionale dello spazio. Quanto alla dimostrazion della medesima, io la riservavo ad altra occasione, e mi limi tavo a dare in nota alcuni cenni i quali indicassero una via ch si può tenere per detta dimostrazione [1] e, quanto meno, des sero l'intuizione della proposizione medesima. Ciò nondimeno l mancata prova può menomare, agli occhi del lettore, l'attendi bilità dei risultati. Ragion per cui porgerò qui il necessari complemento. Ragionerò costantemente, per fissare le idee, d spazî a tre dimensioni; ma i fatti medesimi, colle stess dimostrazioni, si estendono, fatte le necessarie modificazioni, a trasformazioni fra spazî ad un numero qualunque di dimensioni

1. — Due spazî Σ e Σ' siano riferiti fra loro per mezzo d una trasformazione birazionale Θ. Siano $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ le coordinat omogenee di un punto x di Σ, $x'_1 x'_2 x'_3 x'_4$ quelle del punto x' di Σ' corrispondente ad x: la trasformazione è rappresentata analiticamente dalle equazioni:

$$(1) \qquad \rho x_i = f_i(x'_j)$$
$$(1') \qquad \sigma x'_j = \varphi_j(x_i) \qquad \left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} = 1,2,3,4\right)$$

[1] Cfr. particolarmente la nota 2ª a pag. 6.

dove f_i, φ_j sono (convenienti) funzioni algebriche razionali omogenee delle rispettive variabili.

Si diranno *regolari* per la trasformazione Θ quelle coppie di punti corrispondenti (x, x') per cui non sono nulli nè tutti i membri a destra delle equazioni del sistema (1), nè tutti quelli delle equazioni del sistema (1'). *Ciascuno dei punti di una coppia regolare è individuato dall'altro punto della coppia medesima:* i due punti si diranno essi medesimi *regolari*. Reciprocamente, *se una coppia di punti (x, x') è tale che ciascuno di essi individua l'altro come suo corrispondente, la coppia medesima è regolare*. Infatti si assumano come coordinate non omogenee in Σ e Σ' rispettivamente i rapporti $\frac{x_k}{x_4}$, $\frac{x'_h}{x'_4}$ $(k, h = 1, 2, 3)$ e si supponga che, per una coppia $(x\,x')$ di punti corrispondenti, si annullino tutte le f (o tutte le φ). Per un noto teorema del Weierstrass [1], uno qualunque dei rapporti $\frac{x_k}{x_4}$ $\left(\text{o } \frac{x'_h}{x'_4}\right)$ può assumere un valore arbitrariamente fissato a priori [2] quando si facciano tendere secondo una legge (cammino) conveniente le x'_j (o le x_i) al valore che esse hanno in x' (o in x). Al punto x' (o al punto x) corrispondono quindi, se la coppia non è regolare, infiniti punti nell'altro spazio.

Condizione necessaria e sufficiente perchè una coppia di punti sia regolare per una data trasformazione birazionale è che essi vi si corrispondano biunivocamente.

---

(1) *Einige auf der Th. d. analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze.* " Abh. aus d. Functionenlehre ", Berlin, 1886, p. 180-81 (oppure " Mathematische Werke ", vol. 2°).

(2) Non si può invece fare assumere valori arbitrari insieme a tutti i rapporti $\frac{x_k}{x_4}$ $\left(\text{o } \frac{x'_h}{x'_4}\right)$ (V. Autonne, *Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes*, " Acta math. ", 21, 1897 e " Comptes rendus ", CXXIII, 1896 (p. 139-142) e *Sur les expressions* $\frac{0}{0}$ etc. " Nouvelles Annales ", 1897). Questo fatto è evidente a chi ricordi che, nei casi più semplici di trasformazioni birazionali (p. e. quadratiche) il sistema delle $\frac{x_k}{x_4}$ prende al più ∞^2 valori, e precisamente raggiunge gli ∞^2 quando il punto x' è fondamentale isolato (cfr. n° 4).

2. — Se la coppia $(x x')$ di punti non è regolare per la trasformazione, il punto x o il punto x' si dirà *fondamentale* pel suo spazio a seconda che sono nulle tutte le $\varphi(x_i)$ o tutte le $f(x'_j)$. Tutti e soli i punti fondamentali di uno spazio sono punti base del sistema omoloidico dello spazio medesimo che definisce la trasformazione. Se tutti i punti di una linea sono fondamentali, la linea medesima si dirà *linea fondamentale.*

Ad ogni punto fondamentale corrisponde una varietà infinità di punti che costituisce un sistema di linee e di superficie. La determinazione di queste varietà fu trattata a più riprese dal sig. Autonne [1]. Per quanto segue essa non ha interesse.

3. — Il punto x' sia fondamentale per Σ'; le coordinate d'ogni altro punto dello spazio si possono rappresentare con $x'_h + \xi_h$ $(h = 1, 2, 3)$, x'_4. Le ξ_h possono allora assumersi come coordinate omogenee (nella stella) della retta o direzione ξ che congiunge x' col punto considerato: preferirò la denominazione di direzione quando le ξ_h sono infinitesime.

Si ha, per ipotesi, $f_i(x'_j) = 0$ $(i, j = 1, \dots, 4)$; si supponga che siano inoltre nulle in x' tutte le derivate parziali delle f_i d'ordine $\leq \nu - 1$ e non tutte quelle d'ordine ν.

Ponendo, come d'uso:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x'_1} \xi_1 + \frac{\partial}{\partial x'_2} \xi_2 + \frac{\partial}{\partial x'_3} \xi_3 ,$$

si avrà:

$$\rho x_i = \frac{1}{\nu!} \Delta^\nu f_i(x'_j) + \frac{1}{(\nu+1)!} \Delta^{\nu+1} f_i(x'_j) + \dots \tag{2}$$

dove $\Delta^\nu f_i(x'_j)$ non sarà identicamente nullo per ogni i.

Si facciano tendere le ξ_h a 0 in un modo qualsiasi, purchè tale che gli ordini infinitesimali delle $\Delta^\nu f_i(x'_j)$ rispetto a $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ non risultino tutti $> \nu$, cioè purchè il limite verso

(1) Ll. cc. Inoltre: *Sur les variétés unicursales à trois dimensions*, "Comptes rendus", 1895 (9 e 30 dic.), t. 121, e, per le trasformazioni fra varietà a due dimensioni, *Sur les pôles des fonctions uniformes à deux variables indépendantes* ("Rend. Circ. Mat. Palermo", X, 1896). — Vuolsi pure ricordare la memoria del sig. Noether, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen* ("Math. Ann.", 2, p. 298) dove la ricerca è però poco approfondita, essendo diverso l'oggetto principale.

cui tende la direzione ξ non appartenga a tutti i coni $\Delta_{\prime}f_i(x'_j)=0$; si potrà allora, al limite, sostituire al sistema (2) il sistema

$$\rho x_i = \Delta' f_i(x'_j) \qquad (i,j=1,\ldots,4) \tag{3}$$

ove ρ ha valore diverso dal precedente. E poichè, per ipotesi, non tutte le equazioni (3) hanno il secondo membro nullo per le ξ considerate, *a ciascuna di queste corrisponde un punto x unico e determinato.*

4. — Per determinati valori delle x_i le 4 equazioni (3) (in tre sole incognite non omogenee) sono incompatibili, oppure una di esse è conseguenza delle rimanenti tre. Si supponga che sia la quarta conseguenza delle prime tre e si consideri il sistema:

$$\rho x_k = \Delta' f_k(x'_j) \qquad (k=1,2,3). \tag{3'}$$

Si indichi con M la matrice dei coefficienti dei secondi membri delle (3'): possono presentarsi tre casi:

1° Per ogni sistema generico di valori delle x_k $(k=1,2,3)$ le (3') sono compatibili e fra loro indipendenti, cioè non è nullo identicamente il jacobiano dei secondi membri delle (3') rispetto alle ξ_k [1] e non è quindi nullo per valori generici delle ξ_k (corrispondenti a valori generici delle x_k).

A ogni sistema generico di valori delle x_k corrisponde quindi almeno una direzione ξ uscente da x' e, per la birazionalità e la continuità della corrispondenza, *una sola;* e reciprocamente *ad ogni direzione generica ξ corrisponde un unico valore delle ρx_k, anzi delle ρx_i. Il luogo dei punti x corrispondenti alle direzioni uscenti da x' è quindi una superficie.* Il punto x' si dirà *fondamentale isolato* [2].

---

[1] Per la condizione necessaria e sufficiente perchè il jacobiano di tre curve si annulli vedi LEVI ALBERTO, *Sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie,* " Giornale di Battaglini „ (2), 8, n° 2.

[2] Secondo il sig. Autonne " zenit „. Lo chiamo fondamentale isolato perchè il suo caso tipico è quello di un punto base isolato del sistema omaloidico. La presenza di un tal punto sopra una linea fondamentale può considerarsi come accidentale.

Sono eccezionali le direzioni per cui è nullo il jacobiano delle $\Delta' f_k(x'_j)$ (fra cui sono comprese quelle per cui sono nulli i secondi membri delle (3')) e i punti x corrispondenti: le direzioni eccezionali formano quindi una semplice infinità.

5. — 2° È identicamente nullo il jacobiano delle (3') rispetto alle ξ_h: per valori arbitrari dati alle x_k le (3') sono incompatibili, ovvero una di esse è conseguenza delle rimanenti due: in quest' ultima ipotesi anche la 4ª delle (3) è conseguenza delle stesse due, per un'ipotesi precedente. Quindi il sistema (3) si riduce al sistema di al più due equazioni, che si possono supporre le prime due. Precisamente queste due equazioni saranno indipendenti se non sono nulli tutti i determinanti del secondo ordine tratti da M (formati colle sue prime due linee). Eliminando ρ fra le due equazioni si ha allora:

$$(3'') \qquad x_2 \Delta' f_1(x'_j) - x_1 \Delta' f_2(x'_j) = 0 \qquad (j = 1, \dots, 4).$$

Quindi, mentre ad ogni direzione ξ per cui $\Delta' f_i(x'_j) \neq 0$ corrisponde un unico punto x, *a un dato valore di* $\frac{x_1}{x_2}$ *corrisponde tutto un cono di direzioni appartenente al fascio* (3'') (ove x_1, x_2 sono parametri) *alle quali le* (3) *fanno corrispondere uno stesso punto. I punti x corrispondenti alle direzioni uscenti da x' costituiscono quindi una linea* (*razionale*) *proiettivamente riferita al fascio* (3'').

Sono eccezionali, in quanto non hanno un unico punto corrispondente, le direzioni base del fascio, perchè per esse si annullano tutte le $\Delta' f_i(x'_j)$ (cfr. n° 3): per la stessa ragione può ancora esistere un cono di direzioni eccezionali, il cono che eventualmente fosse comune a tutte le $\Delta' f_i(x'_j) = 0$.

Il punto x' si dirà *punto di linea fondamentale* [1].

---

[1] Adotto questa denominazione perchè il caso tipico di un punto di questa specie è quello di un punto generico di una linea fondamentale: però esistono punti di questa natura che non appartengono ad alcuna linea fondamentale, e non sono difficili a costruirsi. Il punto apparterrà certamente ad una linea fondamentale se, ripetendo il procedimento indicato al n° 7 si cadrà sempre in questo 2° caso. Seguendo il sig. Autonne il

6. — 3° Sono nulli tutti i suddeterminanti estratti da M. Quando, per date x_i, le equazioni (3) sono compatibili, si riducono ad una sola, che si può supporre la prima:

$$(3''') \qquad \rho x_1 = \Delta' f_1(x'_j).$$

I rapporti delle x_i sono allora indipendenti dalle ξ_k; a tutte le direzioni per cui non è nullo il secondo membro della (3''') corrisponde un unico punto x. Il cono $\Delta' f_1(x'_j) = 0$ è cono di direzioni eccezionali, per cui sono nulle tutte le $\Delta' f_i(x'_j)$. Il punto x' si dirà *fondamentale del* 3° *tipo*.

7. — In ogni caso, corrispondentemente a quelle direzioni eccezionali per cui si annullano tutte le $\Delta' f_i(x'_j)$, si potrà operare sul sistema (2), in cui si considerino le x' come costanti e le ξ come variabili, come si è operato sul sistema (1). Dette ξ_k^0 le coordinate di una determinata di dette direzioni, si porrà cioè in (2) $\xi_h = \theta(\xi_h^0 + \zeta_h)$ ($h = 1, 2, 3$; θ coefficiente di proporzionalità che si dovrà rendere infinitesimo) e si svilupperà ρx_i in funzione delle x'_i e delle ξ_h^0, costanti, e delle ζ_h, nuove variabili. Si otterrà un nuovo sistema (4) analogo a (2) e da questo, al limite per $\zeta_h = 0$, un sistema (5) analogo a (3) [1]. Su (5) si ripeteranno considerazioni analoghe alle precedenti dei n^i 4, 5, 6, e così di seguito.

Ma, senza ricorrere a questa via analitica, si potrà ricondurre lo studio delle direzioni eccezionali a quello dei punti fondamentali per mezzo di trasformazioni semplici, p. e. quadratiche, dello spazio. Di questo secondo metodo farò maggior cenno al n° 14.

---

punto x' si direbbe allora un " nadir " e si potrebbe enunciare che non esistono nadir isolati.

(1) Questo sistema dovrà possedere, come il sistema (3), 4 sole variabili omogenee, mentre qui ne compaiono apparentemente 5: $\rho\,\theta\,\zeta_1\,\zeta_2\,\zeta_3$: egli è che, a causa dell'annullarsi delle $\Delta' f_i(x'_j)$, si può sostituire alle ζ_h le

$$\theta_2 = \xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1, \qquad \theta_3 = \xi_1\zeta_3 - \xi_3\zeta_1$$

e le equazioni (5) risultano omogenee in $\theta\theta_2\theta_3$ e in un coefficiente di proporzionalità per le x_i che si potrà ancora indicare con ρ.

***

Studierò ora il modo di operare della trasformazione Θ riguardo all'intorno di un punto sopra una varietà (curva o superficie) quando il punto appartiene ad una coppia regolare e quando è fondamentale.

8. — ***Due varietà trasformate l'una nell'altra dalla trasformazione Θ hanno le stesse multiplicità in una coppia di punti corrispondenti regolare per la medesima.***

Siano A ed A′ i due punti considerati, rispettivamente in Σ e Σ′; Γ e Γ′, F e F′ una coppia di curve e una coppia di superficie corrispondentisi rispettivamente per Θ e passanti per A e per A′. Si supponga che Γ e F non si tocchino in A e vi abbiano rispettivamente le multiplicità σ e s: si faccia subire a Γ uno spostamento infinitesimo conducendola in Γ_1, non passante per A. Γ_1 e F avranno comuni fuori di A, ma infinitamente prossimi ad A, $s\sigma$ punti semplici per entrambe, in cui non si toccano; quindi hanno infinitamente prossime ad A $s\sigma$ intersezioni. Altrettante ne avranno Γ'_1 (corrispondente per Θ a Γ_1) e F′, infinitamente prossime ad A′.

Se ora si fa di nuovo tendere Γ_1 a Γ, gli $s\sigma$ punti comuni a F e Γ_1 tendono ad A, e, essendo regolare la coppia A A′, gli $s\sigma$ punti corrispondenti comuni a Γ'_1 e a F′ tenderanno ad A′, mentre Γ'_1 tende a Γ′. La multiplicità d'intersezione di Γ′ e F′ in A′ è quindi $s\sigma$ (1).

Ciò posto: 1° Sia $s = 1$, $\sigma = 1$; $s\sigma = 1$; quindi A′ è anch'esso semplice su F′ e su Γ′ e le due varietà non vi si toccano.

2° Sia $s = 1$, σ qualunque; F′ avrà in A′ punto semplice, Γ′ punto σ'-plo essendo $\sigma' \leq \sigma$ (se fosse $\sigma < \sigma$, Γ′ e F′ dovrebbero essere tangenti in A′). Ma scambiando le lettere cogli

(1) Si potrebbe temere che gli $s\sigma$ punti comuni a Γ'_1 e a F′ infinitamente prossimi ad A′ fossero multipli per la loro intersezione: allora la multiplicità d'intersezione di Γ′ e F′ in A′ sarebbe $i' > s\sigma$; ma nello stesso modo, scambiando le funzioni dei due spazi Σ e Σ′ si ottiene, per la multiplicità d'intersezione di Γ e F in A: $i = s\sigma \geq i'$; quindi $i = i' = s\sigma$, e gli $s\sigma$ punti comuni a Γ'_1 e F′ sono semplici.

apici e quelle senza si ha parimenti $\sigma \leq \sigma'$ (poichè si può sempre determinare una superficie F'_1 passante per A' con punto semplice e non tangente ivi a Γ'); quindi $\sigma = \sigma'$ ed F' e Γ' non si toccano in A'.

3° Sia s qualunque, $\sigma = 1$; come in 2°, scambiandovi s e σ, F e Γ, F' e Γ', si otterrà che F' ha in A' punto s-plo e non vi è tangente a Γ'.

4° s e σ siano ora qualunque; F' e Γ', avendo in A' riunite $s\sigma$ intersezioni, ed avendovi multiplicità rispettivamente s e σ (2° e 3°), non vi si toccano; reciprocamente se non si toccano in A' F' e Γ', F e Γ non potranno toccarsi in A cosicchè *la corrispondenza fra i punti* A *e* A' *è tale che le direzioni uscenti da essi si corrispondono biunivocamente — senza elementi eccezionali e quindi in una proiettività non degenere: se una varietà di* Σ *passa per* A *essendo tangente ad una data direzione, la varietà corrispondente in* Σ' *passa per* A' *essendo tangente alla direzione a questa corrispondente* (¹).

9. — Si assoggetti Σ ad una trasformazione quadratica T avente in A il suo punto fondamentale isolato e di cui si chiami C il cono fondamentale; sia Σ_1 lo spazio trasformato, ω_1 il suo piano fondamentale, c_1 la conica fondamentale. Si assoggetti similmente Σ' ad una trasformazione quadratica T' avente in A' il suo punto fondamentale isolato e di cui il cono fondamentale C' sia il cono delle direzioni della stella A' corrispondenti alle direzioni delle generatrici di C a causa di Θ. Siano Σ'_1 lo spazio trasformato, ω'_1 il suo piano fondamentale, c_1' la conica fondamentale.

Si chiamino corrispondenti due punti di Σ_1 e Σ'_1 che siano trasformati rispettivamente di punti o direzioni di Σ e di Σ' corrispondenti. Ad un punto di ω_1 fuori di c_1 corrisponde birazionalmente (proiettivamente) per T una direzione della stella A non appartenente a C; a tale direzione corrisponde per Θ biunivocamente una direzione della stella A' non appartenente a C' (n° 8), e a quest'ultima per T' un punto di ω'_1 fuori di c'_1.

(¹) Teorema valido, com'è noto, per trasformazioni assai più generali. Cfr., per le trasformazioni (n, 1), Reye: *Ueber Coordinaten-Transformationen n^{ten} Grades*, " Crelle's Journal ", t. 94, pag. 312 e seg. (precisamente pag. 314)

I punti di ω_1 e ω'_1 (fuori di c_1 e c'_1) sono adunque regolari per la corrispondenza fra Σ_1 e Σ'_1 (n° 1) ed hanno in varietà corrispondenti pari multiplicità. Su una coppia di questi punti corrispondenti si operi come or ora su A e A′ e così si prosegua; si otterrà che *se due varietà sono trasformate l'una nell'altra per una corrispondenza birazionale dello spazio, punti corrispondenti regolari, hanno sulle due varietà e lungo rami corrispondenti gli stessi caratteri di composizione* [1].

10. — I ragionamenti dei n[i] 8 e 9 si possono ripetere invariati per un punto A fondamentale del terzo tipo (n° 6), quando si supponga che il punto A′ corrispondente non sia fondamentale oppure sia esso pure fondamentale del terzo tipo e quando si considerino quelle sole coppie di direzioni corrispondenti in cui ne l'una nè l'altra direzione è eccezionale. Si ha quindi che allora *la corrispondenza fra i punti* A *e* A′ *è tale che fra le due stelle di direzioni uscenti da questi punti è definita una corrispondenza biunivoca, i cui elementi fondamentali cadono in direzioni eccezionali: se una varietà di* Σ *passa per* A *con una direzione non eccezionale, nè corrispondente, nel detto riferimento, ad una direzione eccezionale uscente da* A′, *la varietà corrispondente passa per* A′ *colla direzione a quella corrispondente; e le due varietà hanno, su rami corrispondenti aventi quelle direzioni, gli stessi caratteri di composizione.*

11. — Si supponga ora il punto A fondamentale isolato per Θ; sia ω' la superficie di Σ' luogo dei punti corrispondenti alle direzioni generiche della stella A (n° 4) e sia c' l'insieme

---

(1) Cfr. la precedente mia nota in questi " Atti ", vol. 33, n° 1, 1°.
Evidentemente le stesse dimostrazioni si applicano al piano. A questo proposito e in connessione con una postilla al detto n° 1, 1°, osserverò che da questa invarianza dei caratteri di composizione si deduce l'invarianza dell'influenza del punto nell'abbassamento della classe e del genere: è però chiaro che essa non è condizione necessaria per quest'ultima: e questa, per quanto riguarda il genere, fu già provata dal sig. De Franchis al n° 10 della sua memoria: *Sopra una teoria geometrica delle singolarità di una curva algebrica piana* (" Rend. Circ. Mat. Palermo ", XI, 1897).

dei punti e linee di ω' che corrispondono a direzioni eccezionali di questa stella, o che sono fondamentali per lo spazio Σ' (¹).

Si assoggetti Σ ad una nuova trasformazione T avente in A punto fondamentale isolato e che, per fissare le idee, supporrò quadratica, e sia Σ_1 lo spazio trasformato: sia ω_1 il suo piano fondamentale e c_1 la conica fondamentale. Σ_1 e Σ' sono riferiti birazionalmente, se si fanno corrispondere punti che siano trasformati per T e per Θ di uno stesso punto di Σ.

Ad un punto di ω' che non appartenga a c' corrisponde per Θ il punto A e una direzione ben determinata uscente da esso; fra queste direzioni ve ne è al più una semplice infinità appartenenti al cono fondamentale C di T in Σ; sia c^* la varietà (al più semplicemente infinita) dei punti di ω' corrispondenti a queste particolari direzioni. Se il punto di ω' che si considera non appartiene nemmeno a c^*, della direzione corrispondente uscente da A è trasformato per T un punto ben determinato di ω_1, fuori di c_1; questo punto corrisponderà nel riferimento fra Σ' e Σ_1 al punto considerato di ω'. Reciprocamente ad un punto di ω_1, fuori di c_1 e della varietà c^*_1 (al più semplicemente infinita) dei punti a cui corrispondono direzioni per A eccezionali o corrispondenti a punti fondamentali di Σ' su ω' (per Θ), corrisponde un punto unico e determinato di ω' fuori di c' e di c^*.

Per la corrispondenza considerata fra Σ_1 e Σ', ω' e ω_1 sono superficie trasformate l'una dell'altra, ed *i loro punti, fuori di c_1 e di c^*_1 e fuori di c' e di c^* rispettivamente, sono regolari.* Due qualunque varietà corrispondenti hanno quindi in punti generici corrispondenti di ω' e ω, la stessa multiplicità e lungo rami corrispondenti per essi la stessa composizione (nº 9): riferendoci allo spazio Σ: *ogni varietà* F *passante per* A *è trasformata per* Θ *in una varietà* F'; *e a ogni ramo su* F, *per* A, *non tangente alle direzioni eccezionali e alle direzioni cui corrispondono in* ω' *punti fondamentali di* Σ' *corrisponde un ramo su* F', *sopra il quale i caratteri di composizione di* F' *sono uguali a quelli di* F *sul ramo corrispondente, ove si sia soppresso il primo* (²); essi non dipen-

---

(¹) Non possono tutti i secondi membri delle (1) annullarsi in tutti i punti di una superficie $\Omega = 0$, perchè dovrebbero in tale ipotesi tutte le f_i avere a fattor comune Ω. Questo fattor comune dovrebbe allora sopprimersi inglobandolo nel ρ. I punti fondamentali costituiscono quindi, al più, una varietà semplicemente infinita.

(²) Cfr. la precedente nota già citata nº 1, 2º.

dono quindi dalla particolar trasformazione Θ, ma solo dal fatto che Θ ha punto fondamentale isolato in A e non ha la direzione del ramo come eccezionale nè corrispondente a punti fondamentali. In particolare i caratteri di composizione sono indipendenti dalle particolari trasformazioni quadratiche che servono a definirli.

12. — Il punto A sia infine punto di linea fondamentale per la trasformazione Θ. Sia ω′ la linea corrispondente di Σ′ e si supponga che non tutti i punti di ω′ siano fondamentali in Σ′ [1]. Si assoggetti Σ′ ad una nuova trasformazione T avente ω′ come linea fondamentale ordinaria, cioè semplice per le superficie del sistema omaloidico e a piani tangenti alle medesime in ogni punto, variabili (p. e., ad un' ordinaria trasformazione monoidale [2]). Sia Σ″ lo spazio trasformato. Ogni punto di ω′ si trasforma in una linea di Σ″ e l'insieme di tutte queste linee è un sistema ∞^1 (razionale) φ″ in una superficie ω″: sola direzione eccezionale per ciascun punto di ω′ è la tangente ad ω′. Il prodotto Θ T riferisce birazionalmente fra loro i due spazi Σ e Σ″ per modo che alle direzioni generiche uscenti da A corrispondono i punti di ω″ [3]. Il punto A è dunque fondamentale isolato per questa trasformazione; ed il suo fascio di direzioni Φ analogo a (3″) si trasforma per essa nel fascio di curve φ″.

Si fissi un punto P′ generico di ω′, il quale cioè non sia fondamentale in Σ′ per la trasformazione Θ; sia Π il cono di direzioni del fascio Φ che gli corrisponde, p'' la curva corrispondente del fascio φ″. Nella stella P′ è definito un fascio analogo a (3″) relativo alla trasformazione T: poichè, per ipo-

---

[1] Con che si esclude che il punto appartenga ad una linea fondamentale del tipo p. e. di quelle della trasformazione cubica a tetraedro fondamentale (linea fondamentale di 2ª specie (*Art*) secondo il sig. Kantor. Cfr. " Acta Mathematica ", t. 21).

[2] V. De Paolis, *Sopra un sistema omaloidico formato di superficie di ordine n con un punto* $(n-1)$*plo*, " Giornale di Battaglini ", 13, 1875, pag. 226 e 282).

[3] Qui è essenziale la condizione che non tutti i punti di ω′ siano fondamentali per Θ poichè solo allora si può affermare che tutti i punti di una curva generica di φ″ corrispondono all' unico punto A; e quindi corrispondono ad A tutti i punti generici di ω″.

tesi ω' è linea fondamentale per T, questo fascio sarà quello dei piani tangenti in P' a ω' [1]. Ad ogni piano del fascio corrisponde un punto di p'' (n° 5); d'altra parte ad ogni punto generico di p'' corrisponde una direzione unica e determinata di Π, poichè A è fondamentale isolato nella trasformazione di Σ in Σ'' (n° 4): ne segue che per la trasformazione Θ *ad ogni direzione non eccezionale appartenente ad un cono del fascio* Φ (cui non corrisponda in Σ' un punto fondamentale), *corrisponde una giacitura* (insieme delle direzioni di un fascio) *uscente dal punto di* ω' *corrispondente a quel cono, ed appartenente ad un piano tangente ad* ω' *in questo punto; e reciprocamente. Le giaciture cui corrispondono direzioni eccezionali formano una semplice infinità* [2]: *corrispondono alle direzioni eccezionali tutte le loro direzioni.*

13. — Si assoggetti Σ ad una nuova trasformazione Θ_1 per cui A sia punto di linea fondamentale ed in cui, a meno di eventuali coni fissi, il fascio analogo a (3'') sia il medesimo che per la trasformazione Θ. Sia Σ'_1 il nuovo spazio trasformato, ω'_1 la sua linea corrispondente ad A ed ancora non tutti i suoi punti siano fondamentali per Θ_1. Applicando il teorema precedente si vede che nella corrispondenza fra Σ' e Σ'_1 definita dal corrispondersi punti omologhi ad uno stesso punto di Σ, le due linee ω' e ω'_1 sono fra loro corrispondenti; e la corrispondenza fra i loro punti, considerati in quanto appartengono a Σ' e Σ'_1 [3] è biunivoca, se si fa astrazione da quelle coppie di cui un punto è fondamentale rispettivamente per Θ o per Θ_1, e, per le coppie generiche, da quelle direzioni che corrispondono alle direzioni eccezionali della stella A (n° 12). *I punti generici di* ω' *e* ω'_1 *sono* adunque, *per la corrispondenza fra* Σ' *e* Σ'_1, *o punti regolari, ovvero fondamentali del* 3° *tipo:* in ogni caso *due varietà corrispondenti hanno su rami corrispondenti aventi le origini in questi punti e non tangenti alle direzioni eccezionali per essi, la stessa composizione* (n[i] 9 e 10). Si può trasportare la proposizione nello spazio Σ dicendo che *tutte le trasformazioni per cui* A *è punto di linea fondamentale, colle restrizioni imposte a* Θ *e* Θ_1

---

[1] I coni $\Delta^r f_i(x'_j) = 0$ essendo allora fasci di piani tangenti in P' a ω'.

[2] Corrispondente alla semplice infinità di punti di ω'' corrispondenti alle direzioni eccezionali di A.

[3] (Non solo in quanto appartengono a ω' e a ω'_1).

trasformano una stessa varietà in varietà che hanno la stessa composizione sui rami trasformati di rami non aventi direzione eccezionale o direzione cui corrisponda un punto fondamentale (¹).

Può avvenire che le restrizioni fatte in questi enunciati siano eccessive: accadrà questo evidentemente quando, nella corrispondenza sopra stabilita fra Σ' e Σ'_1, i punti generici di ω' e ω'_1 siano regolari; cadrà infatti allora la riserva fatta pei rami di direzione eccezionale. Si presenta questo caso ogni volta che A è punto generico di una linea, fondamentale tanto per Θ quanto per Θ_1 (²). A questa linea corrispondono infatti in Σ' ed in Σ'_1 due superficie, luoghi delle linee trasformate de' suoi punti, le quali, nel riferimento fra Σ' e Σ'_1 si corrispondono biunivocamente: e in questa corrispondenza i loro punti generici sono regolari perchè non possono essere fondamentali tutti i punti di una superficie (cfr. una nota al n° 11).

***

14. — Per quanto riguarda la trasformazione dei rami aventi direzioni eccezionali nulla ci dicono i nⁱ 10-13. Come abbiamo annunciato al n° 7 possiamo ancora qui valerci di trasformazioni semplici, in particolare, quadratiche.

Ad una direzione eccezionale d uscente da A corrispondano per Θ infiniti punti di Σ'. Si applichi a Σ una trasformazione quadratica avente punto fondamentale in A e di cui il cono fondamentale non contenga d: sia Σ_1 lo spazio trasformato, ω_1 il suo piano fondamentale e sia D_1 il punto di ω_1 corrispondente a d. Fra Σ_1 e Σ' risulta stabilita una corrispondenza birazionale in cui sono riferiti due punti quando corrispondono allo stesso punto di Σ: in esso D_1 sarà punto fondamentale, perchè gli corrispondono infiniti punti di Σ'.

Si potranno quindi applicare le precedenti proposizioni e solo si dovrà osservare che, nel ritornare allo spazio primitivo

(¹) Ricorrendo ad una locuzione introdotta nella mia nota cui questa fa seguito: Θ e Θ_1 *sono simili rispetto a tutti i rami non aventi direzione eccezionale o direzione cui corrisponda un punto fondamentale.*

(²) Cfr. la Nota già citata n° 1, 3°.

Σ, alle direzioni uscenti da D_1 corrispondono le *osculazioni* aventi la comune direzione *d*.

Le direzioni eccezionali uscenti da D_1 dànno luogo ad *osculazioni eccezionali* aventi la direzione *d*. Con una nuova trasformazione quadratica di punto fondamentale D_1 si potrà studiare una qualunque di quelle direzioni e quindi queste osculazioni e così via.

Analogamente si tratterebbe il caso in cui ad una infinità di direzioni uscenti da A corrispondesse per Θ un unico punto di Σ'; nella corrispondenza fra Σ' e Σ_1 sarebbe allora questo, anzichè D_1, punto fondamentale [1].

---

[1] Il fondamento di questo modo di analizzare le direzioni eccezionali si deve ricercare nel modo analogo di studiare le singolarità delle varietà, in particolare delle superficie algebriche. Di fatto i punti fondamentali di Θ p. e. in Σ' sono, come si è osservato (n° 2), i punti base del sistema omaloidico di Θ in Σ': le direzioni per cui $\Delta' f_i(x'_j) = 0$ sono direzioni comuni a tutte le superficie del sistema, e così via. Considerando come un'unica superficie l'insieme di quattro superficie linearmente indipendenti del sistema, si potrà cercare di risolvere, con trasformazioni semplici, le singolarità della superficie provenienti dall'intersezione delle 4 componenti: se in questo si riesce si sarà ridotto lo studio di Θ nell'intorno dei punti fondamentali a quello di una successione di trasformazioni più semplici. Semplicissime sono le trasformazioni quadratiche, ma, come mostrai altrove (" Annali di Matematica ,, (2) 26 e (3) 2) non si può per mezzo di tali trasformazioni risolvere ogni punto singolare di una superficie. Trasportate queste conclusioni ai sistemi omaloidici, si avrà che con sole trasformazioni quadratiche, non si può in generale effettuare lo studio completo di un punto fondamentale della trasformazione, in quanto può avvenire che, per quanto si prosegua nelle trasformazioni stesse (lungo convenienti itinerari) si ottengano sempre punti trasformati fondamentali: si otterrà invece la completa riduzione ricorrendo anche alle trasformazioni a linea fondamentale (ordinaria); p. e. a trasformazioni monoidali (V. la mia nota precedente, più volte citata).

Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante;

Nota di DOMENICO DE FRANCESCO.

Il Sig. Heath nella sua Memoria *On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space* (*) ha stabilito le seguenti formole differenziali:

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & A\frac{d\omega_1}{dt} - (B - H)\omega_2\omega_6 - (G - C)\omega_5\omega_3 = Q_1,\\
& B\frac{d\omega_2}{dt} - (H - A)\omega_6\omega_1 - (C - F)\omega_3\omega_4 = Q_2,\\
& C\frac{d\omega_3}{dt} - (A - G)\omega_1\omega_5 - (F - B)\omega_4\omega_2 = Q_3,\\
& F\frac{d\omega_4}{dt} - (B - C)\omega_2\omega_3 - (G - C)\omega_5\omega_6 = Q_4,\\
& G\frac{d\omega_5}{dt} - (C - A)\omega_3\omega_1 - (H - F)\omega_6\omega_4 = Q_5,\\
& H\frac{d\omega_6}{dt} - (A - B)\omega_1\omega_2 - (F - G)\omega_4\omega_5 = Q_6,
\end{aligned}
$$

nelle quali le ω sono le sei velocità angolari del corpo rispetto ai sei spigoli di un tetraedro legato invariabilmente al corpo, le Q sono i sei momenti delle forze applicate, rispetto agli stessi spigoli, ed A, B, C, F, G, H, coefficienti dipendenti dalla distribuzione della massa del corpo, fra i quali sussistono le relazioni:

$$(2)\qquad A + F = B + G = C + H = M,$$

M essendo la massa del corpo.

(*) *On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space.* By R. S. HEATH. Communicated by Professor Cayley in " Philosophical Transactions of the Royal Society of London ,, for the year MDCCCLXXXIV, Vol. 175, part I, p. 316.

Nel caso di un corpo non sollecitato da forze, cioè nel caso che le Q siano tutte nulle, il Sig. Heath ha trovato tre integrali quadratici delle suddette equazioni, cioè:

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 + F\omega_4^2 + G\omega_5^2 + H\omega_6^2 = 2T = \text{cost.} \tag{3}$$

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 + F^2\omega_4^2 + G^2\omega_5^2 + H^2\omega_6^2 = K^2 = \text{cost.} \tag{4}$$

$$\frac{a^2\omega^2_1}{1 - b^2 - c^2} + \frac{b^2\omega^2_2}{1 - c^2 - a^2} + \frac{c^2\omega^2_3}{1 - a^2 - b^2} = \text{cost.} \tag{5}$$

avendo posto $A = Ma^2$, $B = Mb^2$, $C = Mc^2$.

Il Sig. Heath ha dato anche una soluzione delle equazioni differenziali in termini di funzioni ϑ di due variabili, una delle quali è una funzione lineare del tempo; ma, come egli stesso ha osservato, la soluzione non è completa, per difetto del numero delle costanti arbitrarie: essa infatti contiene solo quattro costanti arbitrarie invece di sei.

Vi è un quarto integrale non notato dal Sig. Heath, col quale e mediante un teorema dovuto al Prof. Volterra sulla integrazione delle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti (*), si può ottenere la soluzione completa.

Il nuovo integrale è il seguente:

$$AF\omega_1\omega_4 + BG\omega_2\omega_5 + CH\omega_3\omega_6 = \text{cost.}, \tag{6}$$

che si ottiene sommando le sei equazioni dopo averle ordinatamente moltiplicate per

$$F\omega_4,\ G\omega_5,\ H\omega_6,\ A\omega_1,\ B\omega_2,\ C\omega_3.$$

Il teorema del Prof. Volterra, supposto che il numero delle caratteristiche sia ν, è il seguente:

(*) Volterra, *Sopra una classe di equazioni dinamiche.* " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, Vol. XXXIII, Disp. 8ª, 1897-98, p. 474-475.

Se, oltre all'integrale delle forze vive, si conoscono $\nu - 3$ integrali indipendenti dal tempo delle equazioni d'un moto spontaneo a caratteristiche indipendenti d'ordine ν, ed uno di essi è un integrale di secondo grado (la cui equazione determinante abbia radici diseguali), la determinazione delle caratteristiche si riduce alle quadrature.

Nel nostro caso il numero delle caratteristiche (le ω) è 6, ed abbiamo oltre all'integrale delle forze vive (3), altri tre integrali (4), (5) e (6).

Se i prodotti AF, BG, CH sono diseguali, sono diseguali, come mostreremo in seguito, anche le radici dell'equazione determinante della (6), epperò in virtù del teorema ricordato, l'integrazione delle (1) si riduce, nel caso generale, alle quadrature.

L'equazione determinante di una funzione φ, omogenea di 2° grado, è l'equazione in λ che risulta ponendo eguale a zero il discriminante della forma quadratica $\varphi + \lambda T$ (*). Prendendo per φ la (4), si ha:

$$(2A + \lambda)(2B + \lambda) \ldots\ldots (2H + \lambda) = 0,$$

la quale ha radici eguali quando due qualunque dei coefficienti A, B, C, ... H sono eguali. Se invece si prende per φ la funzione (6), l'equazione determinante è:

$$\begin{vmatrix} A\lambda & 0 & 0 & AF & 0 & 0 \\ 0 & B\lambda & 0 & 0 & BG & 0 \\ 0 & 0 & C\lambda & 0 & 0 & CH \\ AF & 0 & 0 & F\lambda & 0 & 0 \\ 0 & BG & 0 & 0 & G\lambda & 0 \\ 0 & 0 & CH & 0 & 0 & H\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

che si riduce a:

$$(\lambda^2 - AF)(\lambda^2 - BG)(\lambda^2 - CH) = 0,$$

(*) Volterra, mem. cit., p. 471.

la quale dimostra quanto abbiamo innanzi asserito, e cioè che per l'applicabilità del teorema con l'integrale (6), basta che i tre prodotti AF, BG, CH siano diseguali, pur essendo $A = F$, o $B = G$, o $C = H$.

Se due dei tre prodotti, per esempio AF e BG fossero eguali, ne verrebbe per conseguenza, in virtù delle (2):

$$A = B,\ F = G,\ \text{oppure}\ A = G,\ B = F,$$

ed in tal caso il teorema non è applicabile, nè coll'integrale (4), nè coll'integrale (6).

Ma anche in tal caso l'integrazione delle (1) si può ridurre del pari alle quadrature, poichè se $A = B$, ed $F = G$, la sesta delle (1) dà l'integrale $\omega_6 = \text{cost.}$; e se $A = G$, e $B = F$ la terza delle (1) dà $\omega_3 = \text{cost.}$ Avendosi così cinque integrali delle (1) indipendenti dal tempo, l'equazione del tempo si otterrà con una quadratura.

L'equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti sono state messe dal Prof. Volterra sotto la forma:

$$\frac{dp_s}{dt} = \sum_{kr} e_{skr} \frac{d(T,\varphi)}{d(p_k,p_r)},$$

dove T è la forza viva, φ è un altro integrale di secondo grado, che ha la proprietà enunciata nel teorema, ed e_{skr} sono coefficienti costanti che cambiano di segno invertendo due indici.

L'equazioni (1) possono mettersi sotto la stessa forma, sostituendo primieramente:

$$p_1, p_2, \ldots p_6 \quad \text{ad} \quad \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_6,$$
$$A_1, A_2, \ldots A_6 \quad \text{ad} \quad A, B, C, F, G, H;$$

e poi mettendo al posto della funzione φ o l'integrale (4), o l'integrale (6). Nel primo caso tutti i coefficienti e_{skr} sono nulli, tranne:

$$e_{162} = \frac{1}{2A_1A_6A_2},\ e_{135} = \frac{1}{2A_1A_3A_5},\ e_{243} = \frac{1}{2A_2A_4A_3},\ e_{465} = \frac{1}{2A_4A_6A_5}.$$

Nel secondo caso i coefficienti non nulli sono:

$$e_{132} = \frac{1}{A_1 A_3 A_2}, \; e_{165} = \frac{1}{A_1 A_6 A_5}, \; e_{246} = \frac{1}{A_2 A_4 A_6}, \; e_{354} = \frac{1}{A_3 A_5 A_4}.$$

Le caratteristiche si riducono a tre, e le equazioni (1) si riducono a quelle di Eulero pel moto spontaneo di rotazione in uno spazio euclideo, in questi due casi: 1° quando il corpo ha un punto fisso; 2° quando sono nulli i valori iniziali di $\omega_1, \omega_5, \omega_6$, o di $\omega_2, \omega_6, \omega_4$, o di $\omega_3, \omega_4, \omega_5$. Nel primo caso il moto è un moto di Poinsot. Nel secondo caso si dimostra che, se una di quelle terne, per esempio $\omega_1, \omega_5, \omega_6$ è inizialmente nulla, essa rimane nulla in tutto il corso del moto, osservando che le equazioni (1) dànno anche nulle, nel primo istante, $\frac{d\omega_1}{dt}, \frac{d\omega_5}{dt}, \frac{d\omega_6}{dt}$. Se adunque, al tempo t, $\omega_1, \omega_5, \omega_6$ sono nulle, esse sono nulle anche al tempo $t + dt$. In questo secondo caso le equazioni s'integrano con funzioni ellittiche, come nel primo, ma il moto è ben diverso da quello di Poinsot, specialmente nel caso di uno spazio iperbolico.

È quasi superfluo notare che, passando da uno spazio ellittico ad uno spazio iperbolico, le equazioni (1), e tutte le susseguenti mantengono la stessa forma.

Sulla torsione dei cilindri cavi a spessore piccolissimo;

Nota del Dott. EMILIO ALMANSI.

1. — Abbiasi un cilindro elastico ed isotropo, limitato da due sezioni normali alle generatrici della sua superficie laterale.

Riferiamo i suoi punti ad un sistema di assi ortogonali $O(xyz)$, prendendo l'asse Oz parallelo alle dette generatrici. Sia S l'intersezione del cilindro con un piano normale a quest'asse.

Consideriamo una funzione u, delle variabili x, y, regolare in tutta l'area S, insieme alle sue derivate di qualunque ordine, che soddisfi all'equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

e tale, inoltre, che sul contorno di S si abbia:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\right) dy - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + x\right) dx = 0, \tag{2}$$

essendo dx, dy, le proiezioni, sugli assi Ox, Oy, dell' elemento di contorno attiguo al punto (xy).

Poniamo ora:

$$\tau_x = G\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\right), \quad \tau_y = G\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + x\right), \tag{3}$$

ove G rappresenti il *modulo di Elasticità tangenziale*, e θ un'altra costante.

Se si suppone che sulla base del cilindro rivolta verso la direzione positiva dell'asse Oz, agisca, nel punto di coordinate x, y, una tensione tangenziale τ, di cui τ_x e τ_y sieno le componenti secondo gli assi Ox, Oy; che sull'altra base agisca, nei

punti corrispondenti, una tensione uguale e contraria; e finalmente che la superficie laterale del cilindro non sia soggetta ad alcuna tensione, si dimostra che su tutte le sezioni del cilindro parallele alle basi si sviluppa una tensione tangenziale distribuita come sulle basi, avente cioè per componenti τ_x e τ_y, ovvero $-\tau_x$ e $-\tau_y$, secondochè della sezione stessa si considera la faccia rivolta verso la direzione positiva o negativa dell'asse Oz.

La resultante delle forze infinitesime $\tau_x dS$, $\tau_y dS$, applicate agli elementi di una sezione S (di cui d'ora in avanti supporremo sempre di considerare la faccia rivolta verso la direzione positiva dell'asse Oz) è una coppia, o *momento torcente*. Chiamandolo M, si ha:

$$M = \int_S (x\tau_y - y\tau_x)\,dS. \tag{4}$$

Un cilindro in tali condizioni si dice soggetto a *sforzo di torsione*. La costante θ rappresenta l'*angolo di torsione*, vale a dire l'angolo di cui ruotano, una rispetto all'altra, due sezioni trasversali, distanti tra loro dell'unità di lunghezza (*).

(*) Sulla Torsione dei cilindri si veda, p. es., A. Castigliano, *Théorie de l'Équilibre des Systèmes Élastiques et ses applications*, Ie partie, chap. III, § 17 e seg. — Le formule (1), (2) e (3) di questa mia Nota, si ottengono dalle (52), (53) e (51) del Castigliano (pag. 89), facendo in esse $F_2 = F_3 = G$, e inoltre sostituendo y e z con x e y, p_{xy} e p_{xz} con τ_x e τ_y, u con θu.

Per chi volesse verificare direttamente le formule (1), (2) e (3), da cui parto, ricorderò quelle che esprimono la deformazione del cilindro. Indicando con ξ, η, ζ, le componenti, secondo gli assi coordinati, dello spostamento di un punto $(x\,y\,z)$, dalla posizione iniziale, si ha:

$$\xi = -\theta yz, \quad \eta = \theta xz, \quad \zeta = \theta u.$$

Si dimostra facilmente che le funzioni ξ, η, ζ, soddisfano alle equazioni generali dell'Elasticità, e, per conseguenza, corrispondono ad una deformazione possibile del solido, purchè la funzione u, delle sole variabili x, y, verifichi l'equazione (1). Calcolando poi le sei *tensioni principali unitarie*, si trova che sono tutte nulle, tranne due, la τ_x e la τ_y: e queste son date appunto dalle formule (3).

Finalmente la formula (2) esprime la condizione che sulla superficie laterale del cilindro non agisce alcuna tensione.

Si avverta che tutto ciò vale, a rigore, nel solo caso che la tensione, sulle basi del cilindro, sia distribuita secondo la legge espressa dalle formule (3). Tuttavia si può ritenere che la distribuzione della tensione, dovuta al momento torcente, per le sezioni abbastanza lontane dalle basi, non dipenda dal modo con cui le basi stesse sono sollecitate. Potremo dunque ammettere che, per tali sezioni, le componenti τ_x e τ_y della tensione siano sempre date dalle formule (3).

È da notarsi che la distribuzione della tensione τ, quale si ottiene da queste formule, è indipendente dalla posizione che occupa l'origine delle coordinate, e dall'orientamento degli assi $0x$, $0y$.

2. — Dalle cose dette resulta che il problema di trovare come è distribuita la tensione tangenziale sopra ciascuna sezione trasversale S di un cilindro soggetto a torsione, si riduce a determinare la funzione u, *armonica* nell'area S, e che verifica al contorno l'equazione (2). Si dimostra che una tal funzione esiste sempre, ed è determinata a meno di una costante, che però non ha influenza, giacchè nelle formule (3) compariscono soltanto le sue derivate.

Quando si sia ottenuta la funzione u, se è dato l'angolo di torsione θ, avremo immediatamente le componenti τ_x, τ_y della tensione, dalle formule (3). Se invece è dato il momento torcente M, ricorreremo alla formula (4), che in virtù delle (3) può scriversi:

$$M = G\theta \int_S \left(x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 + y^2 \right) dS.$$

Posto:

$$I = \int_S \left(x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 + y^2 \right) dS, \tag{5}$$

sarà:

$$M = G\theta I, \tag{6}$$

dalla qual formula, noto M, e calcolata la costante I, ricaveremo θ.

Per determinare la funzione u, l'Analisi fornisce varii metodi, cosicchè dal punto di vista puramente teorico, il problema

della torsione dei cilindri può dirsi risoluto. Non così dal punto di vista pratico, giacchè l'uso di quei metodi, nella massima parte dei casi, richiede calcoli oltremodo laboriosi.

Si può invece risolvere un problema inverso, rispetto a quello di determinare la funzione u, data l'area S: si può cioè partire da una funzione u, che soddisfi l'equazione (1), e sia regolare (essa e le sue derivate) almeno in una certa regione del piano; e cercare la linea su cui è soddisfatta l'equazione (2), ossia integrare questa equazione differenziale, *ciò che è sempre possibile*. Se si ottiene una linea chiusa, e se l'area che essa racchiude appartiene alla regione del piano in cui la u è regolare, avremo risoluto il problema della torsione per un cilindro, la cui sezione ha per contorno la linea trovata.

Per fare un esempio, consideriamo il caso più semplice. Sia

$$u = \text{cost.}^e$$

Una tal funzione soddisfa evidentemente l'equazione (1), ed è regolare in tutto il piano.

L'equazione (2) diventerà:

$$xdx + ydy = 0,$$

da cui integrando si ricava:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

ove R^2 è una costante positiva. Ma questa è l'equazione di un cerchio, riferito ad un sistema di assi Ox, Oy, coll'origine O nel centro: per un cilindro a sezione circolare il problema della torsione è dunque risoluto. Le componenti, secondo gli assi, della tensione tangenziale che agisce sopra una sezione trasversale qualunque, nel punto di coordinate x, y, si otterranno dalle formule (3), sostituendo ad u il suo valore. Resterà:

$$\tau_x = -G\theta x, \quad \tau_y = G\theta y.$$

Queste formule dicono che in un punto P della sezione, situato alla distanza r dal centro O, la tensione vale $G\theta r$, ed è diretta normalmente al raggio OP.

La relazione tra il momento torcente e l'angolo di torsione è data dalla formula (6). La costante I che vi comparisce si ottiene dall'equazione (5), la quale nel nostro caso diventa:

$$I = \int_S (x^2 + y^2) dS;$$

ossia la costante I rappresenta il momento d'inerzia polare del cerchio S rispetto al suo centro.

Si ritrovano così le note formule relative alla torsione dei cilindri circolari.

Per le sezioni a contorno ellittico il problema della torsione si risolve ponendo:

$$u = Axy,$$

ove A è una costante, che dipende dal rapporto tra i semiassi. Partendo da altre funzioni armoniche assai semplici, si può risolvere lo stesso problema per sezioni di forme svariatissime.

3. — Vediamo ora come la legge, secondo cui è distribuita la tensione tangenziale, sopra una sezione S, si possa esprimere in modo del tutto differente da quello sopra esposto.

Sia s una linea chiusa, tracciata sulla sezione S, ds un suo elemento. Sarà evidentemente:

$$\int_s \frac{du}{ds} ds = 0,$$

ossia:

$$\int_s \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \right) = 0. \tag{7}$$

Ma dalle formule (3) si ricava:

$$\left. \begin{aligned} G\theta \frac{du}{dx} &= \tau_x + G\theta y, \\ G\theta \frac{du}{dy} &= \tau_y - G\theta x. \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Se dunque moltiplichiamo il primo membro dell'equazione (7) per $G\theta$, ed a $G\theta\frac{du}{dx}$, $G\theta\frac{du}{dy}$ sostituiamo questi loro valori, otterremo:

$$\int_s \{(\tau_x + G\theta y)dx + (\tau_y - G\theta x)dy\} = 0,$$

ovvero:

$$\int_s (\tau_x dx + \tau_y dy) = G\theta \int_s (xdy - ydx).$$

Ora, detti α, β gli angoli che la tangente alla linea s nel punto x, y, forma cogli assi, avremo:

$$dx = ds\cos\alpha,\quad dy = ds\cos\beta; \tag{9}$$

e chiamando σ l'area racchiusa dalla linea s:

$$\int_s (xdy - ydx) = 2\sigma.$$

Perciò l'equazione precedente potrà scriversi:

$$\int_s (\tau_x\cos\alpha + \tau_y\cos\beta)\,ds = 2G\theta\sigma.$$

Posto

$$\tau_x\cos\alpha + \tau_y\cos\beta = \tau',$$

sarà:

$$\int_s \tau' ds = 2G\theta\sigma. \tag{10}$$

La quantità τ' rappresenta la componente della tensione τ secondo la tangente alla linea s. Abbiamo così, espressa dalla formula (10), una notevole proprietà relativa alla distribuzione della tensione τ, lungo una linea chiusa.

4. — Un'altra formula, dello stesso tipo della (10), può ottenersi nel modo seguente.

Ricordiamo una proprietà fondamentale delle funzioni armoniche. Se la funzione u è armonica nell'area S, *ed* S' *è un'area*

che appartiene interamente ad S, si ha, chiamando s' il contorno di S':

$$\int_{s'} \left(\frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx \right) = 0. \tag{11}$$

Potrà darsi che il contorno s' sia costituito da una sola linea chiusa, ovvero che esso sia formato da più linee chiuse. La formula (11) vale in generale, purchè in questo secondo caso nell'eseguire l'integrazione, si percorrano le diverse linee chiuse, in modo da aver sempre l'area S' alla destra o alla sinistra.

Sia ora s una linea chiusa tracciata nell'area S, sezione di un cilindro soggetto a torsione, ed u quella particolare funzione armonica, che comparisce nelle formule (3). Dico che è sempre soddisfatta la equazione:

$$\int_{s} \left(\frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx \right) = 0. \tag{12}$$

Occorre distinguere due casi. Se il contorno dell'area S è costituito da una sola linea c (fig. I), l'area racchiusa da s apparterrà interamente ad S. Potremo perciò assumere come area S' quella compresa entro s: il suo contorno è appunto s, ed applicando a questa linea l'equazione (11), otterremo la (12).

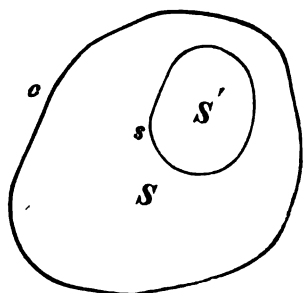
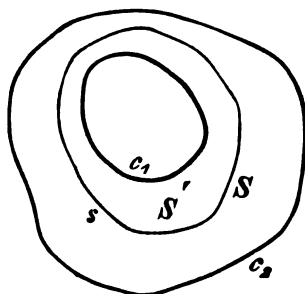



Fig. I. Fig. II.

Ora invece supponiamo che il contorno dell'area S sia costituito da più linee chiuse, per esempio due, c_1 e c_2; in altre parole sia S la sezione di un cilindro cavo. In questo caso l'area racchiusa entro una linea chiusa s, potrà non appartenere interamente ad S (fig. II): ed allora non potremo applicare a questa

linea l'equazione (11). Potremo invece applicarla al complesso delle due linee s e c_1, giacchè l'area S' che esse racchiudono appartiene per intero ad S. Otterremo così:

$$(13) \qquad \int_s \left(\frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx \right) + \int_{c_1} \left(\frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx \right) = 0.$$

Si tratta di dimostrare che l'integrale esteso a c_1 è nullo.

Perciò ricordiamo che sul contorno dell'area S è verificata l'equazione (2), che scriveremo:

$$\frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx = xdx + ydy.$$

In particolare questa equazione sarà verificata sulla linea c_1. Onde avremo:

$$\int_{c_1} \left(\frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx \right) = \int_{c_1} (xdx + ydy).$$

Ma $xdx + ydy$ è il differenziale della funzione $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Si avrà dunque, poichè c_1 è una linea chiusa, e la funzione $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ha in ogni punto un sol valore:

$$\int_{c_1} (xdx + ydy) = 0\,;$$

e per conseguenza:

$$\int_{c_1} \left(\frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx \right) = 0.$$

Quindi l'equazione (13) diventerà:

$$\int_s \left(\frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx \right) = 0.$$

Il ragionamento vale evidentemente qualunque sia il numero delle linee chiuse $c_1, c_2, \ldots c_n$, che costituiscono il contorno dell'area S. Se infatti s è una linea chiusa tracciata nell'area S, si potrà sempre considerare un'area S', che appartenga interamente ad S, e il cui contorno s' sia sostituito dalla linea s, e

da alcune delle linee $c_1, c_2, \ldots c_n$. Per il complesso di queste linee sarà verificata l'equazione (11). Ma per una qualunque c_i, di quelle che appartengono al contorno di S, essendo verificata sopra i suoi punti l'equazione (2), si avrà:

$$\int_{c_i}\left(\frac{du}{dx}\,dy-\frac{du}{dy}\,du\right)=0.$$

Per conseguenza l'equazione (11) si ridurrà anche in questo caso alla (12), che resta così dimostrata in generale.

Operiamo ora sull'equazione (12) come abbiamo operato sulla (7): moltiplichiamo cioè il suo primo membro per $G\theta$, e sostituiamo a $G\theta\frac{du}{dx}$, $G\theta\frac{du}{dy}$, i loro valori dati dalle formule (8). Otterremo:

$$\int_s\{(\tau_x+G\theta y)\,dy-(\tau_y-G\theta x)\,dx\}=0,$$

ossia:

$$\int_s(\tau_x dy-\tau_y dx)=-G\theta\int_s(xdx+ydy);$$

e poichè l'integrale del secondo membro è identicamente nullo:

$$\int_s(\tau_x dy-\tau_y dx)=0;$$

od anche, ricordando le formule (9):

$$\int_s(\tau_x\cos\beta-\tau_y\cos\alpha)\,ds=0.$$

Posto:

$$\tau_x\cos\beta-\tau_y\cos\alpha=\tau'',$$

avremo:

$$\int_s\tau''\,ds=0. \tag{14}$$

La quantità τ'' rappresenta la componente della tensione τ secondo la normale alla linea s. Si è così ottenuta la formula che cercavamo. Essa vale, come la (10), per qualunque linea chiusa s, e ci fornisce una seconda proprietà relativa alla distribuzione della tensione τ.

5. — Un'ultima proprietà, per i punti del contorno, ci è fornita dall'equazione (2). Essa, tenendo conto delle (3), può scriversi:

$$\tau_x dy - \tau_y dx = 0,$$

od anche, se α, β sono gli angoli che la tangente al contorno fa cogli assi:

$$(15) \qquad \tau_x \cos\beta - \tau_y \cos\alpha = 0.$$

Questa formula dice che nei punti del contorno la componente della tensione secondo la normale è nulla.

La tensione τ possiamo considerarla come un *vettore* parallelo al piano (xy), definito in tutti i punti dell'area S. Adoperando le espressioni in uso, potremo allora enunciare nel modo seguente le proprietà espresse dalle formule (10), (14) e (15):

a) *L'integrale del vettore* τ *lungo una linea chiusa è proporzionale all'area racchiusa da questa linea: il coefficiente di proporzionalità è* $2G\theta$.

b) *Il flusso del vettore* τ *uscente da una linea chiusa è nullo.*

c) *Il contorno della sezione è una linea di flusso, o è costituito da più linee di flusso.*

Queste proprietà, come sarebbe facile dimostrare, determinano completamente il vettore τ.

Di esse ci varremo per studiare la torsione dei cilindri cavi, a spessore piccolissimo.

6. — Sia ab (fig. III) un segmento che si muove in un piano, variando di lunghezza, ma conservandosi normale alla linea chiusa s, descritta dal suo punto di mezzo. La lunghezza del segmento la supporremo sempre piccolissima di fronte a quella della linea s.

Considerando l'area S che descrive il segmento ab, come la sezione trasversale di un cilindro elastico, vogliamo vedere come si comporta questo cilindro, quando venga assoggettato a sforzo di torsione.

Faremo questa ricerca in via d'approssimazione, tenendo conto della piccolezza del segmento ab.

Sia perciò a_0b_0 una determinata posizione di questo segmento.

Diciamo φ il flusso di tensione che attraversa ab, nel verso assunto come positivo per la linea s, φ_0 il flusso che attraversa a_0b_0; ed esprimiamo la condizione che il flusso uscente dalla linea chiusa abb_0a_0 deve esser nullo.

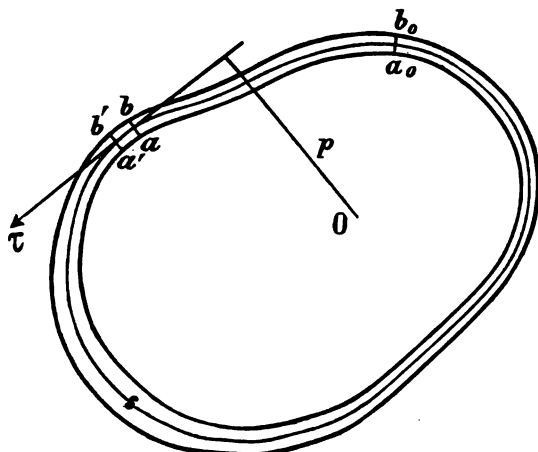



Fig. III.

I due tratti aa_0, bb_0 appartengono al contorno della sezione, che è costituito, come sappiamo, da linee di flusso: il flusso uscente da essi è dunque nullo. Il flusso che esce da ab è φ, quello che esce da a_0b_0 è $-\varphi_0$. Onde avremo:

$$\varphi - \varphi_0 = 0,$$

ossia

$$\varphi = \varphi_0.$$

Se ora diciamo τ la tensione nel punto di mezzo del segmento ab, e la larghezza di questo segmento, potremo ritenere

$$\varphi = \tau \,.\, e. \tag{16}$$

Infatti in a la tensione è diretta secondo la tangente al contorno della sezione, vale a dire alla linea descritta dallo stesso punto a; in b è tangente alla linea descritta dal punto b. Dovendo essa, lungo il segmento ab variare con continuità, in grandezza e direzione, possiamo ammettere che nel punto di mezzo sia diretta secondo la tangente alla linea descritta da

questo punto, vale a dire sia normale ad ab; e che inoltre il suo valore, ossia τ, rappresenti la media dei valori che ha, lungo il segmento ab, la componente della tensione normale ad esso. Queste ipotesi conducono precisamente alla formula (16).

Sarà allora:

$$\tau \, . \, e = \varphi_0 ,$$

od anche:

$$\tau = \frac{\varphi_0}{e} . \tag{17}$$

E poichè φ_0 è una costante, abbiamo intanto questa proprietà, che *la tensione* τ *varia inversamente allo spessore della sezione.*

La costante φ_0 si potrà esprimere per mezzo del momento torcente M. Perciò consideriamo il segmento che genera la sezione, in due posizioni infinitamente vicine ab, $a'b'$: e sia ds l'elemento della linea s compreso tra ab ed $a'b'$. Da un punto O, scelto ad arbitrio, abbassiamo la perpendicolare p sulla direzione della tensione τ, vale a dire sulla tangente ad s, in corrispondenza dell'elemento ds. Il momento, rispetto ad O, della tensione che agisce sull'elemento d'area compresa tra ab ed $a'b'$, potremo rappresentarlo, commettendo un errore piccolissimo, con $\tau \, . \, eds \, . \, p$. Per conseguenza sarà:

$$\mathrm{M} = \int_s \tau e \, . \, pds .$$

Ma il prodotto τe non è altro che la costante φ_0. Quindi avremo:

$$\mathrm{M} = \varphi_0 \int_s pds ,$$

ovvero:

$$\mathrm{M} = \varphi_0 \, . \, 2\sigma$$

se con σ indichiamo l'area racchiusa dalla linea s. Di qui ricaviamo:

$$\varphi_0 = \frac{\mathrm{M}}{2\sigma} ,$$

e sostituendo nella formula (17):

$$\tau = \frac{\mathrm{M}}{2\sigma e} . \tag{18}$$

Questa formula ci dà, in ogni punto di s, la tensione τ, espressa mediante il momento torcente.

La relazione che lega il momento torcente all'angolo di torsione si ottiene ricorrendo alla proposizione a) del § 5, di cui non abbiamo ancora tenuto conto. Applicandola alla linea chiusa s, avremo:

$$\int_s \tau\, ds = 2 G \theta \sigma,$$

e sostituendo a τ il suo valore, dato dalla formula (18):

$$\int_s \frac{M}{2\sigma e}\, ds = 2 G \theta \sigma:$$

e poichè $\frac{M}{2\sigma}$ è costante

$$\frac{M}{2\sigma}\int_s \frac{ds}{e} = 2 G \theta \sigma .$$

Poniamo:

$$\int_s \frac{ds}{e} = \frac{s}{\epsilon},$$

ovvero:

$$\epsilon = \frac{s}{\int_s \frac{ds}{e}}, \tag{19}$$

ove con s indichiamo la lunghezza totale della linea s. La quantità ϵ ci rappresenta un valore medio dello spessore e, che in generale supponiamo variabile. Se esso è costante sarà evidentemente $\epsilon = e$.

Avremo dunque:

$$\frac{Ms}{2\sigma\epsilon} = 2 G \theta \sigma,$$

e risolvendo rispetto a θ:

$$\theta = \frac{Ms}{4 G \sigma^2 \epsilon}. \tag{20}$$

Questa formula, e l'altra:

$$\tau = \frac{M}{2\sigma e},$$

la quale, in via d'approssimazione possiamo ritenere che rappresenti la tensione lungo tutto lo spessore e, risolvono il problema della torsione, per i cilindri cavi, a spessore piccolissimo. Esse sarebbero rigorose se lo spessore si considerasse infinitesimo.

7. — La formula (20), posto

$$\frac{M}{\theta} = \rho,$$

può anche scriversi

$$\rho = 4G\frac{\sigma^2\epsilon}{s}.$$

Il rapporto ρ fra il momento torcente, e l'angolo di torsione, possiamo chiamarlo *resistenza del cilindro alla torsione*. Abbiamo così il teorema che " *in un cilindro cavo, a spessore piccolissimo, la resistenza alla torsione è direttamente proporzionale allo spessore medio, e al quadrato dell'area interna, e inversamente proporzionale alla lunghezza del perimetro* ", chiamando *spessore medio* quello definito dalla formula (19), *perimetro* la linea a cui possiamo supporre ridotta la sezione, ed *area interna* quella che essa racchiude.

Per fare un esempio, supponiamo che il cerchio s_1, e la linea sinusoidale s_2, entro cui è racchiusa una stessa area (fig. IV),

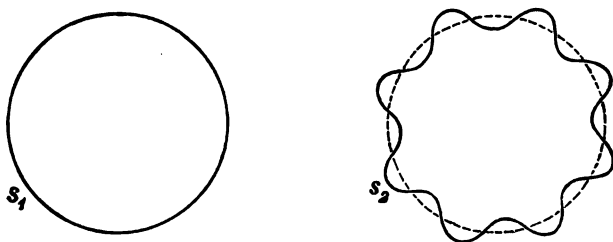



Fig. IV.

rappresentino le sezioni di due cilindri cavi, costituiti della stessa materia, ed aventi lo stesso spessore medio, o, come caso particolare, uno stesso spessore costante.

Il primo cilindro, la cui sezione ha un perimetro minore, avrà una resistenza alla torsione maggiore del secondo; e si otterrà il rapporto tra le resistenze, prendendo l'inversa del rapporto tra i perimetri.

Ora invece confrontiamo tra loro le resistenze alla torsione dei cilindri cavi, a spessore medio uguale, le cui sezioni sono rappresentate dalle linee s, s', s'', s''' (fig. V), di ugual lunghezza,

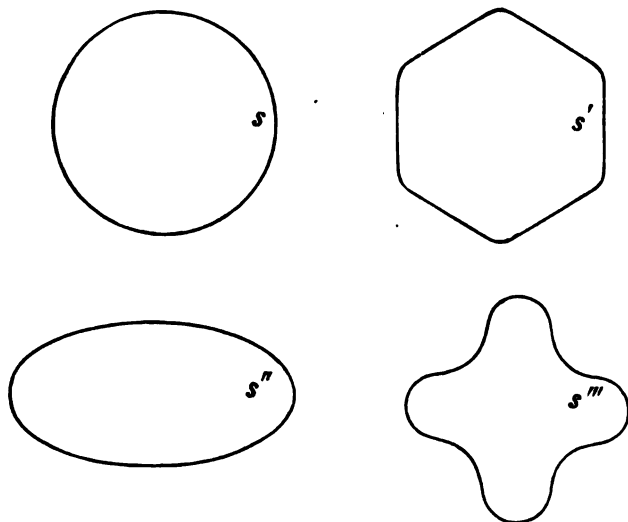



Fig. V.

ma delle quali la prima, che è un circolo, racchiude nel suo interno un'area maggiore delle altre. La resistenza alla torsione sarà massima, anche in questo caso, per il cilindro a sezione circolare; e i rapporti tra le resistenze dei diversi cilindri si otterranno prendendo i rapporti tra i quadrati delle relative aree interne.

Indicando, per semplicità, con 1 la resistenza del primo cilindro, e chiamando ρ', ρ'', ρ''' le resistenze degli altri tre, si troverà all'incirca:

$$\rho' = 0{,}87, \qquad \rho'' = 0{,}70, \qquad \rho''' = 0{,}46.$$

Sarebbe facile verificare coll'esperienza l'esattezza di questi risultati, i quali del resto appariscono in piena armonia con quello che il semplice criterio fa prevedere.

Nouvelle formule pour la différentiation d'une certaine classe de séries trigonométriques;

Note de M. LERCH à Fribourg (Suisse).

En 1894 j'ai donné une règle pour obtenir la dérivée de la fonction (*)

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \sin 2\nu x\pi$$

et qui consiste dans l'équation

$$f'(x) \cdot \frac{\sin x\pi}{\pi} = -c_1 \sin x\pi + \sum_{1}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin(2\nu+1)x\pi.$$

Bien que les conditions sous lesquelles cette relation a lieu, sont satisfaites dans plusieurs cas qui se présentent naturellement et appartiennent donc à une classe de problèmes qu'on appelle utiles, ces résultats et les autres analogues établis dans les notes citées ne s'appliquent pas au cas où les quantités c_ν ont des signes différents.

Sous ce point de vue il peut avoir quelque intérêt, si j'établirai une règle permettant d'obtenir la dérivée de la fonction $f(x)$ sous l'hypothèse que les sommes

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n$$

tendent vers m limites différentes pour n indéfiniment croissant, de manière que la limite sera déterminée en faisant parcourir n une série arithmétique de module m.

Je vais d'abord établir un lemme qui nous sera indispen-

(*) " Comptes rendus de Paris ", 2e sem. Un peu plus complètement dans les " Annales de l'École Normale Supérieure ", T. XII, 1895, et dans le " Bulletin général de l'Académie de Prague ", T. V.

sable dans la suite et qui présente d'ailleurs l'intérêt par son analogie avec une question traitée par Gauss. Il s'agit de prouver que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{2x\pi i(w+\nu)}}{w+\nu}$$

s'exprime sous forme finie lorsque w est un nombre rationnel; j'ai développé les calculs dans un mémoire publié par l'Académie de Prague (*) et je me borne donc à vérifier le résultat qui est

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{a}{m}+n} e^{2x\pi i\left(\frac{a}{m}+n\right)} = -\sum_{\kappa=1}^{m} e^{-\frac{2\kappa a\pi i}{m}} \log\left(1-e^{\frac{2\pi i}{m}(x+\kappa)}\right).$$

On suppose que l'entier m soit positif et plus grand que un, puis que l'entier a appartient à la suite $1, 2, 3, \ldots m$; le logarithme doit avoir sa partie imaginaire contenue entre $-\pi$ et $+\pi$, et x peut être supposé réel, mais fractionnaire, sans quoi le résultat manquerait du bon sens, le premier membre étant divergent et le deuxième devenant infini.

Pour vérifier la formule (1) j'emploie la formule élémentaire pour le développement du $\log(1+z)$ qui donne

$$-\log\left(1-e^{\frac{2\pi i}{m}(x+\kappa)}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} e^{\frac{2\nu\pi i}{m}(x+\kappa)};$$

multiplions par $e^{-\frac{2\kappa a\pi i}{m}}$ et ajoutons pour $\kappa = 1, 2, \ldots m$; la somme ainsi formée S constitue le deuxième membre de la formule à vérifier, et peut s'écrire

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} e^{\frac{2\nu\pi i}{m}x} \sum_{\kappa=1}^{m} e^{\frac{(\nu-a)\pi i}{m}\kappa}.$$

Or la somme intérieure ne diffère de zéro que lorsque $\nu - a$

(*) " Různé výsledky v theorii funkce gamma "; Mémoires (rozpravy) de Prague, V^e année, n° 14; 1896.

est un multiple de m et a pour valeur m; on devra donc prendre $\nu = a + mn$, $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ ce qui donne

$$S = m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a + mn} e^{\frac{2x\pi i}{m}(a + mn)}$$

ce qui n'est autre chose que la série (1).

Cela étant, considérons la série trigonométrique

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} e^{2\nu x\pi i}, \tag{2}$$

et en posant

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_\nu = C_\nu, \tag{3}$$

employons l'identité bien connue d'Abel qui donne

$$\sum_{1}^{m.n+1} \frac{c_\nu}{\nu} e^{2\nu x\pi i} = \sum_{\nu=1}^{mn} C_\nu \left(\frac{e^{2\nu x\pi i}}{\nu} - \frac{e^{2(\nu+1)x\pi i}}{\nu + 1} \right) + C_{mn+1} \frac{e^{2(mn+1)x\pi i}}{mn + 1}.$$

Si l'on suppose que les limites

$$\lim_{\mu=\infty} C_{\varrho+m\mu} = A_\varrho \qquad (\rho = 1, 2, 3, \ldots m) \tag{4}$$

existent, les quantités C_ν resteront au-dessous d'une limite indépendante de ν, et le terme

$$C_{mn+1} \frac{e^{2(mn+1)x\pi i}}{mn + 1}$$

disparaîtra pour n infini. Il s'ensuit

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{mn} C_\nu \left(\frac{e^{2\nu x\pi i}}{\nu} - \frac{e^{2(\nu+1)x\pi i}}{\nu + 1} \right).$$

Posons maintenant

$$C_{\varrho+\mu m} = A_\varrho + B_{\varrho+\mu m} \tag{4^a}$$

de la sorte que les quantités B_n tendent vers zéro pour n infini, et écrivons l'équation précédente comme il suit:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{mn} B_\nu \left(\frac{e^{2\nu x\pi i}}{\nu} - \frac{e^{2(\nu+1)x\pi i}}{\nu+1} \right) +$$

$$+ \sum_{\varrho=1}^{m} A_\varrho \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{e^{2x\pi i(\varrho+\mu m)}}{\rho+\mu m} - \frac{e^{2x\pi i(\varrho+1+\mu m)}}{\rho+1+\mu m} \right).$$

La fonction $f(x)$ se compose donc de deux parties dont l'une est la limite

$$(5) \qquad \Phi(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{mn} B_\nu \left(\frac{e^{2\nu x\pi i}}{\nu} - \frac{e^{2(\nu+1)x\pi i}}{\nu+1} \right)$$

et l'autre

$$(6) \qquad \Psi(x) = \frac{1}{m} \sum_{\varrho=1}^{m} A_\varrho \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{e^{2mx\pi i\left(\frac{\varrho}{m}+\mu\right)}}{\frac{\varrho}{m}+\mu} - \frac{e^{2mx\pi i\left(\frac{\varrho+1}{m}+\mu\right)}}{\frac{\varrho+1}{m}+\mu} \right)$$

est analytique et simple.

Ce point établi, supposons que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \, e^{2\nu x\pi i}$$

soit uniformément convergente dans un certain intervalle $(x_0 \ldots x_1)$ intérieur à l'intervalle $(0 \ldots 1)$; la série

$$\sum_{1}^{\infty} B_\nu \left(e^{2\nu x\pi i} - e^{2(\nu+1)x\pi i}\right)$$

sera de même uniformément convergente et son intégration évidemment légitime prouve que l'on a

$$(7) \qquad \Phi'(x) = 2\pi i \left(1 - e^{2x\pi i}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \, e^{2\nu x\pi i}.$$

Il ne reste qu'à différentier la fonction $\Psi(x)$. En changeant x en mx et a en ρ ou $\rho+1$ la formule (1) donne

$$\Psi_\varrho(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{e^{2mx\pi i\left(\frac{\varrho}{m}+\mu\right)}}{\frac{\varrho}{m}+\mu}=-\sum_{\varkappa=1}^{m}e^{-\frac{2\varkappa\varrho\pi i}{m}}\log\left(1-e^{2\pi i\left(x+\frac{\varkappa}{m}\right)}\right),$$

puis la quantité

$$\Psi_{m+1}(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{e^{2mx\pi i\left(\frac{m+1}{m}+\mu\right)}}{\frac{m+1}{m}+\mu}$$

s'écrira sous la forme

$$\Psi_{m+1}(x)=\Psi_1(x)-me^{2x\pi i},$$

de sorte que

$$\Psi(x)=\frac{1}{m}\sum_{\varrho=1}^{m-1}A_\varrho(\Psi_\varrho(x)-\Psi_{\varrho+1}(x))+\frac{1}{m}A_m(\Psi_m(x)-\Psi_1(x))+$$
$$+A_m e^{2x\pi i}.$$

Cela étant, on trouve aisément la formule

$$\Psi'_\varrho(x)=2m\pi i\,\frac{e^{2\varrho x\pi i}}{1-e^{2mx\pi i}},$$

d'où nous aurons

$$\Psi'(x)=2\pi i\sum_{\varrho=1}^{m-1}A_\varrho\,\frac{e^{2\varrho x\pi i}-e^{2(\varrho+1)x\pi i}}{1-e^{2mx\pi i}}+$$
$$+2\pi i\,A_m\,\frac{e^{2mx\pi i}-e^{2x\pi i}}{1-e^{2mx\pi i}}+2\pi i\,A_m\,e^{2x\pi i}$$

ou bien

$$\psi'(x)=\frac{2\pi i(1-e^{2x\pi i})}{1-e^{2mx\pi i}}\sum_{\varrho=1}^{m}A_\varrho\,e^{2\varrho x\pi i},$$

ce qu'on peut écrire

$$\Psi'(x) = 2\pi i \frac{\sin x\pi}{\sin mx\pi} \cdot \sum_{\varrho=1}^{m} A_\varrho e^{(2\varrho+1-m)x\pi i}. \tag{8}$$

On a donc le résultat suivant:

« Si les quantités

$$c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots$$

sont telles que les sommes

$$C_\nu = c_1 + c_2 + c_3 \ldots + c_\nu$$

engendrent des limites finies et déterminées

$$\lim C_{mn+1} = A_1,\ \lim C_{mn+2} = A_2, \ldots\ \lim C_{mn} = A_m,\ (n = \infty),$$

et que les différences

$$C_{mn+\varrho} - A_\varrho = B_{mn+\varrho}$$

satisfont à la condition que la série

$$\sum_1^\infty B_\nu e^{2\nu x\pi i}$$

soit uniformément convergente dans un certain intervalle $(x_0 \ldots x_1)$, tout intérieur à $(0 \ldots 1)$, la dérivée de la fonction

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{c_\nu}{\nu} e^{2\nu x\pi i} \qquad (x_0 \leq x \leq x_1)$$

aura pour valeur l'expression

$$f'(x) = \frac{\sin x\pi}{\sin mx\pi} \cdot 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{m} A_\varrho e^{(2\varrho+1-m)x\pi i} + 4\pi \sin x\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu e^{(2\nu+1)x\pi i}.$$

On suppose en même temps que mx ne soit pas entier. Il est inutile d'énoncer les théorèmes qui en résultent en séparant les parties réelles et les parties imaginaires.

Contribuzione allo studio degli Entomostraci dei terreni pliocenici del Piemonte e della Liguria;

Nota del Dott. GIUSEPPE CAPEDER.

(Con una tavola).

L'ordine degli Entomostraci Ostracodi è ricco di molte famiglie, fra le quali quelle delle *Citeridi* e delle *Cipridi* acquistano nel terziario importante sviluppo e particolarmente i loro generi: *Cythere, Cythereis, Cytherella, Cytheropteron, Cypris, Bairdia.* Avendo avuto occasione di esaminare parecchie forme di questi Ostracodi appartenenti al pliocene ligure-piemontese e di scoprirne parecchie non ancora conosciute, trovo utile il farne argomento di breve nota, anche in considerazione della scarsità dei lavori che finora si possiedono su questo argomento in Italia (1). In tale ricerca mi furono di valido aiuto il Prof. Parona, dandomi i mezzi ed i consigli necessari allo studio, ed il signor Forma, fornendomi il materiale da lui stesso raccolto con solerte cura ed intelligenza; ai quali perciò mi è sommamente grato di rinnovare qui i miei più sentiti ringraziamenti. La maggior parte del materiale raccolto proviene dal *piacenziano* delle seguenti località: Crescentino, Pino d'Asti, Arignano, Villalvernia (Piemonte), Bordighera, Albenga (Liguria): pochissime forme invece, ma in numerosi individui, furono riscontrate nell'*astiano* e queste tutte comuni col *piacenziano.* Per agevolare lo studio, ho figurato nella tavola tutti questi Ostracodi coll'ingrandimento di 22 diametri, talchè è possibile apprezzarne a colpo d'occhio le relative dimensioni; ciò che facilita d'assai la comparazione delle varie forme.

Dai risultati dello studio di questa faunula ho potuto dedurre come la più parte delle forme trovate appartengano al

(1) G. Seguenza, *Le formazioni terziarie di Reggio (Calabria),* " Atti R. Acc. Lincei ", serie III, vol. IV, 1880. — Id., *Il Quaternario di Rizzolo,* " Nat. Siciliano ", anno 3°, 1883. — G. Terrigi, *Il Calcare (Macco) di Palo e sua fauna microscopica,* " Atti R. Acc. Lincei ", serie 4ª, vol. VI, 1889.

piacenziano ove abbonda il genere *Cythere*, mentre che nell'*astiano*, per quanto mi risulta finora, non riscontransi che i generi *Cytherella, Cypris* e *Bairdia,* dei quali abbondano gli individui ma scarseggiano le forme. Inoltre mi risulta che sette forme, le *Cythere cytheropteroides, emaciata, lauta, punctata, Stimpsoni, senilis* e la *Bairdia subdeltoidea*, vivono ancora nei mari attuali; che il *Cytheropteron triangulare*, la *Cypris longa* e la *Bairdia subdeltoidea*, datano la loro comparsa dal cretaceo; che infine soltanto le *Cythere emaciata, hystrix, cornuta, ceratoptera, punctata, senilis, compressa*, la *Bairdia arcuata* e *subdeltoidea,* fra le 30 forme da me riconosciute, erano finora note per i terreni pliocenici italiani.

DESCRIZIONE DELLE FORME

Cythere H-scripta n. f., fig. 1, a, b, c.

Questa forma ha qualche affinità colla *Cyt. multicostata* Bosq., colla *Cyt. vermiculata* Bosq., e colla *Cyt. rugosa* Terr.: però differisce da tutte per la disposizione delle 4 o 5 costole che si anastomizzano verso il centro della conchiglia, assumendo in quegli individui in cui le creste mediane si atrofizzano, l'apparenza di un H. Le valve sono ovali, con un becco nella parte posteriore; la loro superficie è rugosa, ed i margini sono percorsi da una rilevata cresta, che in corrispondenza del dente cardinale anteriore porta un tubercolo. — *Lungh.* mm. 0,8; *alt.* mm. 0,5. — Si trova questa *Cythere* nel *piacenziano* di VILLALVERNIA e di PINO D'ASTI.

Cythere cytheropteroides, Brady, fig. 2, a, b, c.

1880. *Cyt. Cytherop.*, BRADY, *Report on the Ostracoda dredged by H. M. S.* CHALLENGER, *Zoology,* vol. 1°, pag. 78, tav. XV, fig. 5, *a-d.*

Valve ovali, a superficie liscia, anteriormente e posteriormente provviste di sporgenze dentiformi; margine dorsale leggermente incurvato con piccolo tubercolo cardinale. I miei esemplari differiscono dai tipici per avere la cresta mediana che termina con due denti invece che con uno solo, differenza che

non ho stimato sufficiente per distinguernela. — *Lungh.* mm. 0,7; *alt.* mm. 0,4. — Trovai questa specie solamente nel *piacenziano* del RIO TORSERO presso ALBENGA.

Cythere clavigera, n. f., fig. 3, a, b, c.

Le valve di questa *Cythere* sono quadrangolari, provviste nella parte anteriore di una serie di piccole sporgenze. La parte posteriore è priva di scabrosità, e la vôlta dorsale è percorsa da due carene ottuse di cui la posteriore è assai piccola. Tutta la superficie poi è seminata di punti incavati a forma di rombo e la regione anteriore porta un contorno sagittiforme, che termina posteriormente al tubercolo carenale. Questa specie potrebbe venir confusa colla *Cyt. senilis*, Jones, o colla *Cyt. lauta*, Brady, ma è facile lo scorgerne le differenze, perchè le sucitate *Cythere* offrono la carena mediana più sporgente della ventrale, ed inoltre la conchiglia ha forma più convessa. — *Lungh.* mm. 1; *alt.* mm. 0,55. — Trovasi nel *piacenziano* di ALBENGA (RIO TORSERO).

Cythere costellata, Roemer, fig. 4, a, b.

1838. *Cytherina cost.*, ROEMER, *Die Cytherin. des Molasse Gebirges*, " Neues Jahr. f. Min. G. u. P. „ von Leonhard u. Bronn., pag. 517, tav. VI, fig. 24.

1852. *Cythere cost.*, BOSQUET, *Descrip. des Entomostr. foss. des terr. tert. de la France et de la Belgique*, " Mém. couronn. de l'Acad. de Belg. „, Tome XXIV, pag. 58, tav. II, fig. 11.

1856. *Cythere cost.*, JONES, *A Monogr. of the Tert. Entomostr. of England*, " Palaeont. Soc. „, pag. 32, tav. V, fig. 11.

Valve ovali, colla superficie ornata di 7 carene parallele, longitudinali, liscie e lucenti. Poco visibili i tubercoli cardinali. — *Lungh.* mm. 0,9; *alt.* mm. 0,5. Trovasi nel *piacenziano* di RIO TORSERO, di VILLALVERNIA, di CRESCENTINO.

Cythere denticulata, n. f., fig. 5; a, b, c.

Questa bella *Cythere* ha le valve a contorno subovale, ornate all'estremità anteriore da una serie di punte a clava. L'estremità posteriore termina con un lobo compresso munito di tre denti. Le valve portano fra la regione ventrale e l'asse lon-

gitudinale una carena composta da una serie di spine assai lunghe, informi, appiattite o bifide, di cui le più sviluppate sono le posteriori. Visibilissimo il tubercolo cardinale anteriore, che si trova in corrispondenza di due spine inserite sul margine dorsale. Sezione trasversale a forma subtriangolare, di cui due lati sono formati dalla carena. Questa specie ha qualche affinità colla *Cythere velivola* Brady; se ne distingue però nettamente pel margine relativamente liscio delle sue valve e per le dimensioni. *Lungh.* mm. 0,8; *alt.* mm. 0,5. — Trovasi nel *piacenziano* di Arignano.

Cythere Dumontiana, Bosquet, fig. 6, a, b.

1852. *Cyt. Dum.*, Bosquet, Op. cit., pag. 120, tav. VI, fig. 6, *a-d*.

Valve ovali, che posteriormente terminano con un lobo compresso, acuto, privo dei denti trovati dal Bosquet nella propria specie. Nella regione pettorale si trova una potente carena che finisce in un orlo arrotondato: essa è percorsa ai lati da una serie di punti concavi. — *Lungh.* mm. 0,78; *alt.* mm. 0,4. — Trovasi nel *piacenziano* di Pino d'Asti.

Cythere emaciata, Brady, fig. 7, a, b, c.

1866. *Cyt. em.*, Brady, " Brit. Assoc. Report ", pag. 210.
1870. *Cyt. em.*, Brady, *A Mon. of the Recent British Ostracoda*, " The Trans. of the Linnean Soc. of London ", vol. XXVI, pag. 414, tav. XXXI, fig. 31-37.
1874. *Cyt. em.*, Brady, *A Monog. of the post-tertiary Entomostr. of Scotland*, " The Palaeont. Soc. ", vol. XXVIII, pag. 161, tav. IX, fig. 14-17.
1880. *Cyt. em.*, Seguenza, *Le formazioni terziarie di Reggio (Calabria)*, " Atti R. Acc. Lincei ", serie 3ª, vol. VI, pag. 363.

Valve convesse, subquadrangolari, ad estremità anteriore obliquamente curva, posteriore tronca. La superficie è elegantemente ornata da 3 o 4 sporgenze longitudinali, da cui altre si dipartono seguendo varie direzioni. Lungo il margine anteriore le concavità assumono regolare forma quadrata e si dispongono parallelamente a detto margine. — *Lungh.* mm. 0,9; *alt.* mm. 0,5; — È abbondante nelle argille di Crescentino, rara in quelle delle altre località.

Cythere fimbriata, Münster, fig. 8, a, b, c.

1830. *Cyt. fimb.*, Münster, " Neues Jahr. f. Min. u. G. ", pag. 63.
1838. *Cyt. fimb.*, Roemer, Op. cit., pag. 518, tav. VI, fig. 29.
1894. *Cyt. fimb.*, Lienenklaus, *Mon. d. Ostrac. d. nordwest. Tertiärs*, " Zeit. d. Deut. geol. Gesell. ", pag. 216.
1897. *Cyt. fimb.*, Lienenklaus, *Die Ostrac. a. d. Miocaen v. Ortenburg in Nieder-Baiern*, " Sitz. d. math. phys. cl. d. k. b. Akad. d. Wiss. zu München ", pag. 195.

Valve subtetragone, munite anteriormente e posteriormente di fini denticoli. Una cresta dorsale ed un'altra marginale si trovano sulla liscia loro superficie. — *Lungh.* mm. 0,85; *altezza* mm. 0,45. — Trovasi nel *piacenziano* di Villalvernia, di Pino d'Asti e di Crescentino.

Cythere Formae, n. f., fig. 9, a, b.

Valve a contorno dentellato, terminate nella parte posteriore in un lobo acuto finiente in punta smussata. La superficie appare punteggiata per un gran numero di incavi rotondeggianti o grossolanamente esagonali, e la vôlta dorsale delle valve è separata dalla regione pettorale per una carena, che s'eleva con dolce pendenza dal lato dorsale e cade quasi perpendicolarmente sul margine anteriore dal lato ventrale. Questa forma si avvicina al *Cytheropteron triangulare* Jones, ma ne differisce evidentemente, oltrechè per le dimensioni, anche per l'ornamentazione della sua superficie. — *Lungh.* mm. 0,7; *alt.* mm. 0,45. — Trovasi nel *piacenziano* di Pino d'Asti e nel rio Torsero presso Albenga.

Cythere hystrix, Reuss., fig. 10, a, b, c.

1850. *Cypridina hist.*, Reuss., *Die foss. Entomostr. des oesterr. Tertiärbeck*, " Haidinger Naturw. Abhandl. ", pag. 74, tav. X, fig. 6.
1880. *Cyt. histr.*, Seguenza, Op. cit., pag. 124.

Valve ovali, a margini seghettati per una serie di fine sporgenze che pur coprono tutta la superficie della conchiglia. I miei esemplari corrispondono per la forma alla fig. e descrizione date dal Reuss, però le spine non sono tutte bifide come nei suoi,

ma bensì alcune si ramificano, altre rimangono semplici. — *Lungh.* mm. 1; *alt.* mm. 0,6. — Abbonda nel *piacenziano* di RIO TORSERO (ALBENGA).

Cythere cornuta, Roemer, *var. gibbosa*, fig. 11, a, b.

Ho chiamato così questa varietà perchè differisce dal tipo di ROEMER e dalle forme assai diverse riferite alla stessa specie da REUSS, BOSQUET, JONES, EGGER, SPEYER, LIENENKLAUS, SEGUENZA, per la gibbosità della carena, che termina in punta assai più breve e piccola. — *Lungh.* mm. 0,9; *alt.* mm. 0,45. — Trovasi rara al RIO TORSERO, abbondante ad ARIGNANO.

Cythere Jonesii, Baird, fig. 12, a, b, c.

1850. *Cythereis Jon.*, BAIRD, pag. 175, tav. XX, fig. 1.
1863. *Cyt. subcoronata*, O. SPEYER, *Die Fossilen aus d. Casseler Tertiärbild.*, pag. 38, tav. IV, fig. 9, *a-e*; fig. 10.
1865. *Cythereis spectabilis*, SARS, *Overs Norges mar. Ostracod.*, pag. 46.
— *Cythereis subcoronata*, BRADY, " Trans. Zool. Soc. ", vol. V, pag. 384, tav. IX, fig. 9, *a-e*.
1868. *Cyt. Jonesii*, BRADY, pag. 418, tav. XXX, fig. 13-16.
1874. *Cyt. Jon.*, BRADY, Op. cit., pag. 171, tav. XII, fig. 4-6.

Questa forma venne stupendamente figurata dal BRADY, sicchè mi fu facile il riconoscere la perfetta identità della forma tipica cogli individui da me esaminati. Le valve sono subquadrangolari, con margine elevato, sporgente e spinoso, specialmente dal lato dorsale ove si rendono ben visibili le due orecchiette cardinali coi loro tubercoli. La vôlta delle valve è sormontata da una cresta asimmetrica assai spinosa, che termina con una lunga sporgenza a clava. — *Lungh.* mm. 1; *alt.* mm. 0,4. — Trovasi nel *piacenziano* di RIO TORSERO presso ALBENGA, di BORDIGHERA, di ARIGNANO.

Cythere Jonesii, *var. ceratoptera*, Bosquet, fig. 13.

1852. *Cyt. ceratoptera*, BOSQUET, Op. cit., pag. 114, tav. VI, fig. 2.
1856. *Cyt. ceratoptera*, JONES, Op. cit., pag. 39, tav. IV, fig. 1.
1863. *Cyt. monoceros*, O. SPEYER, Op. cit., pag. 36, tav. IV, fig. 8, *a-c*.

1874. *Cyt. Jonesii*, var. *ceratop.*, BRADY, Op. cit., pag. 171, tav. XII, fig. 7.
1880. *Cyt. cerapt.*, SEGUENZA, Op. cit., pag. 125.
1894. *Cyt. fimbriata*, LIENENKLAUS, Op. oit., pag. 216.

Pure questa forma venne benissimo figurata e distinta dalla tipica *Cyt. Jonesii* dal Brady. Si distingue dalla forma tipica per non avere la sommità della carena, come pure i margini anteriore dorsale e posteriore, provvisti dei denticoli che molto sviluppati e sporgenti si trovano nella *Cyt. Jonesii*. — *Lunghezza* mm. 0,9; *alt.* mm. 0,5. — Trovasi abbondante colla tipica *Jonesii* nel *piacenziano* di ARIGNANO e del RIO TORSERO presso ALBENGA.

Cythere Jurinei, Münster, fig. 14, a, b.

1830. *Cyt. Jur.*, MÜNSTER, Op. cit., pag. 62.
1838. ID., RÖMER, Op. cit., pag. 516, tav. VI, fig. 12.
1852. ID., BOSQUET, Op. cit., pag. 56, tav. II, fig. 9, *a-d*.
1858. ID., var. *semiornata*, EGGER, *Die Ostracoden der Miocän Schichten bei Ortenburg in Nieder-Bayern*, pag. 418, tav. XVI, fig. 5, *a-f*.
1863. ID., O. SPEYER, Op. cit., pag. 15, tav. II, fig. 5. *a-d*.
1894. *Cyt. Jurin.*, LIENENKLAUS, Op. cit., pag. 175.
1897. *Cyt. Jurin.*, LIENENKLAUS, Op. cit., pag. 187.

Valve ovali, ornate da 4 o 5 solchi lisci e senza i punti incavati osservati dal BOSQUET nella forma da lui riferita a questa specie. — *Lungh.* mm. 0,95; *alt.* mm. 0,45. — Trovasi nel *piacenziano* di VILLALVERNIA e di CRESCENTINO.

Cythere laticarina, Brady, fig. 15, a, b.

1868. *Cyt. latic.*, BRADY, Op. cit., pag. 412, tav. XXXI, fig. 1-4.
1874. ID., BRADY, Op. cit., pag. 158, tav. IX, fig. 23-26.

Valve subquadrangolari, a superficie segnata da solchi poliedrici, che si fanno più ampi nella regione anteriore e posteriore. Visibilissimo il tubercolo cardinale. — *Lungh.* mm. 0,95; *alt.* mm. 0,55. — Frequente nel *piacenziano* di RIO TORSERO presso Albenga, di CRESCENTINO, di VILLALVERNIA.

Cythere villosa, Sars., fig. 16, a, b.

1865. *Cythereis vill.*, Sars., Op. cit., pag. 42.
1868. *Cyt. vill.*, Brady, Op. cit., pag. 411, tav. XXIX, fig. 28-32.
1874. *Cyt. vill.*, Brady, Op. cit., pag. 157, tav. III, fig. 7-13.

Valve semilunari, a superficie coperta da cavità circolari, ellissoidali, che lungo i margini si allineano regolarmente. — *Lungh.* mm. 0,6; *alt.* mm. 0,45. — Trovasi nel *piacenziano* di Crescentino.

Cythere lauta, Brady, fig. 17, a, b.

1880. *Cyt. lauta,* Brady, Op. cit., pag. 85, tav. XXI, fig. 4, *a-d.*

Valve subquadratiche, a margine anteriore e posteriore dentellato e percorso da una carena che termina all'orecchietta cardinale anteriore. Un'altra sinuosa carena percorre la vôlta delle valve obliquamente dirigendosi dal lato ventrale anteriore al lato dorsale posteriore. La superficie delle valve è ornata da molte concavità pentagone. — *Lungh.* mm. 0,85; *alt.* mm. 0,45. — Trovasi nel *piacenziano* di Crescentino, di Villalvernia, di Pino d'Asti.

Cythere mirabilis, Brady, fig. 18, a, b.

1868. *Cyt. mirab.*, Brady, Op. cit., pag. 415, tav. XXIX, fig. 7-8.
1874. *Cyt. mirab.*, Brady, Op. cit., pag. 167, tav. VII, fig. 22-27 e tav. XV, fig. 13-16.

I miei esemplari sono più regolarmente quadrangolari, del resto concordano per gli altri caratteri colla tipica forma del Brady. Ben visibile in tutti gli esemplari la serie di solchi concentrici sul margine ventrale ed anteriore, e le fossette poligonali della parte superiore della valva e del margine dorsale. — *Lunghezza* mm. 0,95; *alt.* mm. 0,5. — Trovasi nel *piacenziano* di Crescentino e di Villalvernia.

Cythere pectinata, Bosquet, fig. 19, a, b, c, d.

1852. *Cyt. pect.*, Bosquet, Op. cit.. pag. 113, tav. VI, fig. 1, *a-d.*

Questa *Cythere* corrisponde alla figura del Bosquet; però la carena finisce posteriormente con tre denti; inoltre le estremità

delle valve sono provviste di un margine elevato con una serie di 7 ad 8 spine anteriormente e 3 o 4 posteriormente. Questo per le specie provenienti dalle sabbie di CRESCENTINO. Gli esemplari di ARIGNANO sono alquanto più piccoli, più convessi, a cresta più tagliente, provvista di tre spine più acute. — *Lunghezza* mm. 0,8; *alt.* mm. 0,4. — Trovasi abbondante nel *piacenziano* di CRESCENTINO; più rara ad ARIGNANO.

Cythere punctata, Münster, fig. 20, a, b.

1830. *Cyt. punct.*, MÜNSTER. Op. cit., pag. 62.
1838. *Cytherina punct.*, ROEMER, Op. cit., pag. 515, tav. VI, fig. 2.
1850. *Cypridina punct.*, REUSS., Op. cit., pag. 68, tav. IX, fig. 24. — *Cyprid punctatella*, ID., pag. 65, tav. IX, fig. 15.
1850. *Cyt. convexa*, BAIRD, *Brit. Ent.*, pag. 174, tav. XXI, fig. 3.
1852. *Cyt. punctatella*, BOSQUET, Op. cit., pag. 75, tav. III, fig. 12.
1856. *Cyt. punct.*, JONES, Op. cit., pag. 24, tav. II, fig. 5, *a-h*.
1858. *Cyt. punct.*, EGGER, Op. cit., pag. 424, tav. XVII, fig. 5, *a-d*.
1863. *Cyt. ampli-punct.*, SPEYER, Op. cit., pag. 13, tav. II, fig. 3, *a-e*; fig. 4.
1870. *Cyt. convexa*, BRADY, Op. cit., pag. 401, tav. XXIX, fig. 19-27.
1880. *Cyt. punct.*, SEGUENZA, Op. cit., pag. 78, 124, 191, 288, 324 e *Cyt. convexa*, pag. 191, 288, 363.
1883. *Cyt. convexa*, SEGUENZA, *Il quaternario di Rizzolo*, pag. 20.
1889. *Cyt. punct.*, TERRIGI, *Il calcare (Macco) di Palo e sua fauna microscopica*, " Atti R. Acc. Lincei ", vol. VI, serie 4ª, pag. 99, tav. I, fig. 4-7.
1894. *Cyt. punct.*, LIENENKLAUS, Op. cit., pag. 193.
1897. *Cyt. punct.*, LIENENKLAUS, Op. cit., pag. 191.

Valve a contorno subovale, colla superficie ornata da una serie di cavità subesagonali concentriche. — *Lungh.* mm. 0,8; *alt.* mm. 0,5. — Assai abbondante nel *piacenziano* del RIO TORSERO presso ALBENGA e di VILLALVERNIA, di ARIGNANO, di PINO D'ASTI.

Cythere spinosissima, n. f., fig. 21, a, b.

Valve subtetragone, completamente coperte da sottilissimi aculei diritti e mai ramificati. Ben visibili le due orecchiette cardinali, di cui l'anteriore porta il solito tubercolo caratteristico. Ha questa forma una qualche somiglianza colla *Cypridina hystrix* Reuss e colla *Cypridina coelacantha* Reuss, ma differisce da entrambe per avere le spinosità semplici e mai perfo-

rate o ramificate all'apice; se ne stacca inoltre evidentemente per la forma esterna alquanto più depressa. — *Lungh.* mm. 0,7; *alt.* mm. 0,45. — Trovasi nel RIO TORSERO presso ALBENGA.

Cythere Stimpsoni, Brady, fig. 22, a, b.

1880. *Cyt. Stimp.*, BRADY, Op cit., pag. 85, tav. XXI, fig. 6, *a-h*.
1869. *Cyt. Stimp.*, BRADY, " Ann. and. Mag. Nat. Hist. ", serie 4ª, vol. III, pag. 48, tav. VII, fig. 9-12.

Valve ovali, anteriormente e posteriormente denticolate, colla superficie ornata da numerose cavità irregolari e da sporgenze dirette longitudinalmente. — *Lungh.* mm. 0,8; *alt.* mm. 0,45. — Trovasi a CRESCENTINO ed a PINO D'ASTI.

Cythere tricarenata, n. f., fig. 23, a, b. c.

Le valve di questa *Cythere* sono percorse da tre sporgenze longitudinali, di cui la più potente si erge nella regione pettorale e termina con una punta; la seconda più bassa corre lungo l'asse longitudinale e termina pure con una breve punta; la terza è compresa fra i due tubercoli cardinali è poco sporgente, sprovvista di aculei. Le regioni anteriore e posteriore sono munite di denti clavati. Questa *Cythere* s'avvicina alla *Cyt. quadriaculeata* Brady, ma ne differisce per essere provvista della carena dorsale, dei denti alle estremità, oltrechè per le dimensioni. — *Lungh.* mm. 1; *alt.* mm. 0,5. — Trovasi nel *piacenziano* di ALBENGA (RIO TORSERO). È molto rara.

Cythere secata, n. f., fig. 24, a, b, c, d.

Questa *Cythere*, dalle valve subquadratiche, è sprovvista di aculei, ma munita di una serie di fossette quadrangolari che circondano specialmente il margine anteriore. La superficie è guernita di solchi longitudinali paralleli, bruscamente interrotti verso la regione mediana da un seno molto incavato. Il numero delle creste sporgenti è generalmente di tre o quattro, e queste sono contornate da incavi regolarmente disposti. Questa *Cythere* ha qualche rapporto con la *Cyt. multicostata* Bosq., *vermiculata*

Terrigi e *H. scripta*, n. f., ma ne differisce essenzialmente per avere le sporgenze longitudinali tronche verso il mezzo da un seno concavo e profondo. — *Lungh.* mm. 0,8; *alt.* mm. 0,5. — Trovasi nel *piacenziano* di VILLALVERNIA.

Cythereis senilis, Jones, fig. 25.

1856. *Cyt. senil.*, JONES, Op. cit., pag. 37, tav. III, fig. 8, *a*, *b*.
1880. *Cyt. senilis*, SEGUENZA, Op. cit., pag. 363.

Valve quadrangolari, allargate nella parte anteriore, tronche e dentellate nella posteriore. Due carene percorrono la loro superficie: una marginale ventrale, che s'incurva anteriormente e termina al tubercolo cardinale, l'altra posta lungo l'asse longitudinale. La cresta delle carene è provvista di tubercoli. — *Lungh.* mm. 0,7; *alt.* mm. 0,4. — È discretamente abbondante nel *piacenziano* di CRESCENTINO.

Cytherella compressa, Münster, fig. 26, a, b.

1830. *Cythere comp.*, MÜNSTER, Op. cit., pag. 64.
1838. *Cytherina comp.*, ROEMER, Op. cit., pag. 517, tav. VI, fig. 14. — *Cytherina aciculata*, pag. 517, tav. VI, fig. 21.
1850. *Cytherina comp.*, REUSS., Op. cit., pag. 14, tav. VIII, fig. 15, *a-b*.
1852. *Cytherella comp.*, BOSQUET, Op. cit., pag. 11, tav. I, fig. 1, *a-f*.
1856. *Cyt. comp.*, JONES, Op. cit., pag. 54, tav. V, fig. 21-23.
1858. *Cyt. comp.*, EGGER, Op. cit., pag. 404, tav. XV, fig. 2.
1863. *Cyt. Beyrichi*, SPEYER, Op. cit., pag. 54, tav. I, fig. 1.
1880. *Cyt. comp.*, SEGUENZA, Op. cit., pag. 78, 126, 194, 292.
1887. *Cyt. Beyrichi*, JONES, *On Tertiary Entomostraca*, " The Geol. Magaz. „ sett.-ott., pag. 458, tav. XI, fig. 19.
1894. *Cyt. comp.*, LIENENKLAUS, Op. cit., pag. 266.
1897. *Cyt. comp.*, LIENENKLAUS, Op. cit., pag. 207.

Valve reniformi, a superficie liscia e lucente. Sezione trasversale a contorno di un ovale allungato. — *Lungh.* mm. 0,9; *alt.* mm. 0,5. — Trovasi nel *piacenziano* di RIO TORSERO, di CRESCENTINO, di ARIGNANO, di VILLALVERNIA. È pure assai comune nelle sabbie gialle *astiane* del Piemonte.

Cytheropteron triangulare, Reuss, fig. 27, a, b, c.

1855. *Cythere triang.*, Reuss., " Zeit. Deut. geol. Gesell. ", VIII, pag. 279, tav. X, fig. 3.
1856. *Cythere triang.*, Jones, Op. cit., pag. 25, tav. VII, fig. 5, *a-g.*
1865. *Cythere tenuicristata*, Reuss., Op. cit., pag. 28, fig. 12.
1880. *Cyt.*on *mucronalatum*, Brady, Op. cit., pag. 140, tav. XXXIII, fig. 8. — *Cyt.*on *fenestratum*, pag. 139, tav. XXXIV, fig. 6.
1887. *Cyt.*on *triang.*, Jones, Op. cit., pag. 457, tav. XI, fig. 16.
1894. *Cythere triang.*, Lienenklaus, Op. cit., pag. 202.

Le valve sono ovali, con un sottilissimo orlo anteriore munito di numerosi denti acuti; esso è trasparente e lascia scorgere nel suo spessore linee divergenti dal centro. Sotto forte ingrandimento sulla liscia superficie si vedono numerosi punticini d'inserzione dei peli. Una cresta longitudinale spostata dall'asse verso la regione ventrale ne percorre la superficie, e questa porta qualche volta delle spine. — *Lungh.* mm. 1,35; *alt.* mm. 0,7; — È abbondante ad Arignano, Bordighera, Albenga; scarsa a Crescentino, Pino d'Asti, Villalvernia.

Cypris longa, Reuss, fig. 28.

1850. *Cyterina longa*, Reuss., Op. cit., pag. 53, t. XI, fig. 2.
1894. *Cytherella Beyrichi*, var. *elongata*; Lienenklaus, Op. cit., pag. 264.

Valve reniformi, ventralmente concave, molto convesse dorsalmente. La superficie lucida e liscia non lascia scorgere che una finissima punteggiatura al microscopio. — *Lungh.* mm. 0,9; *alt.* mm. 0,35. — Trovasi nel *piacenziano* di Crescentino, Villalvernia, Bordighera; abbondante nell'*astiano* dell'Astigiano.

Bairdia arcuata, Münster, fig. 29.

1830. *Cyt. arc.*, Münster, Op. cit., pag. 63.
1838. *Cyterina arc.*, Roemer, Op. cit., pag. 517, tav. VI, fig. 17.
1849. *Cyterina arc.*, Roemer, pag. 11, tav. VIII, fig. 7, *a, b.* — 1849. *Bairdia siliqua*, Jones, *Mon. Ent. cret. form. Engl.*, pag. 25, tav. V, fig. 16, *e-g.*
1850. *Cyterina arc.*, Reuss., Op. cit., pag. 51, tav. VIII, fig. 7.
1852. *Bairdia arc.*, Bosquet, Op. cit., pag. 32, tav. I, fig. 14, *a-d.*
1856. *Cytherideis flavida*, Jones, Op. cit., pag. 50, tav. IV, fig. 4, *a-c.*
1858. *Bairdia arc.*, Egger, Op. cit., pag. 405, tav. XIV, fig. 2, *a-e.*
1863. *B. arc.*, Speyer, Op. cit., pag. 41, tav. I, fig. 3.

1880. *B. arc.*, SEGUENZA, Op. cit., pag. 77.
1894. *B. arcuata*, LIENENKLAUS, Op. cit., pag. 169.
1997. *B. arc.*, LIENENKLAUS, Op. cit., pag. 187.

Valve ovali, arrotondate anteriormente, acuminate posteriormente. Il margine dorsale è arcuato, il ventrale leggermente concavo. Superficie convessa, lucente, con piccolissimi punticini d'inserzione di peli. — *Lungh.* mm. 1; *alt.* mm. 0,45. — Trovasi nel *piacenziano* di ALBENGA, CRESCENTINO, PINO D'ASTI.

Bairdia subdeltoidea, Münster, fig. 30.

1830. *Cythere subdel.*, MÜNSTER, Op. cit., pag. 64.
1835. ID., pag. 446.
1838. *Cytherina subdel.*, ROEMER, Op. cit., pag. 517, tav. VI, fig. 16.
1840. *Cyt. subdel.*, ROEMER, *Die Werst. d. nord. Kreid.*, pag. 105, tav. XVI, fig. 22.
1845. *Cyt. subdel.*, REUSS, *Die Werst. d. böhm. Kreid.*, pag. 16, tav. V, fig. 38.
1847. *Cyt. trigona*, BOSQUET, *Descr. d. Ent. foss. d. l. Craie d. Maestrich*, pag. 8, tav. 1, fig. 3, *a-e*.
1847. *Cyt. trigona*, BOSQUET, " Mém. Soc. R. Sc. d. Liège ", pag. 358, tav. I, fig. 3, *a-e*.
1849. *Baird. subd.*, JONES, Op. cit., pag. 23, tav. V, fig. 15, *a-f*.
1850. *Cyt. subdel.*, REUSS., Op. cit., pag. 9, tav. VIII, fig. 1, *a-b*.
1852. *Baird. subdel.*, BOSQUET, Op. cit., pag. 29, tav. I, fig. 13, *a-d*.
1856. *B. sub.*, JONES, Op. cit., pag. 52, tav. IV, fig. 2, *a-b* e tav. VI, fig. 1, *a, b, c*.
1858. *B. sub.*, EGGER, Op. cit., pag. 405, tav. XIV, fig. 1, *a-d*.
1863. *B. sub.*, SPEYER, Op. cit., pag. 43, tav. I, fig. 5, *a-c*.
1868. *B. inflata*, BRADY, Op. cit., pag. 388, tav. XXVII, fig. 9-17.
1874. *B. inflata*, BRADY, Op. cit., pag. 139, tav. XV, fig. 1-4.
1880. *B. sub.*, SEGUENZA, Op. cit., pag. 77, 191, 124, 288, 324, 362.
1883. *B. sub.*, SEGUENZA, Op. cit., p. 12.
1889. *B. sub.*, TERRIGI, Op. cit., pag. 98, tav. 1, fig. 9.
1894. *B. sub.*, LIENENKLAUS, Op. cit., pag. 168.
1897. *B. sub.*, LIENENKLAUS, Op. cit., pag. 187.

Valve dorsalmente arrotondate, che finiscono posteriormente in punta spostata verso il lato ventrale. Il lato dorsale ha il contorno di un semiesagono regolare, il ventrale è leggermente concavo nella sua parte mediana. La superficie è liscia, ma vista sotto forte ingrandimento presenta numerosi punticini d'inserzione dei peli. Verso la metà delle valve, specialmente se ben pulite ed impregnate di un liquido rifrangente, scorgesi una macchia con punti più trasparenti, caratteristica per le Bairdie. — *Lungh.* mm. 1,37; *alt.* mm. 0,8.— Trovasi abbondante nel RIO TORSERO, a BORDIGHERA, ad ARIGNANO, CRESCENTINO, VILLALVERNIA.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

a, valve viste dal di sopra; *b*, valve viste dal lato ventrale; *c*, valve viste dal di sotto: tutte all'ingrandimento di 22 diametri; *v. s.* valva sinistra; *v. d.* valva destra.

Fig. 1. *Cythere H-scripta* n. f. (v. s.).
„ 2. „ *cytheropteroides* Brady (v. s.).
„ 3. „ *clavigera* n. f. (v. s.).
„ 4. „ *costellata* Roemer (v. s.).
„ 5. „ *denticulata* n. f. (v. d.).
„ 6. „ *Dumontiana* Bosquet (v. s.).
„ 7. „ *emaciata* Brady (v. d.).
„ 8. „ *fimbriata* Münster (v. s.).
„ 9. „ *Formae* n. f. (v. d.).
„ 10. „ *hystrix* Reuss (v. s.).
„ 11. „ *cornuta* var. *gibbosa* Roemer (v. s.).
„ 12. „ *Jonesii* Baird (v. s.).
„ 13. „ „ var. *ceratoptera* Bosquet (v. s.).
„ 14. „ *Jurinei* Münster (v. s.).
„ 15. „ *laticarina* Brady (v. s.).
„ 16. „ *villosa* Sars (v. s.).
„ 17. „ *lauta* Brady (v. s.).
„ 18. „ *mirabilis* Brady (v. s.).
„ 19. „ *pectinata* Bosquet (v. d.).
„ 20. „ *punctata* Münster (v. s.).
„ 21. „ *spinosissima* n. f. (v. s.).
„ 22. „ *Stimpsoni* Brady (v. s.).
„ 23. „ *tricarenata* n. f. (v. d.).
„ 24. „ *secata* n. f. (v. s.).
„ 25. „ *senilis* Jones (v. s.).
„ 26. *Cytherella compressa* Münster (v. s.).
„ 27. *Cytheropteron triangulare* Reuss (v. s.).
„ 28. *Cypris longa* Reuss (v. s.).
„ 29. *Bairdia arcuata* Münster (v. s.).
„ 30. „ *subdeltoidea* Münster (v. s.).

Sull'età di alcuni terreni terziarii dell'Appennino;

Nota di FEDERICO SACCO.

Nello studio dell'Appennino italiano, specialmente di quella parte che si estende dall'Emilia alla Toscana ed all'Umbria, si va da alcuni anni accentuando attorno ad una importantissima formazione geologica un forte disaccordo fra quanto risulta al Geologo nel rilevamento in campagna e quanto conclude il Paleontologo dallo studio dei fossili.

Tale disaccordo, che già erasi iniziato oltre trent'anni fa, è diventato sempre più forte in questi ultimi anni coll'aumentare degli studi fatti in proposito, ed esso è tanto più deplorevole pel fatto che trattasi di una formazione che è una delle più estese e potenti nell'Appennino, cioè della formazione marnoso-arenacea nota generalmente col nome di *Macigno* con tutte le sue numerose modificazioni di *facies* e di costituzione più o meno marnosa o calcarea ecc.

Detta formazione dapprima ritenuta come molto antica, cioè come *terreno di transizione*, quindi confusa col Cretaceo, come è noto venne a poco a poco (verso la metà di questo secolo per opera di Pilla, Murchison, Savi, Meneghini, A. Sismonda, ecc.) staccata dal Cretaceo e invece riferita all'Eocene.

Fu il Bianconi che descrivendo le sue " *Escursioni geologiche e mineralogiche nel territorio Porretano*, Bologna, 1867 ", ma specialmente in uno dei suoi ultimi lavori (*Considerazioni intorno alla formazione miocenica dell'Appennino,* 1877), facendo risaltare l'analogia di alcune impronte di *Cassidaria* del *Macigno* di Porretta con altre consimili del Miocene di M. Paderno presso Bologna cominciò ad emettere il dubbio che anche il *Macigno* fosse miocenico.

Tale concetto accennava pure poco dopo il De Stefani in alcune osservazioni inserite nei Proc. Verb. della Soc. tosc. di

Scienze Nat. del 1878; in seguito lo stesso De Stefani avendo studiato " *I fossili di Dicomano in Toscana e della Porretta nel Bolognese*, 1880 ", collocava i terreni che li racchiudono nel *Miocene superiore* o nel *Sarmatiano*.

Poco dopo il medesimo autore nel suo lavoro intitolato " *Il Tortoniano dell'alta Valle del Tevere*, 1880 ", avendo esaminato i fossili che si raccolgono in certe zone marnoso-arenaceo-calcaree che si sviluppano tra Umbertide e Borgo S. Sepolcro, nonchè nel Perugino, li attribuì pure al Miocene superiore o *Tortoniano*, indicando anzi che il Foresti, a cui egli aveva comunicato detti fossili, li riteneva *sarmatiani*. Nello stesso anno anche il Bosniaski collocava il *Macigno* della Porretta e di Dicomano nel *Tortoniano* inferiore.

Nel 1881 l'interpretazione cronologica sovraccennata venne sempre più largamente svolta e confermata.

Infatti il Manzoni svolgeva l'idea del Bianconi nel suo studio " *Della Miocenità del Macigno e dell'unità dei terreni miocenici del Bolognese*, 1881 ", confortandola di numerosi dati paleontologici raccolti, oltre che a Porretta, in numerose altre località del Bolognese e della Toscana (Bacino del Mugello, Dicomano, S. Godenzo, ecc.).

Il De Stefani, di nuovo studiando " *Il Macigno di Porretta ed i terreni corrispondenti*, 1881 ", riconfermava la sua precedente conclusione.

Il Capellini, che fu tra i primi ad enunciare la presenza di fossili nel *Macigno* di Porretta, quando li illustrò nel suo lavoro " *Il Macigno di Porretta e le roccie a Globigerine dell'Appennino Bolognese*, 1881 ", ritenne conveniente raccordare l'arenaria a Bivalvi di Porretta e Monte Cavallo coll'orizzonte della Pietra Leccese, collocandola così nell'*Elveziano* o nel *Langhiano superiore*. Poco dopo a consimile conclusione giunse lo stesso autore nel suo studio sopra " *I calcari a Bivalvi di Monte Cavallo, Stagno e Casola nell'Appennino Bolognese*, 1881 ".

In questo periodo di tempo anche il Verri (1881, 1882, 1883), il Cafici ed altri trattando più o meno accidentalmente del *Macigno* della Porretta e di consimili terreni della Toscana e dell' Umbria li collocarono nel Miocene.

Più tardi il Gioli nel suo minuto studio sulla " *Lucina pomum Duj.*, 1887 ", attribuiva consimili formazioni, special-

mente dell'Appennino tosco-romagnolo, al Miocene medio, confondendovi però anche terreni ben più giovani cioè, a mio parere, *messiniani*.

Nella *Carta geologica d'Italia* del 1889 vediamo segnata come miocenica una immensa estensione di formazioni marnoso-arenacee (zona del *Macigno* l. s.) nell'Appennino tosco-romagnolo ed umbro.

Nel 1895 il Trabucco in una Nota intitolata " *Il Langhiano della Provincia di Firenze* „ collocava nel Miocene medio, piano *Langhiano*, la potente formazione sovraccennata della Toscana e della Romagna Toscana (Bacino del Mugello, Dicomano, S. Sofia, ecc.), citandovi i soliti fossili (*Aturia, Lucina, Solenomya*, Pteropodi, ecc.) a *facies miocenica*.

Recentemente nel suo lavoro " *Stratigrafia dei Terreni ed Elenco delle Roccie della Provincia di Firenze*, 1898 „, il Trabucco attribuì di nuovo al *Langhiano* le formazioni di Dicomano, Vicchio, S. Godenzo, ecc., cioè l'immensa formazione marnoso-arenacea in esame che costituisce la massima parte dell'Appennino tosco-romagnolo.

È poi notevole come il signor A. Silvestri abbia nel corrente anno segnalato " *Una nuova località di Ellipsoidina ellipsoides*, A. R. A. L. 1899 „, in marne sabbiose a N.-E. di S. Sepolcro, indicandovi pure varii Foraminiferi, Ostracodi, Molluschi e Denti di Pesce, cioè tutta una Fauna marina che egli attribuisce al Pliocene, deducendone quindi che nell'epoca pliocenica l'alta Valle del Tevere era occupata da un braccio di mare. I miei sommarii studi su tale regione non mi segnalarono quivi che *Villafranchiano* ed Eocene, dal quale ultimo terreno non stupirei derivasse detta fauna pseudopliocenica.

Infine nel recentissimo " *Contributo allo studio del Miocene nell'Umbria*, 1899 „ dovuto al Verri ed al De Angelis, si riconferma l'età miocenica di ampie zone di terreni della Valdichiana, della Valle del Tevere, ecc. che credo collegate alla formazione del *Macigno* (*lato sensu*).

Ma se l'accordo era per tal modo quasi unanime fra coloro che studiarono i fossili del *Macigno* e dei terreni corrispondenti, collocando il tutto in un piano più o meno alto del Miocene, diversamente si andava formando l'opinione in coloro che intanto

si occupavano del rilevamento geologico delle regioni dove detti terreni si sviluppano.

Vediamo infatti che il Taramelli, pur avendo solo visto di passaggio il Macigno di Porretta, nelle sue " *Osservazioni geologiche fatte nel raccogliere alcuni campioni di Serpentini*, 1882 " lo ritiene spettante al *Liguriano*, cioè all'Eocene.

Poco dopo il Lotti, che è certamente tra i geologi che più minutamente studiarono l'Appennino Toscano, scrivendo " *Sulla posizione statigrafica del Macigno della Porretta*, 1883 " ritenne ancora eocenico detto terreno.

Più tardi nei miei studi geologici sommari (accompagnati da Carte geologiche alla scala di 1 a 100.000) sopra " *L'Appennino dell'Emilia*, 1892 ", " *La Toscana*, 1895 " ed ultimamente " *L'Appennino della Romagna*, 1899 ", non dubitai di collocare nell'Eocene (*Parisiano*) il *Macigno* di Porretta ed i famosi giacimenti fossiliferi di Dicomano e del Bacino di Mugello, nonchè le analoghe estesissime e potentissime formazioni geologiche.

Recentemente ancora il Lotti nei suoi interessanti " *Studii sull'Eocene dell'Appennino toscano*, 1898 ", riaffermò con nuovi ed estesi dati l'età eocenica delle formazioni in questione, idea nella quale sono con lui d'accordo, salvo però che io credo egli estenda troppo l'Eocene, sia in alto, inglobandovi terreni oligocenici (come l'arenaria di Bismantova, ecc.) sia in basso, attribuendogli gran parte dei terreni cretacei (così potenti formazioni di argille scagliose; estese zone di schisti, come quelli di Pontassieve, dei dintorni di Poppi, di Barigazzo, di S. Agata sopra Scarperia, ecc., ecc.).

Mentre che per tal modo in quest'ultimo trentennio si andò svolgendo detta dualità, direi, tra i Paleontologi ed i Geologi rispetto alla grande zona del *Macigno* e delle formazioni affini, qualche cosa di simile, ma in modo meno avvertito, si verificò riguardo ad alcuni terreni marnoso-calcarei che credo quasi contemporanei a quelli del *Macigno;* voglio con ciò alludere a quei terreni tanto sviluppati ad Est della grandiosa zona mezozoica di M. Nerone — M. Catria — M. Pennino — M. Cavallo — Gran Sasso d'Italia, ecc., ma specialmente nelle Marche dove

sono conosciuti volgarmente col nome di *bisciaro*, *genga*, ecc., e da qualche anno nella scienza col nome di *Schlier*, *Marne cineree*, ecc.

Infatti tali calcari più o meno marnosi, grigi o biancastri, fin quasi a trent'anni fa subirono a un dipresso la stessa sorte del *Macigno*, cioè furono attribuiti al Cretaceo od all'Eocene.

È solo nel 1875 che il Mantovani nelle sue Osservazioni " *Sulla formazione geologica delle Colline presso Ancona* „ cominciò a riferire al Miocene le marne calcaree di Ancona.

Nel 1879 le idee del Mantovani vennero completamente confermate dagli studii paleontologici del Capellini che nella sua importante Memoria " *Gli strati a Congerie e le marne compatte mioceniche dei dintorni di Ancona* „, attribuì detti terreni all'*Elveziano* indicandoli col nome di *Schlier*, uno di quei tanti nomi esotici che, come *Leithakalk*, *Flysch*, ecc., portati in Italia da regioni dove la serie terziaria era ed è tuttora incompletamente decifrata, riuscirono ad imbrogliare gli studi della nostra splendida, tipica serie terziaria italiana. Dopo d'allora l'appellativo di *Schlier*, che originalmente corrisponde solo ad una *facies* speciale, marnosa, di un orizzonte miocenico, venne largamente usato per designare queste marne calcaree, ritenute appunto mioceniche, dell'Anconitano e delle Marche in genérale.

Nel 1880 vediamo anche il Bosniaski collocare le Marne di Ancona col *Macigno* di Porretta e di Dicomano nel *Tortoniano inferiore*.

La *Carta geologica d'Italia* del 1889 indica nelle Marche come mioceniche amplissime zone rappresentate dalle marne calcaree in questione.

Il Simonelli facendo uno studio " *Sopra la Fauna del cosidetto Schlier del Bolognese e dell'Anconitano*, 1891 „, ritenne anche quest'ultimo come appartenente ad una formazione di mare profondo non più antica dell'*Elveziano*.

Nella bella conca di Camerino il Canavari raccolse fra le marne calcaree grigie che s'appoggiano alla *scaglia rosea* del Cretaceo superiore varii fossili, specialmente Molluschi, che paralizzò con quelli del Miocene, ed Echinodermi studiati dal De Loriol (*Descript. Echin. env. Camerino*); in diversi lavori e specialmente nella " *Notice terr. Bass. Camerino,* 1892 „ che forma appendice a detto lavoro del Loriol, il Canavari attribuì tali marne calcaree grigie scagliose al Miocene. Qualche cosa di

simile venne segnalato nelle affini e contemporanee marne calcaree dei bacini di Pergola, di Ascoli Piceno, di alcune regioni del gruppo del Gran Sasso d'Italia, ecc.

In questi ultimi anni tali formazioni calcareo-marnose, quantunque in generale povere di fossili, fornirono al Cardinali, al conte F. Parteguelfa, al dott. D. Pascucci, al Luzi, ecc. un materiale abbastanza copioso studiato dal De Angelis e dal Luzi e reso pubblico coi due lavori: " *I fossili dello Schlier di S. Severino (Marche),* 1897 " e " *Altri fossili dello Schlier delle Marche*, 1899 ". Da questi studii paleontologici risultò che i sovraccennati terreni si dovevano attribuire alla parte superiore del Miocene medio. A conclusioni simili, sembra per terreni consimili nell'Italia centrale e nella Sicilia, erano pur già pervenuti il Cafici ed altri.

Nelle marne calcaree di Cantiano e di Cagli il Morena raccolse in questi ultimi tempi una fauna abbastanza copiosa che volle gentilmente comunicarmi e che a primo tratto ricorda certamente quella miocenica, per cui detto autore credette poter segnare in dette regioni diversi piani miocenici, ciò che penso essere assolutamente inammissibile.

Nella recente " *Monografia dei Pettini miocenici dell'Italia centrale*, 1899 " del dott. R. Ugolini l'autore non dubita neppure di attribuire al Miocene una quantità di Pettini delle formazioni arenacee e marnose in questione.

Viceversa negli studi geologici che ebbi occasione di fare in questi due ultimi anni nell'Urbinate, nell'Anconitano, nel Marchigiano, nel Piceno, ecc., esaminando con special cura i famosi terreni fossiliferi, detti miocenici, di Pergola, di Cantiano, di Cagli, di S. Severino, di Camerino, di Ascoli Piceno, di Ancona, ecc., parvemi che detti terreni fossero piuttosto riferibili all'Eocene.

Eccoci quindi ora davanti all'interessante dilemma: le potenti ed estese formazioni marnoso-arenacee del *Macigno* (*lato sensu*) ed analoghe, e quelle marnoso-calcaree conosciute col nome di *Schlier*, *Bisciaro*, *Genga*, ecc. dell'Anconitano e delle Marche in generale, del Piceno, ecc., sono riferibili al Miocene come risulterebbe dagli studi paleontologici od all'Eocene come indicherebbero gli studi geologici?

Come cultore e professore di Paleontologia dovrei inclinare ad accettare come giusti ed inappellabili i responsi di questa Scienza; ma dopo aver percorso in ogni senso e per varii anni le formazioni in questione nell'Appennino settentrionale e centrale sino al Grossetano, all'Umbria ed al Piceno, facendone il rilevamento geologico, per quanto sommario, propendo per la seconda opinione.

Sperai dapprima che si potessero conciliare le due idee interpretando i suddetti terreni fossiliferi, a fauna pseudomiocenica, come formazioni oligoceniche prese fra pieghe di terreni eocenici oppure sparse in placche su questi in modo consimile, per esempio, a quanto osservai in alcuni punti dell'alta Val Marecchia, ma dovetti poscia convincermi che tale interpretazione non sembra conforme ai dati stratigrafici, almeno in generale.

Invece l'esame di dette formazioni mi fece conoscere che:

1° Le zone fossilifere in questione sono racchiuse in terreni che talora passano in basso graduatissimamente, sotto il punto di vista sia litologico sia tettonico, al Cretaceo superiore, senza che appaia esistervi *hyatus* o salto stratigrafico, per cui dette zone sembrano naturalmente riferibili all'Eocene medio-inferiore od inferiore (come per esempio a Cantiano, a Cagli, a S. Angelo in Vado, in diversi punti presso Camerino, presso Pergola, ecc., ecc.). Talora esse sono coperte dalla potentissima pila della formazione del *Macigno* (Cantiano, S. Angelo, ecc.) e quest'ultima talvolta sopporta discordanti placche di tipico *Tongriano* (come tra Sasso Simone e Belforte).

2° In dette zone fossilifere, od a poca distanza, si incontrano talora Nummuliti ed Orbitoidi nonchè Fucoidi di tipo eocenico.

3° I fossili di tali zone sono per lo più mal conservati, incompleti e quindi poco si prestano generalmente ad una precisa determinazione specifica (1).

Aggiungasi che molte forme si conservarono con poche mutazioni dall'Eocene al Miocene e quindi hanno poco valore stra-

---

(1) Ricordo ad esempio, come in uno dei lavori paleontologici sul cosidetto *Schlier* sia determinata, specificamente, una forma sopra *un frammento di un cattivo modello interno!* come dichiara lo stesso autore della determinazione.

tigrafico, oppure le loro leggiere mutazioni sono solo riconoscibili negli esemplari perfettamente conservati; anzi certe forme inferiori mantennero i loro caratteri specifici dall' Eocene sino all'epoca attuale.

Devesi anche tener conto che i Paleontologi che si occuparono di detti fossili ebbero specialmente per confronto le faune mioceniche tanto tipiche e frequenti in Italia, ciò che potrebbe spiegare in essi Paleontologi una naturale tendenza a parallelizzare tali fossili con quelli miocenici che avevano più comunemente fra le mani. Ricordo in proposito come la famosa formazione eocenica di Gassino, in Piemonte, abbia subìto una sorte consimile a quella dei terreni in questione; essa infatti, dopo esser stata anticamente interpretata come epicretacea dal Collegno, venne poi da Sismonda, Michelotti, Mayer, Fuchs, ecc. ritenuta appunto come miocenica od oligocenica, finchè recenti studi accurati di specialisti provarono che parte dei creduti fossili miocenici (per esempio i denti di Pesce) dovevansi invece riferire a specie tipicamente eoceniche, troncandosi in tal modo una lunga e disgustosa polemica. Così pure devesi probabilmente attribuire in parte alla cattiva conservazione del materiale (e quindi alla sua difficile determinazione) il fatto che un valente paleontologo, dopo minuti speciali studii, attribuì al *Tortoniano* i fossili della Verna che io ritengo essere invece *tongriani*.

Credo pure qui opportuno notare come analogo il fatto che anche in Lombardia alcune formazioni marnose eoceniche furono dapprima ritenute mioceniche; così la bella zona marnosa di Varano presso il Lago di Canobbio venne nel 1882 dal Salmoiraghi in " *Alcune osservazioni geologiche sui dintorni del lago di Canobbio* ", e nel 1887 dal Mariani nel suo minuto studio paleontologico sopra " *La Molassa miocenica di Varano* " attribuita al Miocene e più precisamente al *Langhiano*, finchè nel 1892 studiando " *L'Anfiteatro morenico del lago Maggiore* " riconobbi trattarsi di una zona *bartoniana* compresa tra le formazioni nummulitiche del *Parisiano* e la tipica formazione della *Gonfolite*, ritenuta pure generalmente miocenica, ma che in detto lavoro riconobbi come *tongriana*, come finalmente lo provarono recentissime scoperte paleontologiche.

È interessante osservare che alcuni fra i Paleontologi che si occuparono dei terreni in questione nell'Appennino constata-

rono, come scrisse il Capellini sin dal 1879 (*Gli strati a Congerie, ecc.* p. 146), *il miscuglio di specie relativamente recenti e perfino attuali con tipi che si crederebbero cretacei*, come, per esempio, certi *Amussium, Pholadomia (Procardia), Pleurotomaria, Hemipneustes, ecc.* Nè sarebbe poi impossibile che tale miscuglio potesse in qualche caso, fosse pur raro, derivare dal fatto che i terreni *messiniani* fossiliferi spesso sovraincombono direttamente ai terreni marnoso-calcarei in questione (per esempio nella regione del Trave presso Ancona, nella conca di Camerino, ecc.) donde la possibilità di confusioni nel raccogliere i fossili o nell'interpretarne la giacitura.

D'altronde non sono sfuggite ad alcuni Paleontologi, come al Capellini, al Simonelli, ecc. le affinità che le faune della zona del *Macigno* e del cosidetto *Schlier* delle Marche presentano con certe faune eoceniche, come quelle del Nizzardo, d'Egitto, di Corbières, di St. Avit, del cosidetto *Liguriano* di Häring nel Tirolo, ecc.

Ricordo inoltre che certi fossili indicati quasi come caratteristici del Miocene, così i denti di *Carcharodon* (tipo *Ch. megalodon*), le grandi *Lucina* (tipo *L. pomum*), alcune *Pycnodonta* (tipo *P. cochlear*), certe piccole *Ostrea*, alcune forme di *Pholadomia* (tipo *Ph. Canavarii*), *Chlamys* (tipo *Ch. scabrella*), *Pecten, Amussium* (tipo *A. anconitanum, A. corneum*), *Solenomya, Acesta* (tipo *A. miocenica*), *Aturia* (tipo *A. Aturi*), *Cassidaria (Galeodea)* (tipo *C. echinophora*), *Cirsotrema, Tugurium, Xenophora*, varii Pteropodi, ecc., si presentano con forme di cui si può constatare lo sviluppo dall'Eocene al Miocene e spesso anche sino al giorno d'oggi, talora con minime variazioni, appena riconoscibili su esemplari perfetti.

Infine molte differenze litologico-faunistiche, specialmente le tre più conosciute, cioè: *Arenarie a Pettini, Arenarie più o meno marnose a Lucine, Marne compatte a Pteropodi*, diventate famose per varie località fossilifere dell' Appennino ed interpretate talora come cronologicamente diverse, corrispondono invece sovente a semplici differenze di ambiente verificatesi in uno stesso periodo geologico.

Da tuttociò ne consegue naturalmente come non sembrino ancora abbastanza convincenti i responsi della Paleontologia per ritenere miocenici sia il *Macigno* e le formazioni arenaceo-marnose analoghe e connesse, sia i cosidetti *Bisciaro, Schlier, Marne*

cineree, *Genga* e simili delle Marche e di gran parte dell'Appennino centrale, terreni tutti che al geologo operatore sembrano piuttosto riferibili all'Eocene. Sono quindi desiderabili ulteriori accurati studi paleontologici su esemplari meglio conservati e con confronto anche di materiale proveniente da varii orizzonti eocenici di *facies* affine a quella delle sovraccennate formazioni appenniniche, e non già solo dall'Eocene subsalmastro del Bacino di Parigi o da certe famose ma troppo speciali zone subalpine del Veneto, come generalmente si usa; allora soltanto si potrà sciogliere il problema in questione e troncare in tal modo un increscioso disaccordo fra i Geologi ed i Paleontologi.

Per conto mio, fino a prove contrarie irrefutabili, ritengo dette formazioni in generale come eoceniche, e penso che i fossili pseudomiocenici che esse racchiudono rappresentano quella fauna marina, finora poco conosciuta, dalla quale in gran parte sarebbe derivata la tanto nota e sviluppata fauna neogenica che caratterizzò i depositi circum-mediterranei dal Miocene ad oggi.

L'Accademico Segretario
ANDREA NACCARI.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 26 Novembre 1899.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: Claretta, Direttore della Classe, Peyron, Manno, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Cognetti de Martiis, Graf, Brusa, Allievo, Renier, Pizzi e Ferrero, che funge da Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Presidente Senatore Giuseppe Carle, annunziando la morte del Socio Avv. Domenico Perrero, lo commemora colle seguenti parole:

Egregi Colleghi,

Debbo annunziarvi la triste perdita fatta dalla Classe del Socio avv. Domenico Perrero.

Nato in Rocca Canavese il 14 gennaio 1820, egli giovane ancora aveva già conseguito la laurea in teologia, in lettere e in giurisprudenza.

Fu per molti anni collaboratore nell'ufficio legale dell'egregio giureconsulto Francesco Troglia, di cui ebbe in consorte la figlia

Camilla; ma dopo la morte dello suocero lasciò intieramente l'esercizio del patrocinio, e si diede pressochè esclusivamente agli studii letterarii e storici.

Egli infatti dal 1876 al 1881 pubblicò una pregiata versione poetica prima delle Odi e poi delle Satire, delle Epistole e dell'Arte Poetica di Orazio; ma furono sopratutto le ricerche storiche, che resero noto il suo nome, e che gli valsero nel 1880 la elezione a membro della R. Deputazione di Storia Patria, e nel 1895 quella a membro dell'Accademia per la Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

Il Perrero nei suoi scritti non si propone per solito di illustrare e descrivere questo o quel periodo storico, ma si compiace di preferenza nel ricercare e chiarire questo o quel punto particolare di storia torinese, subalpina ed italiana, arrestandosi anche volentieri a ciò che abbia carattere di curiosità storica o sia stato argomento di discussione e di polemica. Egli ha dettato così un numero grandissimo di articoli, di memorie, di monografie e di scritti diversi, che talvolta giungono fino al volume, appoggiati il più spesso su ricerche e documenti originali, da lui compulsati negli archivii, scritti sempre con spirito fine ed arguto, ed ispirati a sensi di italianità e di patriotismo. Basti ricordare fra tutti il volume col titolo: *Gli ultimi Reali di Savoia del ramo primogenito ed il principe Carlo Alberto di Carignano* (Torino, 1889), che è in parte diretto a confutare asserzioni del Costa de Beauregard, nel suo libro: *La jeunesse de Charles Albert,* e quello da lui pubblicato, mentre era già nostro collega, stato presentato alla Classe dal Socio Claretta col titolo: *Asti ricuperata e la cittadella di Alessandria liberata (1745-46),* Torino, 1898, 16°, nel quale Egli si propone di rispondere alle affermazioni contenute negli *Studii diplomatici* del duca di Broglie, in cui questi " con sistematica ostilità si adopera a rappresentare sempre mai le cose nostre, i Reali di Savoia in genere e il Re Carlo Emanuele III in particolare sotto l'aspetto più sfavorevole " (Pref., pag. 3).

Sebbene già malfermo in salute in questi ultimi tempi, Egli non desistette però dal fare nuove ricerche e dal pubblicarne i risultati, come lo dimostra il fatto che ancora negli ultimi mesi egli inviava al " Giornale storico della letteratura italiana " un suo scritto col titolo: *Le due prime Filippiche sono opera di*

Alessandro Tassoni, la cui pubblicazione non potè essere compiuta che dopo la sua morte.

Il Perrero fu uomo semplice, modesto, scevro di ambizioni ed alieno dagli onori, dedito sopratutto agli studii, disposto sempre a sostenere contro chicchessia, in polemiche anche vivaci, ciò che egli credeva essere la verità, e a dire liberamente e schiettamente il suo giudizio sugli uomini e sulle cose.

Per pochi anni l'abbiamo avuto a collega, ma anche in quei pochi anni, stante la frequenza di Lui alle nostre adunanze, abbiamo potuto apprezzarne la dottrina svariata e molteplice, la conversazione arguta e ricca di ricordi e di anèddoti, e la singolare operosità, di cui restano anche le traccie negli Atti della nostra Accademia.

Egli è mancato ai vivi il 20 ottobre in Luserna San Giovanni, sua solita residenza durante le ferie autunnali, dove sperava di poter rimettersi in salute, e donde non fu trasportata che la sua salma. L'Accademia partecipò alle funebri onoranze e comunicò l'annunzio della sua morte agli Istituti e sodalizii scientifici, da cui pervennero numerose condoglianze.

La Presidenza ha presentato allora le condoglianze alla egregia Gentildonna sua consorte ed alla famiglia di Lui, e si farà debito di comunicar Loro queste brevi parole di commemorazione.

Intanto prego il Direttore della Classe Socio Gaudenzio Claretta, che al Perrero fu unito da stretta famigliarità e da comunanza di studii, a voler dire in una prossima adunanza della vita e delle opere dell'egregio Collega.

Annuncia quindi la perdita del Socio corrispondente Cornelio Desimoni avvenuta durante le ferie accademiche, ed invita il Socio Claretta a voler trattare pure degli studii di questo Collega in altra adunanza.

La Classe stabilisce che siano mandate condoglianze alla Società Ligure di Storia patria, di cui il Desimoni era Presidente onorario, e dalla quale è venuto l'annuncio della morte.

Sono comunicate le condoglianze pervenute all'Accademia per la morte del Socio Perrero da Socii non residenti e corrispondenti, da Autorità, da Società e da Istituti scientifici.

Il Presidente comunica che l'Accademia è stata invitata a farsi rappresentare all'inaugurazione a Chambéry del monumento di Giuseppe e di Saverio DE MAISTRE, che furono Socii di essa, ed a quella del monumento di Ruggero BONGHI, che ne fu Socio corrispondente, a Lucera.

Alla prima cerimonia l'Accademia, per cura della Presidenza, è stata rappresentata dal Socio nazionale non residente, il barone Domenico CARUTTI DI CANTOGNO; alla seconda dal Sindaco di Lucera.

Annuncia pure di aver inviato un telegramma di congratulazione al Socio nazionale non residente Pasquale VILLARI in occasione dei festeggiamenti fattigli a Firenze per il 40° anniversario del principio del suo insegnamento.

Il Socio MANNO, a nome della R. Deputazione sovra gli studii di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, offre l'opera: *Monumenta palaeographica sacra. Atlante paleografico-artistico compilato sui manoscritti esposti in Torino alla Mostra d'arte sacra nel MDCCCXCVIII* e pubblicato dalla R. Deputazione di Storia patria per cura di F. CARTA, C. CIPOLLA e C. FRATI (Torino, 1899).

Il Socio ff. di Segretario fra le pubblicazioni pervenute in dono alla Classe, segnala le seguenti: *Manoscritti copti esistenti nel Museo egizio e nella Biblioteca Nazionale di Torino raccolti da Bernardino Drovetti* ed indicati dal Socio Francesco ROSSI (Firenze, 1899); il vol. III dell'*Histoire ancienne des peuples de l'Orient classique*, del Socio straniero Gastone MASPERO (Paris, 1899); *Miscellanee savonesi* (Savona, 1899); *Bronzi votivi di Vado*, del Socio corrispondente Vittorio POGGI; *La Chine du XX^e siècle* (Paris, 1899), *Les progrès des États-Unis* (Arras, 1899), *L'Amérique préhistorique d'après un livre nouveau du professeur Cyrus Thomas*, del Socio corrispondente marchese di NADAILLAC; due volumi di studii e documenti su Pinerolo (Pinerolo, 1899) offerti da quel Municipio; *Geschichte der italienischen Litteratur* von

Berthold WIESE und Erasmo PÈRCOPO (Leipzig und Wien, 1899) offerto dall'Istituto bibliografico di Lipsia.

A nome del Prof. Guido BIGONI, presenta un opuscolo: *Quattro documenti genovesi sulle contese d'Oltremare nel secolo XIII* (Firenze, 1899).

Il Socio PEZZI presenta un lavoro manoscritto del Prof. Attilio LEVI, intitolato: *L'elemento storico nel greco antico, contributo allo studio dell'espressione metaforica,* del quale l'autore desidera l'inserzione nei volumi delle *Memorie*.

Ad esaminare questo lavoro ed a riferirne alla Classe in una prossima adunanza il Presidente delega il Socio presentante ed il Socio PEYRON.

In adunanza privata la Classe procede all'elezione del suo Segretario per il tempo che manca al compimento del triennio cominciato dal defunto Segretario Cesare NANI, cioè sino al 20 luglio 1900. Riesce eletto, salvo l'approvazione sovrana, il Socio Rodolfo RENIER.

A nome suo e della Classe il Presidente ringrazia il Socio FERRERO per avere, durante la lunga malattia e dopo la morte del NANI, fatto le veci di Segretario, ufficio, a cui egli non è rieleggibile a termini dello Statuto accademico.

L'Accademico ff. di Segretario
ERMANNO FERRERO.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

a b c 1
a 2 c
a 4 b
a 5 b c
a 6
a 8 b c
a 9 b
a b 10
a b 12 c
13
a 14 b
a
a 17 b
a 18 b
a b 19 c d
a
a b 22
a 23 b c
a b 24
a b 26
a b 27 c
28

S

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXV, DISP. 2ª, 1899-900

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1900

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 3 Dicembre 1899.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: COSSA, Vice Presidente dell'Accademia, BIZZOZERO, Direttore della Classe, BERRUTI, D'OVIDIO, SPEZIA, CAMERANO, SEGRE, VOLTERRA, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA e NACCARI, Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza precedente, che viene approvato.

Il Socio SPEZIA presenta una nota del Dr. Giuseppe PIOLTI sopra *Una macina romana in leucotefrite trovata nei dintorni di Rivoli.*

Il Socio BIZZOZERO, a nome del Socio Mosso presenta una nota del Dott. Pasquale SFAMENI intorno a *Speciali terminazioni nervose trovate nei piccoli rami di nervi periferici.*

Le due note saranno inserite negli *Atti.*

LETTURE

Sopra una macina Romana in leucotefrite trovata nei dintorni di Rivoli (Piemonte);

Osservazioni del Dott. GIUSEPPE PIOLTI
Assistente al Museo Mineralogico dell'Università di Torino.

(Con una tavola).

Negli ultimi giorni dello scorso ottobre mio figlio Ugo, diciassettenne, trovava in un campo situato tra Rivoli e Villarbasse, una pietra circolare scavata ad imbuto da ambe le parti, che gli parve costituita dalla stessa roccia descritta non è gran tempo dal Dott. Colomba (1), e che aveva servito come rivestimento delle parti superiori di un pozzo.

Recatomi tosto sul luogo, riconobbi con piacere che mio figlio non s'era sbagliato: trattavasi realmente d'un leucitofiro.

Vista l'importanza del fatto, senz'altro acquistai la pietra.

Come scorgesi dalla qui unita tavola, trattasi d'una macina, ma di lavoro molto più finito di quello di altre macine di cui ebbi occasione di vedere i disegni, come per esempio quelle figurate dal Brayda (2) e trovate presso Corbiglia, borgata situata tra Rivoli e Villarbasse. La roccia di cui è costituita la macina è una vera *leucotefrite* ed ha i seguenti caratteri.

Rarissima la presenza di *leucite* appartenente alla massa fondamentale; mancanza di inclusioni simmetriche nella leucite porfirica, i cui cristalli sono talora orlati da una serie di minutissimi cristalli, ora d'oligoclasio ed ora di pirosseno. Nella leucite porfirica talora si incontrano inclusioni feldspatiche, talora

(1) *Su alcuni materiali da costruzione in leucotefrite del sottosuolo di Torino*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", vol. XXXIV, adunanza del 14 maggio 1899.

(2) *Studii medioevali* di R. Brayda e F. Rondolino. *Villarbasse*. Torino, Camilla e Bertolero, 1887, pp. 12 e 13.

pirosseniche. Il pirosseno è pleocroico, con tinte che vanno dal verde azzurrognolo al giallo a giallo-verde. L' angolo d' estinzione $\mathfrak{c}:c$ oscilla da 39° a 50° ed osservai anche un minimo di 34°, per cui è lecito supporre, con tali valori angolari d'estinzione e col fatto del pleocroismo ben marcato, si tratti d'*augitegirina*. Questo pirosseno presenta spesso inclusioni di magnetite e non di rado trovasi semplicemente unito a cristalli del detto minerale.

La *sanidina*, ora in cristalli geminati secondo la legge di Karlsbad, ora in cristalli semplici, è rara. Talora la sanidina ingloba in parte la leucite, ciò che dipende dal fatto che l'ortosio è di formazione posteriore a quella della leucite.

Il *plagioclasio* porfirico è spesso zonato e nelle zone esterne le sezioni con estinzione simmetrica rispetto alla linea di geminazione, hanno un angolo d' estinzione che oscilla da 4° a 5°; per le zone interne invece, nelle sezioni in cui l'estinzione ha luogo simmetricamente rispetto alla traccia del piano 010 di geminazione, l'angolo d'estinzione oscilla da 24° a 37°. Quindi è lecito conchiudere si tratti di un nucleo di feldspato molto basico, circondato da zone di feldspati a basicità sempre decrescente, fino a giungere all'oligoclasio.

Si trova anche plagioclasio non zonato, colla geminazione polisintetica e con un angolo d'estinzione oscillante da 21° a 25° e questi individui probabilmente sono costituiti da un feldspato intermedio fra l'andesite e la labradorite.

La massa fondamentale è costituita da un finissimo intreccio di aghi d'oligoclasio e di pirosseno; poi havvi *magnetite* e poca sostanza vetrosa.

Ora il complesso di questi caratteri collima perfettamente colla descrizione che il Colomba pubblicò della leucotefrite trovata nel sottosuolo di Torino: nella mia roccia manca il gesso, ma non devesi dare alcuna importanza a tale fatto, poichè evidentemente, come suppose anche il Colomba, il gesso può essere derivato da infiltrazioni di acque esterne possibili in un sito e non in un altro.

Vengo insomma alla conclusione che se i preparati microscopici del Colomba ed i miei non portassero un numero d'ordine inciso sul vetro col diamante, sarebbe impossibile il distinguerli gli uni dagli altri.

Ciò posto, se ad infirmare la grande importanza archeologica della scoperta di pezzi di leucotefrite nel sottosuolo di Torino, si sarebbe potuto (a torto secondo me) tirare in campo il proverbio che una rondine non fa primavera, ora detta importanza viene ad aumentarsi, poichè ci troviamo in presenza di due manufatti d'una pietra caratteristica delle regioni circostanti ai vulcani Cimini e quindi bisogna ammettere che quelli siano di là provenuti.

Inoltre sorge un'altra questione: se esiste una macina in leucotefrite è probabile che ve ne siano altre, perchè una macina è uno strumento di uso troppo comune. Mentre vi sarebbe una ragione di fare un sigillo od un cofanetto od altro oggetto qualunque d'ornamento con una pietra rara, non è ammissibile che si sia cercato di far venire dalla Campagna Romana proprio una leucotefrite per farne una macina. Invece se si ammette che nei dintorni dei Cimini vi fossero fabbriche di macine con materiali presi sul luogo, come è probabile pel fatto accennato dal Colomba che ancora adesso esistono cave di leucotefriti colà, la cosa si spiega benissimo.

Un'industria del genere di questa, per essere rimuneratrice, dev' essere fatta in grande. Le macine di selce molare di La Ferté, in Francia, vengono usate non solo in Europa, ma in tutto il mondo (1). Il sig. Sydney B. J. Skertchly nel 1888 (2) annunziò la scoperta, fattasi a Cherokée, contea di Butte (California) di circa trecento mortai di pietra trovati in una sabbia sotto al basalto. So dal Prof. Spezia che nell' Isola di Rügen, sul mar Baltico, nei campi presso ad Arcona si trova una quantità enorme di selci lavorate ed altre solo sbozzate; ma lì vicino, nella creta, si trovano abbondanti i noduli di selce che venivano poi usufruiti. Voglio dire con questi esempi che mortai, macine ed altri strumenti di uso comune si devono fare con materiali che si trovino in abbondanza in date località. E quindi venne in me l'idea di esaminare diligentemente i resti d'antichità Romane esistenti nel R. Museo d'Antichità di Torino. Il

---

(1) Raoul Jagnaux, *Traité de minéralogie appliquée aux arts, à l'industrie, au commerce et à l'agriculture.* Paris, 1885, p. 277.

(2) *Matériaux pour l'histoire primitive et naturelle de l'homme.* Vol. XXII 3e série, tome V, 1888, p. 505.

Prof. Comm. Ernesto Schiaparelli, Direttore del detto Museo, mi indicò un manufatto portante per iscrizione quanto segue: " macina da grano antica in pietra del peso di Kg. 377, dissep-" pellita in Roma nell'anno 1873 — Scavi per il palazzo del " Ministero delle Finanze ".

Questa macina ha la forma d'un mezzo ellissoide cavo, ossia la forma che si otterrebbe tagliando un ellissoide con un piano diametrale normale all'asse maggiore: nella parte più piccola havvi un buco. Orbene la roccia di cui è costituita questa macina è appunto una leucotefrite.

Dalla cortesia del Direttore summentovato ebbi il permesso di staccare qualche piccolo frammento nella parte più larga, già rotta; e così potei procedere ad un esame microscopico.

Tale esame mi dimostrò trattarsi della precisa ed identica roccia da cui fu ricavata la mia macina. Quindi ci troviamo in presenza di tre manufatti della stessa natura litologica. Puossi ammettere ciò accidentale, data la natura della roccia? Io non lo credo. Parmi quindi lecito poter dedurre dalle considerazioni suesposte che probabilmente nei dintorni dei vulcani Cimini vi erano fabbriche di macine in leucotefrite, che dovevano essere esportate anche in lontane regioni.

Perchè poi i Romani che rivestirono a Torino un pozzo con leucotefrite, si siano serviti di tale roccia (che doveva certamente costar loro molto cara) invece di adoperare una qualunque delle tante roccie che si trovano nelle valli prossime a detta città, io non saprei: agli archeologi l'ardua risposta.

Speciali terminazioni nervose trovate nei piccoli rami dei nervi periferici;

Nota del Dott. PASQUALE SFAMENI.

(Con una tavola).

La presenza di nervi negli involucri connettivali dei fasci nervosi fu per la prima volta dimostrata dal Sappey (1). Questo autore difatti in una memoria diretta all'Accademia delle scienze di Parigi nel 1876 disse di potersi con facilità dimostrare costantemente la esistenza di fili nervosi i quali si distribuiscono al nevrilemma. Egli propose di chiamarli *nervi nervorum* perchè stanno ai nervi come i *vasa vasorum* ai vasi sanguigni.

Questi *nervi nervorum*, secondo il Sappey, si trovano nelle guaine fibrose dei fasci nervosi primarî, secondarî e terziarî, quantunque egli non li abbia potuto seguire che fino allo involucro dei fasci secondarî soltanto. Essi diventano più esili e rari a misura che decresce la spessezza della guaina fibrosa. Non si estendono mai fino allo involucro dei fasci primitivi, involucro che va sotto il nome di perineurio (Robin).

Questi fili nervosi seguono generalmente le arterie e mandano nel loro cammino numerose divisioni, con cui si anastomizzano in modo da formare qua e colà piccoli plessi a maglie ineguali e irregolari.

I tubi, che rappresentano questi *nervi nervorum*, sono in special modo notevoli per la loro sottigliezza, quantunque siano ognora costituiti da un *involucro*, da uno *strato midollare* e dal *cilindrasse*.

Da quel che precede, è facile dedurre che il Sappey giunse a dimostrare chiaramente la esistenza di fibre nervose, le quali

(1) C. Sappey, *Recherches sur les nerfs du nevrilemme ou nervi nervorum*, " Comptes-rendus de l'Acad. des sciences ", T. LXV, 1867, pag. 761.

si distribuiscono nel nevrilemma, ma non ha descritto il modo col quale esse si terminano.

Più tardi (1884) l'Horsley (1) in una brevissima nota dice di aver trovato nei tronchi nervosi veri nervi di senso, i quali finiscono come bulbi terminali nel perineurio. Questi nervi, che di solito nascono dai fasci primarî delle fibre nervose, dapprima camminano ad angolo retto coi fasci primitivi e poi decorrono paralleli nel perineurio, come singole fibre di media grandezza, e terminano a foggia di bulbi terminali, simili a quelli osservati nella congiuntiva. Essi consistono di una capsula, la quale contiene una massa protoplasmatica alla base, due corpuscoli protoplasmatici nucleati alla estremità: in essi si può seguire il cilindrasse che sembra però non finisca ivi.

Nel 1886 il Prus (2) adoperando il bleu di metilene secondo il metodo di Erlich (iniezione endovenosa *intra vitam* di una soluzione acquosa) e il cloruro d'oro secondo il metodo di Cohnheim e secondo quello di Ranvier, in diversi animali (rane, cavie, conigli) potè constatare nella guaina dei nervi periferici fili nervosi finissimi, i quali decorrono ora obliquamente e ora parallelamente all'asse longitudinale del nervo e formano colle loro ramificazioni un sistema reticolato. Questi fili constano di una serie di granuli molto piccoli, disposti l'uno dopo l'altro, presentano qua e là ingrossamenti varicosi e terminano con un piccolo rigonfiamento. Alcune fibrille penetrano fino nell'endoneurio.

I detti fili nervosi nascono dal medesimo tronco, al quale si distribuiscono.

Il Prus li chiama *nervi nervorum periphericorum* e li ritiene quali nervi sensitivi, pur non escludendo la loro natura trofica.

Finalmente nel 1893 l'Askanazy (3) dimostrò nel tronco del nervo tibiale dell' uomo l' esistenza di numerosi corpuscoli di Pacini, situati nel perineurio e nei fasci connettivali dell'endoneurio.

---

(1) V. Horsley, *On the existence of sensory nerves in nerve trunk's (true nervi nervorum),* " Brit. med. Journal ", Vol. I, 1884, pag. 166.

(2) J. Prus, *O nerwikach wikrytych w oslonce pni nerwowich,* " Przglad lekarski ", N° 30-33, 1886.

(3) M. Askanazy, *Vater-Pacini'sche Körperchen im Stamme des menschlichen Nervus tibialis,* " Anatomischer Anzeiger ", 1893, pag. 423.

Queste le scarse notizie che ho potuto rintracciare intorno alle terminazioni nervose dei nervi periferici. Da esse si desume che il Sappey ha messo in rilievo soltanto la presenza di fibre nervee, che si distribuiscono ai tronchi nervosi; l'Horsley, il Prus e l'Askanazy hanno descritto realmente terminazioni nervose nei nervi periferici. Il primo vi ha riscontrato terminazioni in forma di bulbi terminali, simili alle clave di Krause della congiuntiva, i quali necessariamente devono essere ritenuti di natura sensitiva. Il secondo vi ha rinvenute terminazioni nervose in forma di esili fili granulosi, i quali portano un rigonfiamento alla estremità. Il Prus ritiene che questi fili siano di natura sensitiva, pur non escludendo quella trofica: però a me sembra più ragionevole di attribuire ad essi quest'ultimo significato. L'Askanazy poi ha dimostrato l'esistenza di corpuscoli di Pacini; i quali sono da ritenersi come terminazioni di senso.

Non è uno studio speciale, condotto a bella posta, sulla innervazione dei nervi periferici, quello ch'io ho in animo di presentare con questa breve nota. Il mio còmpito è semplicemente quello di descrivere alcune terminazioni nervose, che si riscontrano nel nevrilemma di piccoli tronchi nervosi visibili al microscopio (ed anche ad occhio nudo, quando però essi siano isolati perfettamente dal resto del tessuto) e residenti nel connettivo sottocutaneo dei polpastrelli del cane. Infatti io ebbi l'occasione di riscontrare questi fascetti di nervi, con speciale terminazione nervosa intorno, nello stesso tempo (quindi con lo stesso metodo del cloruro d'oro), in cui conducevo delle indagini comparative intorno agli organi nervosi terminali del Ruffini (1). Appare chiaro quindi che queste terminazioni nervose già per la piccolezza dei tronchicini nervei nei quali si distribuiscono e per la sede in cui questi ultimi si trovano, sono differenti da quelle descritte dagli autori sopracitati; poichè questi difatti parlano di terminazioni nervose di quei tronchi, che dall'anatomia descrittiva vengono designati col nome di *nervi periferici.*

I piccoli tronchi nervei, nei quali si riscontra la termina-

---

(1) P. Sfameni, *Recherches comparatives sur les organes nerveux terminaux de Ruffini*, " Anatomischer Anzeiger ", IX Bd., N° 22, 1894, pag. 671.

zione nervosa, che sarà più oltre descritta, non presentano nulla di particolare nella loro struttura: essi constano di un numero variabile, mai molto grande, di fibre nervose, le quali, disposte a fascetto, sono circondate da un involucro di tessuto fibroso (nevrilemma) costituito da diversi strati concentrici di fibre e cellule connettivali a decorso parallelo alle fibre nervose.

La fibra nervea che va a costituire la terminazione intorno al fascetto nervoso proviene sempre da quelle fibre, che costituiscono il fascetto medesimo. Essa si spoglia della mielina, presentando, in corrispondenza del punto in cui ciò avviene, una strozzatura simile a quella che si trova in diverse terminazioni nervose e designata dal Ruffini (1) col nome di *strozzamento preterminale*, e il cilindrasse si avvolge a spirale, ma in modo irregolare intorno alle fibre che compongono il piccolo tronco nervoso, formando di tratto in tratto dei cespugli, i quali di rado si trovano in mezzo ai diversi strati dell'involucro connettivale, d'ordinario sono collocati immediatamente sotto allo strato fibroso, come adagiati alla superficie delle fibre nervee o fra le medesime. Talora il filo cilindrassile si avvolge più volte nel medesimo punto intorno al fascetto delle fibre in maniera da costituire un vero anello (fig. I, *a a*).

I cespuglietti, formati dal cilindrasse nello stesso tempo che esso si aggira a spirale attorno al fascetto delle fibre nervee, sono costituiti da un intreccio a guisa di reticolo formato da tanti rigonfiamenti, irregolari per forma, collegati fra loro da fili esilissimi. Essi si riscontrano qua e là in diversi punti del fascetto nervoso, quantunque capiti talora di trovarli soltanto su di un lato di esso. Nei punti in cui questi cespuglietti si ritrovano, notasi che il nevrilemmma decorre alquanto discosto dal fascetto delle fibre nervee, per modo che esso circoscrive in gran parte una cavità dentro la quale il cespuglio trovasi alloggiato. Si osserva inoltre che in detta cavità esiste una sostanza di aspetto finamente granuloso (fig. I e fig. III, *s. gr.*).

Non sempre la fibra nervosa perde la mielina prima di avvolgersi attorno al fascetto nervoso, per modo che, come già

(1) A. Ruffini, *Sullo strozzamento preterminale nelle diverse forme di terminazioni nervose periferiche*, " Monitore zoolog. italiano ", Ann. VII, Fasc. 5°, 1896.

dissi, questi avvolgimenti siano formati dal nudo cilindrasse: ma talora essa, conservando tuttavia il suo rivestimento mielinico, si aggira a spirale attorno al fascetto nervoso, dividendosi nello stesso tempo in parecchi rami, i quali poi ad un tratto perdono la mielina (fig. III, *s. pr.*) e tosto danno origine ai cespuglietti sopra descritti (fig. III, *c. t.*).

La fibra nervea, che dà la terminazione, ramificandosi più e più volte, per ordinario si esaurisce intieramente per formare l'intreccio nervoso terminale già descritto, ma capita di constatare qualche volta che essa spicca uno o più rami, i quali formano la terminazione attorno al fascetto nervoso, mentre il tronco principale della fibra prosegue oltre lungo il fascio medesimo (fig. I, *f'. n'.*).

Simili terminazioni nervose non si trovano solo in quei piccoli tronchi dei nervi, che nullameno sono formati da un discreto numero di fibre nervee, ma si riscontrano pure in tronchicini costituiti appena di pochissime fibre (3-4-5). In questi casi però la terminazione non è così estesa e complicata come nei tronchi descritti precedentemente, ma si presenta assai limitata e per lo più costituita da un solo giro del cilindrasse con un piccolo cespuglio.

Per ultimo debbo notare un fatto che a me è accaduto di osservare soventi volte: l'esistenza cioè di terminazioni nervose dentro l'involucro connettivale (guaina di Henle) di una fibra nervea isolata. Si constata in questi casi che dal tubo mielinico decorrente al centro della fibra nervea si dipartono ad intervalli dei fili esili, privi di mielina, i quali camminano per un tragitto più o meno lungo accanto al tubo mielinico da cui hanno preso origine, quindi si arrestano, e si avvolgono in modo complicato intorno al tubo mielinico medesimo, in guisa da costituire un intreccio cilindrassile formato d'ingrossamenti e di fili esili che li congiungono (fig. IV, *i. t.*). In corrispondenza di questo intreccio cilindrassile la fibra nervea presenta un rigonfiamento, dovuto allo allontanarsi in quel punto della guaina di Henle dal tubo centrale: viene ad essere costituita così una cavità ripiena di sostanza finamente granulosa analoga a quella esistente nel resto della fibra nervea, e in mezzo alla quale trovasi posta l'espansione del cilindrasse.

È bene notare tosto che simili terminazioni si riscontrano

esclusivamente in quelle fibre che scorrono isolate nel tessuto, ma quando esse sono in grandissima vicinanza del punto in cui vanno a formare l'intreccio terminale di un organo nervoso periferico (per lo più organi nervosi terminali del Ruffini) (1).

Le terminazioni nervose che ho descritte sopra, sia per la forma che esse hanno come per la sede che occupano, secondo me, sono senza alcun dubbio da considerarsi quali terminazioni di natura sensitiva. Ritengo inoltre, fondandomi sulla conformazione dei cespuglietti (che rappresentano la parte propriamente finale) che ad esse non possa ragionevolmente attribuirsi alcun ufficio trofico. I nervi trofici sono rappresentati da esili fili formati di granuli disposti l'uno dopo l'altro, con piccolo rigonfiamento allo estremo, precisamente come i nervi descritti dal Prus sui tronchi nervosi periferici.

Se per le ricerche del Sappey potevasi solo affermare che i nervi periferici sono forniti di fibre nervose sensitive, per quelle ulteriori dell'Horsley, del Prus e dell'Askanazy veniva dimostrato il modo come i nervi sensitivi e trofici dei tronchi nervosi periferici hanno la loro terminazione. I miei ritrovati poi portano alla conclusione che terminazioni nervose si trovano non solo sui nervi periferici, riconoscibili macroscopicamente come tali, ma anche intorno ai tronchicini nervosi minimi, posti nelle parti più lontane dall'origine dei nervi. Dal che si desume che i nervi periferici posseggono terminazioni nervose dalla loro origine fino nelle parti più lontane nelle quali si distribuiscono.

Risulta inoltre che fino al presente sono state descritte quattro specie di terminazioni nervose nei nervi periferici: *a*) Bulbi terminali simili alle clave di Krause della congiuntiva (Horsley); *b*) Reticolo amielinico a larghe maglie formato di esili fili granulosi con rigonfiamento all'apice (Prus); *c*) Corpuscoli di Pacini (Askanazy); *d*) Terminazioni in forma di spirali ed anelli con

---

(1) A. Ruffini, *Di un nuovo organo nervoso terminale e sulla presenza di corpuscoli Golgi-Mazzoni nel connettivo sottocutaneo dei polpastrelli delle dita dell'uomo*, " Mem. dell'Acc. dei Lincei ", Serie 4ª, Vol. VII, 1893, pag. 403.

cespuglietti cilindrassili disposti qua e là lungo il fascetto nervoso, come sono state descritte nella presente nota.

Poichè, come più volte ho detto, i *nervi nervorum* descritti dal Prus, a mio credere, bisogna ritenerli di natura trofica, mentre i bulbi simiglianti a clave di Krause scoperti dall'Horsley e i corpuscoli di Pacini trovati nel tibiale dell'uomo dall'Askanazy, come pure le terminazioni da me descritte devono essere considerate di natura sensitiva, chiaramente risulta questo dato: i nervi periferici posseggono terminazioni nervose di natura trofica ed altre di natura sensitiva.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. I. — Piccolo fascio nervoso con estesa terminazione. La fibra nervea, che forma la terminazione nervosa, decorre quasi nella parte mediana del fascio: lungo il suo cammino manda dapprima un ramo (A) e dopo breve percorso un altro (B). Questi due rami poco dopo la loro origine perdono la mielina e cominciano ad avvolgersi intorno al fascio delle fibre nervee, formando di tratto in tratto dei cespuglietti cilindrassili. Il fascio nervoso ad un estremo si presenta suddiviso in due fasci più piccoli, e in uno di questi si vede continuarsi la fibra nervea, che coi suoi rami ha già dato luogo alla terminazione nervosa del fascio primario.
Oc. 3, Obb. 4, Koristka $\times$ 115.

Fig. II. — Terminazione nervosa estendentesi per un tratto non molto grande intorno ad un tronchicino nervoso. I cespuglietti formati dal cilindrasse si trovano quasi esclusivamente da un lato del fascio nervoso, e nel punto corrispondente si scorge il nevrilemma assai scostato dalle fibre nervee. La fibra nervea, destinata a formare la terminazione si trova situata un po' di lato nel fascio nervoso: in un dato punto (*s. pr.*) essa perde la mielina e il cilindrasse si divide poscia in due rami, i quali, aggirandosi ripetutamente intorno al fascio delle fibre nervee, formano dei cespuglietti in diversi punti. Dal luogo in cui i cespugli formati dal cilindrasse sono più numerosi e stipati si vede partire un piccolo fascio (C) di fibre pallide, le quali vanno ad accostarsi ad uno dei rami di suddivisione del fascio nervoso principale, ma non si può definire la destinazione di esse, perchè nel tratto ulteriore non si sono colorate.
Oc. 3, Obb. 4, Koristka $\times$ 115.

Fig. III. — Estesa terminazione intorno ad un fascio nervoso. La fibra nervea, che dà la terminazione, ancora rivestita dalla mielina, si avvolge attorno al fascetto nervoso, ramificandosi reiteratamente. I rami perdono la mielina (*s. pr.*) e formano dei cespuglietti.
Oc. 3, Obb. 5, Koristka × 520.

Fig. IV. — Terminazione nervosa esistente dentro la guaina di Henle, in una fibra nervea isolata. Parallelamente a questa fibra ne decorre un'altra (*m*) della quale non è visibile la guaina di Henle.
Oc. 3, Obb. 8*, Koristka × 475.

SIGNIFICAZIONE

DELLE LETTERE ADOPERATE NELLE FIGURE

---

n — nevrilemma.
c. t. — cespuglietti terminali.
s. pr. — strozzamento preterminale.
c. s. — capillari sanguigni.
f. n. — fibra nervea destinata a formare la terminazione attorno al fascetto nervoso.
f. n'. — fibra nervea, la quale, dopo di aver formato coi suoi rami, la terminazione, si continua in una delle suddivisioni del fascetto nervoso.
s. gr. — sostanza granulosa.
a. a. — avvolgimenti a guisa di anello, che il cilindrasse forma attorno alle fibre del fascetto nervoso.
f. a. — piccolo filo amielinico che abbandona il fascetto nervoso, supera il nevrilemma e s'inoltra nel tessuto vicino.
i. t. — intreccio terminale.
f. a'. — esile filo amielinico che va a formare l'intreccio terminale dentro la fibra nervea.
f. a''. — altro esile filo amielinico destinato a formare un altro intreccio terminale più oltre dentro la fibra medesima.
g. H. — guaina di Henle.
n. g. H. — nuclei della guaina di Henle.
L. — fibre componenti il fascetto nervoso.

L'Accademico Segretario
ANDREA NACCARI.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 10 Dicembre 1899.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: CLARETTA, Direttore della Classe, PEYRON, ROSSI, MANNO, BOLLATI DI SAINT-PIERRE, PEZZI, COGNETTI DE MARTIIS, GRAF, CIPOLLA, BRUSA, PIZZI e RENIER che funge da Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio RENIER, ff. di Segretario, comunica una lettera circolare dell'Accademia delle Scienze di Berlino. Quell'Accademia vi notifica che il 19 e 20 marzo 1900 sarà celebrato il secondo centenario della sua fondazione, e invita l'Accademia nostra a designare, quando lo ritenga opportuno, un rappresentante per quella ricorrenza. Riguardando quest'invito l'intera Accademia, il Presidente ne parlerà nella prossima adunanza a Classi unite.

Il Presidente dà lettura d'una lettera da Genova del Dr. Filippo DE FILIPPI, nella quale egli annuncia l'invio all'Accademia, fatto a nome di S. A. R. il Duca degli Abruzzi, di un esemplare del racconto della *Spedizione al Monte Sant'Elia*. Il Presidente, col consenso unanime dell'intera Classe, ringrazierà

del libro, appena esso sia pervenuto, l'Augusto Donatore, esprimendogli i rallegramenti per la bella impresa compiuta e presentandogli gli auguri per quella che sta compiendo con tanto coraggio ed abnegazione.

Il Socio Claretta, Direttore della Classe, presenta il fasc. 2° (vol. VII) degli *Atti della Società di Archeologia e Belle arti*, elogiandone il contenuto e particolarmente rilevando il valore delle contribuzioni archeologiche inseritevi dal Socio Ferrero. Quindi lo stesso Socio Claretta, a nome del prof. Camillo Manfroni, presenta la sua *Storia della marina italiana dalle invasioni barbariche al trattato di Ninfeo,* facendo notare la singolare importanza dell'opera. Al Manfroni saranno inviati speciali ringraziamenti.

Il Presidente presenta un volumetto del Dott. Giuseppe Mazzarella, *La condizione giuridica del marito nella famiglia matriarcale,* Catania, 1899. Su di esso egli fa le seguenti considerazioni:

Presento alla Classe, a nome dell'autore, uno studio del dottor Giuseppe Mazzarella di Catania col titolo: *La condizione giuridica del marito nella famiglia matriarcale, contributo alla Giurisprudenza etnologica* (Catania, 1899).

L'autore, valendosi de' materiali raccolti sulla giurisprudenza etnologica dal Waitz, dal Wilken, dal Kohler, dal Lubbock, dal Dargun, dal Westermarck, e sopratutto dal Post, riassume lo stato attuale delle indagini relativamente ai popoli presso cui si trovano le traccie del matriarcato e sopratutto del cosidetto matrimonio ambiliano, la cui nota essenziale consiste nella dipendenza del marito di fronte alla famiglia della moglie.

Egli viene al risultato, che per ora si sarebbero trovate le traccie di questo matrimonio e di altre istituzioni affini presso circa 130 popoli, i quali appartengono a tutti i principali gruppi etnici primarii finora conosciuti (pag. 135). Di qui trarrebbe la conclusione, che siccome il matrimonio ambiliano costituisce la caratteristica del matriarcato, così la sua esistenza presso tanti popoli dovrebbe considerarsi come il risultato di uno stadio

generale dell'evoluzione matrimoniale, che sarebbe stato attraversato da tutti i popoli, lasciando presso alcuni traccie più profonde, le quali furono invece pressochè intieramente cancellate presso altri popoli già pervenuti ad uno stadio più progredito di evoluzione sociale.

L'opinione del Mazzarella non è nuova, ed è sostenuta fra gli altri dal dottissimo sociologo M. Kovalewski già professore nell'Università di Mosca, dal Giddings e da molti altri. A mio avviso però tale illazione non riesce ancora abbastanza comprovata anche dai materiali accuratamente riassunti dal Mazzarella: perchè le traccie rinvenute del matrimonio ambiliano e delle istituzioni affini al medesimo presso le varie stirpi di popoli, non provano veramente che tutti questi popoli abbiano attraversato prima un periodo esclusivamente matriarcale per passare poi al periodo patriarcale, ma bensì soltanto che tutti questi popoli conservano le traccie di organizzazione matriarcale e patriarcale. Può quindi essere verosimile che essi possano anche essere partiti da una organizzazione famigliare, che contenesse i germi dell'una e dell'altra organizzazione e che più tardi le condizioni sociali diverse dei popoli, ed anche quelle delle varie classi di popolazione abbiano condotto alla prevalenza ora dell'organizzazione matriarcale, ed ora di quella patriarcale, la quale ultima finì per prevalere presso tutti i popoli, che ebbero maggior influenza sullo svolgimento dell'aggregazione sociale.

Malgrado queste divergenze nell' apprezzamento dei risultati, è certo degna di encomio la diligenza con cui il Mazzarella ha raccolti e classificati i materiali, raggruppando al matrimonio ambiliano tutte le altre consuetudini ed istituzioni che possono avere affinità con esso.

Il Socio Claretta, Direttore della Classe, legge la commemorazione del defunto Socio corrispondente Cornelio Desimoni, commemorazione che è pubblicata negli *Atti*.

Il Socio Cipolla legge una nota del dott. Arturo Segre: *Carlo II di Savoia e le guerre d'Italia tra Francia e Spagna dal 1515 al 1525,* che è pubblicata negli *Atti*.

Il Socio Graf, anche a nome del condelegato Renier, riferisce verbalmente intorno alle *Due note dantesche* offerte all'Ac-

cademia dal prof. Pietro Gambèra. Quelle due brevi note sono proposte per la stampa negli *Atti*, pur facendo i due proponenti le loro riserve rispetto alla possibilità che, nell'immensa letteratura critica dantesca, altri abbia detto prima ciò che il Gambèra sostiene.

Il Socio Pezzi, delegato insieme col Socio Peyron ad esaminare la memoria presentata dal prof. Attilio Levi, *L'elemento storico nel greco antico, contributo allo studio dell'espressione metaforica,* legge la sua relazione, che è inserita negli *Atti*. La relazione è favorevole, e la Classe, a voti unanimi, ne accoglie i risultamenti. Lettasi quindi la memoria, la Classe, con votazione segreta, ne approva ad unanimità l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

LETTURE

CORNELIO DESIMONI

Commemorazione letta dal Socio GAUDENZIO CLARETTA.

La perdita di Cornelio Desimoni, mancato ai vivi il 29 luglio scorso in Gavi nell'oltregiogo ligure, ove era nato nel 1813, fu deplorata in Italia, non solamente dai cultori degli studii storici, ma altresì da quanti seppero ammirare in lui il cittadino integerrimo, l'uomo infaticabile che fece bene a molti, senza menarne vanto, e male a nessuno.

E mentre già egli s'ebbe i meritati elogi, specialmente da Guido Bigoni nell' " Archivio storico italiano "; ed altri ancora avrà a tesserne a suo tempo più compiuta e più acconcia commemorazione, io qui limiterommi a dirne alcunchè conformemente alla consuetudine invalsa, ad espressione del lutto che colpisce la nostra famiglia scientifica. E me felice se riuscirò a dar almeno uno specchio fedele dell'uomo, i cui sentimenti, le cui dottrine poco si accordavano colle passioni ora predominanti, ma che pennelleggiano colui che si potrà sempre dire con verità che non isciupò punto la vita, nè sotterrò l'ingegno che Dio gli diede.

Laureatosi in leggi nell'Università di Genova, prima dell'anno 1848, fu per l'indole sua tenuto lontano dal foro, ma in omaggio alle sue inclinazioni ed ai suoi studii venne nel 1881 aggregato alla Facoltà di lettere e di filosofia di quell'Università.

Fin dall'età sua giovanile, dopo breve mansione in ufficio non guari pure a lui confacente (per quanto in una manifestazione chiassosa seguìta nel 1848 nel teatro Carlo Felice avesse saputo sedare col suo intervento e con acconce parole il tumulto che si era suscitato), fu applicato all'archivio di quel famoso Banco di S. Giorgio, le cui sorti erano sempre state collegate con quelle dell'illustre repubblica di Genova. Quindi egli tosto potè volgere l'animo e l'affetto a quegli studii pel quali doveva conseguire fama lodevolissima.

Come archivista, già nei principii della sua carriera egli erasi dato a riordinare i documenti disordinati del citato archivio, ch'ebbe poi notevole rimaneggiamento più tardi; e che divenne triplice archivio, notarile, di Stato e di S. Giorgio.

Nè pago di simili cure, già essendo settantenne, ei recavasi a Parigi, dove consultando i documenti, che colla denominazione di *fonds génois* si conservavano al Ministero degli esteri ed alla biblioteca nazionale, riuscì ad eseguire copie degli annali del Caffaro, dello Stella, detti *libri iurium* e del Codice Colombo-Americano, ecc. E con quelle opime spoglie lieto se ne ritornava al suo archivio, nel quale di grado in grado nel 1890 conseguiva il massimo, di sovrintendente agli archivi liguri.

Nè conviene omettere di accennare che il Desimoni fu in Genova l'anima di quella benemerita Società ligure di storia, fondata intorno al 1858, la quale ebbe a primo suo capo quell'illustre padre Vincenzo Marchese, così noto per le importanti sue pubblicazioni artistiche; e del quale consesso fu applaudita emanazione il " Giornale ligustico ", dovuto all'iniziativa intelligente dei benemeriti Luigi Tomaso Belgrano ed Achille Neri. E tanto a quel giornale quanto agli atti di quella Società egli consegnava di continuo le importanti sue pubblicazioni storiche (fra le quali, come più attinente a noi, cito la Monografia sul *Marchese Bonifacio di Monferrato e i Trovatori provenzali alla Corte di lui*, 1878), e del pari parecchie ne apparivano nelle *Archives de l'orient latin*, della cui Società era massimo ornamento il conte Riant, unito in bell'amicizia col nostro Desimoni, il quale coll'opera e cogli scritti assai contribuì a rendere conosciuti fra noi quei lavori storici. E cito per l'importanza loro *Les Actes passés à Famagosta de 1299 en 1301 par devant le notaire génois Lamberte de Sambuceto*, ecc.

Fra le principali società scientifiche, alle cui memorie il Desimoni consegnò lavori, vuol esser citata quella romana dei Lincei, dove ancora nel 1895 egli pubblicava *La moneta e il rapporto dell'oro all'argento nei secoli XII e XIII.* E fu questo riputato uno scritto pregevolissimo, siccome quello che serve a rendere non debole servigio agli studii di nummografia comparata, essendo sempre la moneta, come si esprime il Millin, il tema più complicato di tutta l'economia politica.

Dal che risulta essere simili indagini sempre efficaci a spia-

nare la via alla risoluzione di quel problema. Ed altri lavori di tal indole egli pur pubblicò nei *Mélanges de numismatique* ed altrove, ove pur diede saggio di esser fine cultore della sfragistica.

Massima parte ebbe il Desimoni negli studii sui grandi scopritori e navigatori e sulla cartografia medioevale, che furono iniziati specialmente negli anni 1867 e 1868, e terminati nel 1893 con quelli delle questioni colombiane allo stato presente. Merita pure un cenno l'illustrazione dell'*Atlante idrografico* del Medio Evo posseduto dal professore Tammar Luxoro, pubblicato a facsimile, ed annotato da lui in un col suo dotto, ed or pure rimpianto, collega Luigi Tomaso Belgrano, che vide la luce a Genova nel 1867. A quel facsimile segue la nomenclatura dell'Atlante colla corrispondenza moderna, lavoro comparativo che ci attesta pure la profonda erudizione del Desimoni. Il quale in simile genere di studii era sommo, e disposto a favorire colleghi e studiosi che ne lo avessero richiesto, come per additare un esempio, lo proverebbe la corrispondenza tenuta all'uopo col chiarissimo barone di Saint-Pierre, sovrintendente agli Archivi di Stato piemontesi, richiestone per maggiori notizie sulla nomenclatura moderna di vocaboli, di cui nel conto del tesoriere della spedizione in Oriente di Amedeo VI, in corso di stampa. Non devesi poi tacere, com' egli, acceso di fervido amor patrio, abbastanza calorosamente ebbe a combattere col mezzo dello scrittarello intitolato: *Le satan de M. R. de L. petite revue*, Gênes 1877, la taccia affibbiata dal conte Roselly de Lorgues ai Genovesi di trascurati a prò della fama e della santità di Cristoforo Colombo.

Ma più estesa fama ancora sollevò il Desimoni in quelle pagine che si possono ritenere *doctae, Iupiter, et laboriosae*, nelle quali espone il suo sistema storico-critico sulle Marche, difficile e complicato argomento di questioni genealogiche concernenti gli Aleramici, gli Ardoinici, gli Obertenghi e gli Azzonici, tema che non credo poter dispensarmi di accennare soltanto di volo, poichè considera punti di storia medioevale che risguardano le nostre contrade, ne' quali, anzi, gli avvenne di correggere su più ampli e più sicuri criterii il nostro Jacopo Durandi, Giulio di S. Quintino e Cesare Balbo, il primo nel suo *Piemonte Cispadano*, il secondo nelle sue *Osservazioni storiche sovra alcuni particolari della storia del Piemonte e della Liguria nei secoli XI e XII*, e il terzo

nei suoi *Conti, marchesi e duchi dell'Italia settentrionale.* Questi due ultimi scritti furono pubblicati nei volumi della nostra Accademia (1).

Questo tema era il sogno dorato del Desimoni, come pure aveva dichiarato in alcune lettere sulle tavole di bronzo della Polcevera. E dopo aver pure dato un tocco delle grandi linee di quel disegno in una sua lettera al professore Michele Amari, prendeva a svolgerlo col metodo che il Muratori aveva tenuto nei suoi studii sulle origini della Casa d'Este, nelle note sue cinque lettere sulle marche d'Italia e sulle loro ramificazioni in marchesati, scritte a Domenico Promis sin dal 1868-69, che videro la luce nella " Rivista universale ", nelle quali egli con grande erudizione, ricostruendo la genealogia di quei dinasti, e rintracciandone la discendenza, riusciva a dimostrare, come quelle famiglie marchionali provenissero da uno stipite comune, poi si dividessero, e per quali storiche vicende ciò avvenisse. In tal guisa il nostro autore riusciva a rischiarare i punti dubbii sulla stirpe *aleramica* che comprendeva i comitati di Monferrato, di Acqui, di Savona, dell'*Obertenga*, la quale racchiudeva i comitati di Genova, di Tortona, di Pavia e di Milano, dell'*Ardoinica,* nella cui circoscrizione si trovavano quei di Albenga, di Alba, di Mondovì, di Asti e di Torino, ed infine di altra marca, secondo lui da denominarsi degli *Attoni*, da un Alberto Azzo od Ottone antenato della contessa Matilde; la qual marca avrebbe dovuto comprendere Brescia, Bergamo, Modena, Reggio e fors'anco Mantova, Parma e Cremona.

Dopo trent'anni, dopo nuovi studii, nuove indagini, tanto dell'autore quanto di altri, dopo nuovi documenti scoperti, il Desimoni era in grado di dar altro assetto al primitivo suo lavoro, che compariva in seconda edizione nel volume XXVIII della serie III degli " Atti della Società Ligure di storia patria ", Genova, 1896, con acconcia prefazione di Cesare Imperiale.

Il lavoro uscì ricco di dati genealogici e di sette appendici:

1° *Sulla discendenza aleramica e sulla diramazione dei marchesati della Marca,* lettera al prof. M. Amari, Gen., 15 aprile 1866;

2° *Sui marchesi di Massa in Lunigiana e di Parodi nell'oltregiogo ligure nei secoli XII e XIII,* dall' " Archivio storico italiano ", Vol. X;

(1) Tomo XIII, serie II e tomo XXXVIII.

3° *Due documenti di un marchese Arduino crociato nel 1183 e 1185*, dal " Giornale ligustico ", anno 1878;

4° *Un documento aleramico*, estratto dal verbale della tornata del tre aprile 1875, dal " Giornale ligustico ", anno 1875;

5° *Cistercensi in Liguria*, dal " Giornale ligustico " del 1878;

6° *Estratto della relazione sul libro del barone Carutti: Umberto Biancamano*, letta il 26 giugno 1885 alla Società ligure;

7° *Albero genealogico, compilato dall'annalista Jacopo d'Oria* e trascritto dal Desimoni dai libri VII e VIII. *Iurium Reipublicae Januensis*, esistenti presso l'Archivio degli Esteri di Parigi.

Basta questo cenno un poco minuto a darci un'idea della congerie singolare di notizie, d'investigazioni che contribuirono ad assegnare al loro autore la fama di storico acuto e scrupoloso, anche per parte di quanti non si fossero per avventura associati a tutte le conclusioni dedotte da quell'ampio suo studio. E comunque: nessuno potrà contestare che l'opera sulle Marche non abbia un'importanza grandissima nella storia di quell'oscuro e mal conosciuto periodo medioevale che corre fra la caduta dell'impero de' Carolingi e la definitiva costituzione del Comune italiano. E del pari nessuno potrà dubitare che il Desimoni non avesse le doti possedute dai migliori storici, i quali deggiono anzitutto insignorirsi de' materiali componenti il loro lavoro, trasportarsi colla mente all'età che vogliono descrivere, ed esser descrittivi, filosofici, giusti ed opportuni nell' analisi, per giungere ad una sintesi facile e compiuta.

Lo scopo di questa commemorazione mi dispensa dal ragionare di molti altri suoi scritti che apparvero nell' " Archivio storico italiano ", nella " Rivista marittima ", in quella di storia ed archeologia della provincia di Alessandria, ecc., ecc., e che offersero all'operosità sua largo campo di studio. Ned in alcuno di essi fece punto difetto quella vivacità, quel calore, che giovano anche negli scritti di erudizione a dare efficacia suggestiva a quanto si vuol dimostrare.

Non è nemmeno il caso di accennare qui alle varie società letterarie e scientifiche alle quali il Desimoni fu ascritto, e così alle consuete testimonianze di stima ricevute. Ne basterà quindi ricordare, come eletto nel 1860 a socio della R. Deputazione di storia patria per le antiche province, ne divenne altro de' vice presidenti per elezione del 10 aprile 1878. Fu assiduo alle sue

tornate, sino a che la salute ebbe a consentirglielo. Con altri dei colleghi compaesani suoi, adoperossi alla compilazione di un libro di leggi genovesi, che dovrà far seguito ai due precedenti già pubblicati nella voluminosa collezione dei *Monumenta historiae patriae*.

Alla serie poi denominata della " Miscellanea di storia italiana, egli consegnava un elogio del suo compaesano Marcello Remondini, che vide la luce nel volume XXIV.

In quest' Accademia fu eletto socio corrispondente il 28 aprile 1895, giusta retribuzione delle erudite sue storiche elucubrazioni.

Il Desimoni ebbe fibra robusta, mantenuta pur tale dalla semplicità e dalla sobrietà del vivere, anche in mezzo alle continue tensioni della mente, alle quotidiane sue applicazioni che lo tennero occupato sino all'ultimo. Infatti nel 1897, scrivendo al suo dotto collega marchese Imperiale, tracciavagli un disegno di lavori, che si sarebbero potuti compiere dalla prediletta sua Società ligure che avevagli conferito il meritato grado di presidente onorario. E nell'anno antecedente soltanto, egli aveva posto termine agli annali storici dell'amata sua patria Gavi.

Visse e morì cattolico fervente, nè gli atti suoi ne smentirono la parola, poichè tollerante con tutti, alieno da ogni spirito di parte, non ebbe rancori, nè meditò vendette contro chi dissentisse dalle sue opinioni. È vero, come si espresse il Foscolo " che le cose buone e perfette non giovano in tutti i tempi e sono simili alla virtù ammirata freddamente spesso da chi può ravvisarla, e non creduta da molti, o almeno stimata disutile, (1). Ma ciò poco monta: la soddisfazione che ciascuno prova coll'operare retto, è già bastante compenso per quanti hanno il coraggio di resistere alle turbe *civium prava jubentium*.

Si può poi dir ancora che il Desimoni *pertransivit benefaciendo*, poichè alle beneficenze fatte in vita aggiunse nelle sue disposizioni il legato della sua casa e di un fondo annesso per sede di un orfanotrofio di fanciulli del suo paese.

Sereno e robusto ei toccava il suo ottantesimosesto anno; e la sua morte, che come dissi nell'esordire, trovò eco e compianto fra gli studiosi italiani, ebbe pure in patria quei segni d'onore che avrebbero oggi fra noi maggior pregio ove sempre fossero serbati ai più degni.

(1) Lettere a Silvio Pellico, Roma, 1886.

Carlo II, Duca di Savoia,
e le guerre d'Italia tra Francia e Spagna dal 1515 al 1525.

Nota del Prof. ARTURO SEGRE.

SOMMARIO

1. Indole del ducato di Carlo II. Relazioni di Carlo col nuovo re di Francia, Francesco I. Occulta malevolenza reciproca. La calata del 1515. Condotta amichevole del Duca verso il re. Palese malanimo di questo, e le sue ostilità tra il 1516 ed il 1519. — 2. Carlo I, re di Spagna, è eletto imperatore (1519). Filippo, conte di Ginevra, assiste all'incoronazione. Malumore di Francesco. Guerra tra Francia ed Impero. Il Lautrec prende Milano (1521). Il Duca sposa Beatrice di Portogallo. Battaglia della Bicocca. Il Bonnivet in Italia (1523). Sue sconfitte (1524). D. Carlo di Lannoy, vicerè di Napoli, ed il Duca. Malanimo del primo. Invasione di Provenza. Sofferenze del ducato sabaudo. — 3. Segreto accordo del Duca col re. Le ambizioni di Filippo, conte di Ginevra. Ottiene da Carlo V imperatore l'investitura del marchesato di Saluzzo. Francesco I scende in Italia (ottobre 1524). Entra a Torino, occupa Milano, assedia Pavia. Opera inutile di pace del Duca. Battaglia di Pavia. — 4. Condotta del Duca coi Francesi vinti e colla reggente Luisa. Va a Lione. Invasione del ducato dalle truppe imperiali. Operosità di Filippo, conte di Ginevra. Occupazione e perdita del marchesato di Saluzzo. Congiura del Morone e morte del marchese di Pescara. — 5. Lagnanze a Madrid dell'ambasciatore piemontese pei soprusi imperiali. Viene mandato in Piemonte Lopez Urtado di Mendoza. Pace di Madrid. Scambio tra il re ed i suoi figli sul fiume Bidassoa. Parole riconoscenti del re verso il Duca. Conclusione.

1. — La storia politica del ducato di Carlo II è una serie ininterrotta di dolorose vicende. Da lunghi anni la stella sabauda andava percorrendo il ramo discendente della parabola. Questa lenta, ma progressiva e fatale decadenza dello stato piemontese era cominciata quasi un secolo prima, nel 1439, quando al grande Amedeo VIII era succeduto il debole Lodovico. Breve sosta aveva fatto il ducato nella sua discesa durante il 1496, sotto il Duca Filippo II. L'antico sire di Bressa, principe d'ingegno non comune, di rara capacità politica ed acuto intelletto, aveva ridonato al paese molto prestigio, facendosi arbitro della pace d'Italia tra Carlo VIII, re di Francia, e la lega italiana. Ma era stato un raggio di luce non duratura. Al figlio dell'abile Duca, Filiberto II, mancarono doti politiche, e Carlo, fratello germano (1)

(1) Filippo II aveva sposato Margherita di Bourbon e Claudina de Brosse di Bretagna. Dalla prima nacquero Filiberto II e Luisa di Savoia,

e successore nel 1504 di Filiberto, se ebbe maggior ingegno di questo (1), mancò dell'energia e dell'attività occorrenti ai tempi difficili in cui visse (2).

Il ducato di Carlo II fu nei primi dieci anni cosparso di amarezze, sia per le ostilità di Renato di Savoia, detto il *Bastardo*, fratello spurio di Carlo, sia per le questioni cogli Svizzeri, nelle quali diede il Duca prova di straordinaria longanimità e bonomia, sia per le calate di Luigi XII o dei suoi luogotenenti nella penisola (3). E quando, durante il 1512, un'alleanza cogli Svizzeri sembrava avesse stabilito su base salda la condizione politica del ducato, la morte di Luigi XII e la venuta al trono nel 1° gennaio 1515 di Francesco I ricondussero in pericolo la stabilità delle cose piemontesi (4). Francesco aveva col Duca stretti

---

madre del re Francesco I di Francia; dalla seconda Carlo II, Filippo, conte di Ginevra, e Filiberta, duchessa di Nemours. Filippo, conte di Ginevra, dopo la morte di Filiberta (4 aprile 1524), ottenne dal re nel 1528 il ducato di Nemours devoluto alla corona.

(1) Vedi su Filiberto II, Gabotto, *Lo stato sabaudo da Amedeo VIII ad Em. Filiberto*, vol. III, Torino, Roux, Frassati e C., 1895, pag. 82-166, ed il mio: *Delle relazioni tra Savoia e Venezia da Amedeo VI a Carlo II (III)* (1367-1553) (estr. dalle *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, serie II, tomo XLIX), Torino, Clausen, 1899, pag. 29-33.

Sulla nessuna influenza di Filiberto II nella politica del tempo suo dopo l'acquisto di Milano fatto dal re Luigi XII. V. von Höfler, *Das diplomatische Journal des Andrea del Burgo, Kaiserlichen Gesandten zum Congresse von Blois 1504, und das erzherzoglichen Secretärs und Audiencier Philippe Haneton Denkschrift über die Verhandlungen K. Philipps und K. Ludwigs XII 1498-1506* in *Sitzungberichte der K. Akademie der Wissenschaffen zu Wien*, vol. CVIII (1884), pag. 444. In tutte le trattative di Blois non pare abbiano i comissari tenuto conto del Duca di Savoia e che la morte di questo abbia influito nelle loro decisioni.

(2) Il Glutz-Blozheim, *Geschichte der Eidgenossen* (cont. della storia di G. v. Müller), Zürich, Orel, Fussli und C., 1816, pag. 361, dice che Carlo era " ein liebenswürdigen, gutmüthiger, aber schwacher Mann ".

(3) Vedi tra l'altro il bello studio del Calligaris, *Carlo di Savoia e i torbidi genovesi del 1506-7* in *Atti della società Ligure di storia patria*, vol. XXIII (1890-91). — V. anche Ricotti, *Storia della monarchia piemontese*, vol. 1°. Firenze, Barbèra, 1861, pag. 124-47.

(4) Vedansi le poche parole, ma significative, di Luisa di Savoia, quando Francesco divenne re, in *Journal de Louise de Savoye, duchesse d'Angoulesme, d'Anjou et de Valois* in *Collection complète des Mémoires relatifs à l'hist. de France* par M. Petitot, vol. XVI, Parigi, 1820, pag. 396.

vincoli di parentela. Sua madre, Luisa di Savoia, ne era sorella germana (1), ma avendo sempre portato affetto a Renato, che Filiberto prima e Carlo dopo, istigati da Margherita d'Austria, sposa di Filiberto, avevano trattato da nemico (2), conservava poco buon animo verso il nostro Duca.

Francesco palesò subito intendimenti pericolosi alla tranquillità d'Italia. Confidando nelle buone relazioni precedenti col re d'Inghilterra, Enrico VIII (3), ossequiato da un ambasciatore del re di Spagna, Ferdinando il Cattolico (4) e dalla Repubblica di Venezia (5), accordatosi infine coll' arciduca Carlo, allora signore delle Fiandre, poi re di Spagna ed imperatore (6), il quale nominò tra i suoi alleati il Duca (7), preparò un esercito for-

---

(1) Vedi nota 1 nella pag. 3. — Sull'educazione avuta da Francesco, vedi De Maulde la Clavière, *Louise de Savoie et François Ier. Trente ans de Jeunesse.* Paris, Perrin, 1895, pag. 195-247.

(2) Delle questioni tra Renato ed i suoi fratelli trattò ampiamente il De Panisse-Passis, *Les comtes de Tende de la maison de Savoie.* Paris, Firmin Didot, 1889, pag. 1-14.

(3) *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari.* Il sigr di Confignon, ambre del Duca in Francia, al Duca. Compiègne, 3 febbraio (1515): " Monseigneur. Lintencion du Roy est de vivre auvec le Roy dangleterre en amytié et croy que cella se fera aysement, car du temps du feu Roy quant les anglois vinerent au mariage, ledict sr leur fit merveilleusement bonne chère, et a toutes les dames, et despuis encores au Jostes que ledict sr fit a Paris, Il fit le plus dhonneur et de bon chere tant audict duc de Suffort [*Suffolk*] que aus aultres que luy fut possible et departirent gros amys ansemble et davantage ledict Roy dangleterre desiroyt merviliosement de voir ledict sr. Parquoy toutes les choses considerez Illya apparance quils vivront pour quelque temps en amytié... ". — Infatti poco dopo Francesco rinnovò con Enrico il trattato firmato da Luigi XII. — Rymer, *Acta publica*, tomo XIII, pag. 273 e seg. — Mignet, *Rivalité de François Ier et de Charles Quint*, vol. I, Paris, Didier et Cie, 1875, pag. 65.

(4) Lo si attendeva il 3 febbraio a Compiègne. V. lett. cit. del Confignon.

(5) Romanin, *Storia documentata di Venezia*, tomo V, Venezia, Naratovich, 1856, pag. 298-300. — Mignet, I, 65-69.

(6) *Arch. di Stato di Torino*, loc. cit. Confignon al Duca. Lione, 20 aprile (1515). Avverte che il gran mastro di Francia, Arthus de Boisy, ed il vescovo di Parigi andavano a Noyon per abboccarsi coi ministri di Carlo. — V. sul trattato di Noyon, Baumgarten, *Geschichte Karls V*, vol. I, Stuttgart, Cotta, 1885, pag. 40-43.

(7) *Arch. di Stato di Torino. Spagna, Lettere principi*, m. 1°. Carlo arciduca a Carlo II. Delft, 19 giugno 1515. " Je me recommande à vous, desirant de mon costé continuer et entretenir lamistié et intelligence que de

midabile guidato dai migliori capitani del suo regno. Egli mirava alla conquista di Milano, che gli Svizzeri avevano pochi anni prima ricuperato a Massimiliano Sforza (1). Il Duca non poteva certo negargli il passo. Esso aveva schivato di visitare il re a Parigi quando era salito al trono (2); ora gli conveniva mostrarsi arrendevole per evitare inconvenienti. S'aggiunga che Francesco aveva anche imposto allo zio per le sue mire politiche il matrimonio di Filiberta di Savoia, sorella del Duca, con Giuliano de' Medici, detto il Magnifico, fratello del Pontefice Leone X. La cosa era poco gradita al Duca (3), ma piaceva al re che desiderava l'alleanza di Leone. E fu giocoforza cedere. Il 25 gennaio 1515 a Torino il matrimonio era compiuto (4), e gli sposi partivano alla volta di Roma (5). Il re inoltre aveva tentato gli

---

long temps a esté entre noz predecesseurs, que Dieu absoille, et vous et nous, noz pays, seigneuries et subgectz, puisque mes ambassadeurs en traittant avec Mons[r] le Roy très chrestien d'amistié entre icellui s[r] et moy, en la quelle les alliez dune part et daultre sont comprins, vous ont à mon ordonnance denommé pour lung de mes alliez, ainsi que par le double de leur besoignye cy encloz pourrez veoir „. — V. il trattato di Francesco I coll'arciduca in Du Mont, *Corps universel diplomatique du droit des gens*, tomo IV, parte 1ª. Amsterdam, 1726, pag. 200. — Mignet, I, 65.

(1) De Leva, *Storia documentata di Carlo V in correlazione all'Italia*. Venezia, Naratovich, 1863, vol. I, pag. 192-207.

(2) Lett. cit. del Confignon del 3 febbraio. Tutti dicono " que (*vous*) devies venir et le plustout et de remettre tout vostre affere entre les mains du Roy et de madame vostre seur, et que en se fesant vous vous en trouveres bien, et de tout vous fault addressé à Madicte dame vostre seur. Car cest tout et vous affere, Monseigneur, quelle desire fort vous voir et de fere pour vous tout ce que vous voudres „. Ma il Duca non andò a Parigi.

(3) Lambert, *Mémoires* in *Monumenta historiae patriae*. Scriptores I, col. 848. — *Arch. di Stato di Torino*. Lett. cit. del Confignon del 3 febbraio. " ... en laffere du mariage de Madamoysele et mons[r] le Manyfique, ses vous y faites quelque chose pour lamoure dudict s[r] (*roy*) et donné vous desir, feres ung merveilléux service et si porra profitté audict s[r] le Manyfique ainsi que Jeys entendu de tous deux. Et sen point de faulte *Ilz veulent bien ledict mariage sortj son effet*. Et se vous fait aultrement, vous vous porres, croibies, auvec eulx de sorte *que paradventure par ladvenir vous pories estre deplaisant*, Et ledict s[r] Manifique aussi „.

(4) Sanuto, *I Diari*, vol. XX (Venezia, 1887), col. 20. — V. il contratto di matrimonio in *Arch. di Stato di Torino. Protocolli ducali*, reg. n. 206, fol. 23 *r*.

(5) Il viaggio è descritto in una lettera di Francesco Richardon, teso-

Svizzeri per ottenere libero l'ingresso in Lombardia. Il Duca per ingraziarsi il nipote, si recò in persona al di là dei monti a Berna, appoggiando, sembra, la domanda reale. Ma la risposta dei cantoni fu altiera e disdegnosa. Sborsasse il re molte migliaia di scudi, e promettesse di non scendere in Italia per due anni. A queste condizioni l'amicizia dei cantoni non gli sarebbe mancata. Francesco respinse tali proposte certo poco decorose, ed apparecchiò le sue genti (1).

Il pubblico che ignorava i maneggi e le preoccupazioni del Duca e vedeva il re deciso all'impresa di Milano, credeva al pieno accordo dello zio col nipote. Gli Svizzeri in particolare, ritiratisi dalle terre milanesi nella primavera di quell'anno (2), facevano sentire grosse minaccie. Un capitano del Duca di Milano, Galeazzo Visconti, nemico acerrimo di Carlo, osava intitolarsi vicario perpetuo dell'impero e duca di Savoia, e l'imperatore Massimiliano mostrava vivo sdegno contro il nostro Duca pel favore che accordava a Francesco I. Niuno comprendeva come il povero Carlo II, isolato e privo di eserciti, dovesse di necessità favorire i disegni del pericoloso nipote (3).

La calata del re era imminente, ma gli Svizzeri solleciti la prevennero: in numero di 15 a 16.000 scesero i monti, e col forzato consenso del Duca occuparono il passo di Susa, e tutti i passi dalla valle d'Aosta e da Ivrea fino a Pinerolo e Saluzzo (4).

---

riere di Savoia, al Duca da Roma, 18 aprile 1515, pubblicata dal Claretta, *Spigolature del regno di Carlo III, duca di Savoia* in *Archivio storico italiano*, serie 3ª, XXIII (1876), pag. 255-57. — V: anche Sanuto, XX, 50, ecc.

(1) Sanuto, XX, 221. — Il re aveva mandato a Torino per indurre il Duca a tal passo Alessandro di Saint-Gelays, sr di Lansac. V. Pierre de Vaissière, *Journal de Jean de Barrillon, secrétaire du chancellier Duprat*, vol. I (1515-21). Paris, Renouard, 1897, pag. 35-36.

(2) *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari.* Confignon al Duca. Lione, 20 aprile (1515).

(3) *Id.*, Lett. cit.: " Galéas Visconte se fesoyt mettre en tiltres vicayre perpetué de lempire et duc de Savoye, ainsi que me dit yer Monsr de Mommorancy [*Anna di Montmorency, futuro gran mastro e conestabile di Francia*], auquel Je respondis que, se davanture lempereur vingt au dessus de son autreprinse de myllan, que vostre estat estoyt en danger de tonber en ce Inconvenient pour avoir fait service au Roy tant de vostre personne que de vous biens, et quant ledict sr et madame vostre seur men eussent autant parle, Je leurs en heusse Respondu de mesmes et davantage si Jeusse seu ".

(4) Sanuto, XX, 341, 361, 393-94.

Fu questa una terribile calamità per il misero Piemonte. Già due anni prima Massimiliano Sforza e gli Svizzeri, conquistata Milano, erano entrati nel Piemonte, costringendo la città ad enormi contribuzioni per evitare i saccheggi (1), ed il Duca al pronto armamento di molti soldati per respingere le aggressioni (2). Ora gli eccessi del 1513 si ripeterono. Le terre andarono a ruba senza opposizione. Gli invasori rifiutavano di pagare le vettovaglie minacciando di ridurre agli estremi il Duca, che per mezzo della sorella Filiberta scongiurava il Pontefice ad evitare l'invasione francese e consigliare la ritirata agli Svizzeri. Leone X, sia mosso da queste preghiere, sia, come è più probabile, titubante sulla miglior decisione da prendere, fece intendere al re di volersi mantenere neutrale (3). Ma così non l' intendeva il giovane sovrano.

Il maresciallo Gian Giacomo Trivulzio cercò un passo nelle Alpi che non fosse il Monginevra od il Moncenisio sbarrati dagli Svizzeri, e vi riuscì mediante inganno (4). Gli Svizzeri, guidati

---

(1) *Arch. di Stato di Torino. Protocolli ducali*, reg. n. 187, fol. 92 e ss., 4 luglio 1513.

(2) *Archivio di Stato di Torino, ecc.*, fol. 5. Ordine ai sudditi di tenersi pronti a marciare in armi. 15 ottobre 1513.

(3) Sanuto, XX, 426. — Leone X all'inizio della guerra s'era atteggiato ad avversario del re, collegandosi coll'imperatore Massimiliano, col re Ferdinando di Aragona e col duca Massimiliano Sforza. Ora la sua dichiarazione di neutralità diede sospetto al vicerè di Napoli, D. Raimondo di Cardona, il quale non osò varcare il Po e soccorrere Milano. Il che procurava in seguito amare riflessioni nel Prato [*Storia di Milano dal 1499 al 1519* in *Arch. stor. ital.*, serie 1ª, tomo III (1842), pag. 344], il quale affermava essere “ costume de' papi moderni de tenire sempre per chi vince: tanto più che il Magnifico Iuliano, fratello di esso Papa, aveva poco fa preso per moglie una sorella del Duca di Savoia, barba di esso re di Franza. Sì che se può dire, che quello incendio, lo quale Sviceri ha consumpti, egli stessi se l'abbiano in seno nutrito ”. — V. sulla politica di Leone X, Cian, *A proposito di un'ambascieria di M. Pietro Bembo* (*dicembre 1514*) in *Archivio veneto*, XXX (1885), pag. 355-407 e XXXI (1886), pag. 71-128. — Nitti, *Leone X e la sua politica*. Firenze, Barbera, 1892.

(4) Desjardins, *Négociations diplomatiques de la France avec la Toscane* (in *Collect. de doc. in. pour l'hist. de France*), vol. II. Parigi, 1861, pag. 703. Filippo Strozzi a Lorenzo de' Medici. Firenze, agosto 1515. — Circa questi fatti v. oltre il Guicciardini, il Giovio, ecc., in particolare il Mignet, I, 75 sgg. — Il Delexi nella sua *Chorographie Savoisienne*, fol. 22-24, narra che il Duca ricevette a Chambéry il re, partito da Lione il 28 maggio. — V. Mugnier,

dal cardinale vescovo di Sion, Matteo Schinner, non contenti dei saccheggi commessi, tentarono di entrare in Cuneo, ma questa città organizzò prontamente una difesa, ed oppose loro valida resistenza (1). In un solo attacco il cardinale perdette più di 200 uomini (2). L' avvicinarsi poi dei Francesi ed una somma opportunamente sborsata dai Cuneesi indussero gli Svizzeri alla ritirata (3). Prospero Colonna colle genti della lega spagnuola-imperiale-pontificia cadde prigione a Villafranca. Il re, varcato l'Argentera, arrivò a Demonte, poi a Cuneo e Lagnasco, e nella metà d'agosto fu accolto in Torino dal Duca con molti onori (4). Carlo dovette seguire il re nella sua marcia trionfale (5), mentre gli Svizzeri si ritiravano d'ogni parte, lasciandosi dietro terre arse e la desolazione (6). Il Duca anelava di ricondurre la pace nel suo misero stato, esortato pure dal cognato Giuliano de' Medici, dietro ordine del Pontefice, il quale desiderava sopratutto di conservare Parma e Piacenza, cioè la Lombardia al di là del Po (7). E Francesco si mostrò arrendevole, ma solo per un ac-

---

La Chorographie Savoisienne de Jacques Delexi in *Mémoires et documents de la Société Savoisienne d'histoire et d'archéologie*, XXXVII (Chambéry, 1898), pagg. xc-cxix.

(1) Sull'assedio di Cuneo, v. Gabotto, *Due assedi di Cuneo (1347-48, 1515) secondo documenti inediti* (in *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, XXXIII, disp. 11ª). Torino, Clausen, 1898, pag. 676-83, da cui Durando, *Gli assedi di Cuneo degli anni 1515 e 1542* nel vol. *VII Centenario della fondazione di Cuneo*, Torino, Roux, Frassati e C., 1898, pag. 230-32.

(2) Sanuto, XX, 509. " Item che sguizari hano voluto prender Cogno, loco del ducha di Savoia, et ne son stà morti de lor sguizari più de 200 ".

(3) Sanuto, XX, 567.

(4) Desjardins, II, 709. Anonimo a Lorenzo de' Medici. Torino, 16 agosto 1515.

(5) Desjardins, 719. Francesco Pandolfini agli Otto di pratica. Torino, 26 agosto 1515.

(6) Martin Du Bellay, *Mémoires* (*Collection complète des Mémoires rel. à l'hist. de France par M. Petitot*, XVII), pag. 260. — Robert de la Mark, *Histoire des choses memorables advenues du reign de Louis XII et François Ier (1499-1521)*, (*id.*, XVI), pag. 281-83. — De Vaissière, *Journal de Jean Barrillon*, pag. 79-81.

(7) Nitti, *Documenti ed osservazioni riguardanti la politica di Leone X* [in *Arch. della Società Romana di storia patria*, vol. XVI (1893)], pag. 215-17. Istruzione di Giuliano de' Medici a Raffaello Girolami, 25 agosto 1515. Vada il Girolami in fretta dove è il Duca e lo preghi di rappacificare il re col Pontefice, a patto che Francesco receda dalle sue pretese su Parma

cordo cogli Svizzeri. Renato, il *Bastardo* di Savoia, fu mandato a Vercelli, e riuscì a mettere le basi di un trattato, sicchè il re senza impedimenti (1), e rinforzato di 16 grossi cannoni prestatigli dal Duca (2), potè occupare Pavia, Trecate e Vigevano (3). Ma i cantoni svizzeri disapprovarono l'accordo di Vercelli, sicchè nuove trattative, sempre con intervento del Duca, si aprirono a Gallarate, dove al *Bastardo* fu unito il maresciallo di Lautrec, Odet de Foix. Ed anche qui l'accordo era riuscito, l'8 settembre (4), quando il cardinale Schinner, nemico della pace, non ne tenne conto. A Marignano l'esercito francese si scontrò coi fieri alpigiani, e li vinse, costringendoli a sgombrare la Lombardia (5). Il dì 11 ottobre Francesco I, seguito tra gli altri dal Duca di Savoia, entrò trionfalmente in Milano (6).

A consolidare il nuovo stato di cose in Lombardia ed impedire altre sofferenze ai suoi sudditi si occupò il Duca, cercando nuovamente di accordare il re cogli Svizzeri. Si recò a Ginevra, accompagnato da Pietro de la Guiche, balivo di Mascon, Antonio de Vistes, s[r] de Fresne, ed André le Roy, rappresentanti del monarca francese, e raggiunse lo scopo desiderato (7).

---

e Piacenza, faccia pace o tregua a vita col re di Aragona e ceda i suoi diritti su Napoli al Pontefice.

(1) De Vaissière, *Journal ecc.*, pag. 87-91.

(2) Sanuto, XXI, (Venezia, 1887), col. 22.

(3) De Vaissière, op. cit., pag. 92.

(4) Mignet, *Rivalité ecc.*, I, pag. 81-83. — De Leva, I, 211. — Sanuto, XXI, 41, 42, 72. — De Vaissière, pag. 93-108. — Il Mignet si servì in parte del *Journal* del *Barrillon*, allora manoscritto, ora edito dal De Vaissière.

(5) Mignet, I, 86-98. — De Leva, I, 212. — Sanuto, XXI, 95-97. — De Vaissière, pag. 119-24. — Nell'agosto Francesco aveva scritto al Duca ringraziandolo dell'opera sua, graziatamente vana, presso gli Svizzeri, v. Daguet, *Lettre de François I[er] au duc de Savoie, Charles III, écrite peu de temps avant la bataille de Marignan* in *Indicateur d'histoire Suisse publié par la Société générale d'histoire suisse*, XV (1884), pag. 314. Il Daguet però non riproduce il testo della lettera, che era latina, ma ne dà la versione francese. Il contenuto di essa mi lascia dubbioso circa l'epoca esatta della composizione. Può essere dell'agosto, come anche di qualche mese prima, e riferirsi alle precedenti trattative del Duca in Isvizzera. È strano poi che Francesco chiami il Duca " Mon cousin ", perchè ciò non si vede in altre lettere.

(6) Sanuto, XXI, 234, 238.

(7) Sanuto, XXI, 251 e 200. — De Vaissière, pag. 148-49. — V. anche sulla campagna di Francesco I in Italia, e specie nell'opera pacificatrice del Duca a Vercelli, a Gallarate ed a Ginevra il Guichenon, *Histoire gé-*

Pareva che la condotta del Duca tanto favorevole agli interessi francesi dovesse conquistargli l'animo del re, ma ben presto si vide che persisteva la diffidenza antica. Aveva Carlo ottenuto di recente la separazione delle chiese di Chambéry e Bourg en Bresse dalle diocesi francesi di Grenoble e di Lione. Francesco con molte insistenze col pontefice finì per ottenere nel 1516 la revoca delle bolle che avevano eretto Chambéry e Bourg a diocesi separate (1). Leone X non aveva più pel Duca l'amicizia di prima. Il 16 maggio 1516 era morto a Firenze Giuliano (2), suo fratello, creato duca di Nemours dal re all'epoca del suo matrimonio, e la vedova Filiberta di Savoia aveva ricevuto invito da Leone di consegnare le gioie ricevute in dono dal marito. Alle resistenze di essa il Pontefice irritato minacciò persino la scomunica (3), non ostante una lettera riverente del Duca (4). Accrescevano i dissidi tra Savoia e Francia le prepotenze del Lautrec, governatore in Lombardia, che suscitava nel ducato continue noie e disturbi (5). Ciò non ostante Carlo continuò a fare buon viso, forse consigliato da Filiberta, ritiratasi in Francia, e che il re e lui volevano, pare, rimaritare col

---

néalogique de la maison de Savoie. Torino, 1778, vol II, pag. 197-98. — Ricotti, *Storia della monarchia piemontese*, vol. I. Firenze, Barbera, 1861, pag. 142-43.

(1) Guichenon, II, 199. — Ricotti, I, 144.

(2) Sanuto, XXII, 79. — De Vaissière, *Journal* cit., pag. 199.

(3) Sanuto, XXII, 232: " ... et il Papa vol la dagi le zoie che li dete il marito, et lei niega averle, dicendo è sue quelle l'ha, et il Papa vol schomunicarla ".

(4) *Arch. di Stato di Torino. Minute lettere della Corte*, m. 1°. Il Duca a Leone X. Chambery, 28 aprile 1516.

(5) *Id.*, m. 2°. Memoriale al s^r di Challes di quanto deve dire al s^r di Lautrec. 20 agosto 1516. — *Id.*, altre lettere varie su questioni circa il marchesato di Ceva tra il 1516 ed il 1518. — *Id.*, *Registri lettere della Corte*, reg. 1506-21, fol. 258. Il Lautrec ai sig^ri del consiglio ducale di Torino. Torino, 2 settembre 1518. Gli abitanti di Mondovì avevano aggredito quelli di S. Michele, sudditi del re, per rovinarne il castello, e commesso ferimenti, come se esistesse guerra tra il re ed il Duca. Si provveda subito " aultrement vous pouvez estre asseurez que demon cousté Je mettray peine de revancher les subgectz du Roy et les garderay doppression comme la raison le veult ". — *Id.*, fol. 257. I sindaci di S. Michele a ? S. Michele. 10 settembre 1518. Denunziano l'accaduto, di cui nella precedente e dichiarano che se non otterranno soddisfazione, l'invocheranno dal re.

Lautrec (1), e con molta prudenza non tenne conto d'un consiglio, ardito certo, ma chimerico, datogli in quei giorni da Claudio Seyssel, arcivescovo di Torino, di occupare a forza la Lombardia (2).

Nel 1517 Ginevra, da tanti anni soggetta all'autorità dei Duchi di Savoia, cercò di liberarsene chiedendo la borghesia del cantone svizzero di Friburgo. Carlo dovette agire politicamente perchè non gli venisse tolto il dominio di quella terra così importante, ed il re con raffinata ingratitudine, scorgendolo negli imbarazzi, colse l'occasione per chiedergli la consegna di Nizza e di varie terre piemontesi, quella come antico possesso dei conti di Provenza, di cui egli era erede, queste vantando i diritti dei re di Francia stessi, della madre e suoi, come duca di Milano (3). Un araldo anzi portò al tribolato Duca un vero ultimatum. Carlo mostrò in tali frangenti coraggio e bravura lodevoli. Respinse le insolenti domande (4), e di ricambio negò la sua approvazione al matrimonio di Filiberta con Lautrec. Il re minacciò guerra (5), ma Pietro Lambert, signore de la Croix, mandato celermente in Isvizzera, seppe agire con tanta destrezza che i cantoni avvertirono il re come ogni ostilità contro il Duca sarebbe per essi un *casus belli*, avendo con Carlo stretta alleanza (6). Il re si acquetò, ma questi fatti lasciarono profonda impressione nell'animo del Duca, che scorgeva implacabile, quanto oscuro, l'accanimento del nipote a suo danno. Si noti che il 14 maggio 1517 l'imperatore Massimiliano, il re di Spagna, Carlo I, e Francesco avevano a Cambray fissata la spartizione d'Italia, e che a Francesco era toccata quasi tutta l'Italia settentrionale, compreso il

(1) Sanuto, XXIV, 31, 177, 201.

(2) Quest'importante documento fu pubblicato dal Carutti, *Storia della diplomazia della Corte di Savoia*, vol. I (1494-1601). Torino, Bocca, 1875, pag. 532-46. Appendice.

(3) Guichenon, II, 199. — Ricotti, I, 144-45. — Sanuto, XXIV, 566. " Item, si dize Genevre, tera del ducha di Savoya, et Costanza si voleno far cantoni di sguizari... Il Christianissimo recha scrito a questo duca vol li restituisca Niza e Chier, che li fo impegnati per i Re passati, e li vol dar li soi danari a esso Ducha di Savoya ".

(4) Lambert, col. 848-49, da cui il Ricotti, I, 145. — Sanuto, XXIV, 620.

(5) Sanuto, XXIV, 638.

(6) Lambert, col. 849. — Ricotti, loc. cit. — Sanuto, XXV, 140. Vedi anche su questi fatti Costa de Beauregard, *Mémoires historiques sur la maison Royale de Savoie ecc.*, tomo 1° (Turin, 1816), pagg. 306-7.

Piemonte, col titolo di re di Lombardia (1). Se quindi il re non avesse trovato intoppo negli Svizzeri, fin dal 1517 forse il Duca avrebbe perduto lo stato. I cantoni gli resero adunque in quei giorni un servizio inapprezzabile, e ben fece Carlo a riconoscerlo, visitando poco dopo Berna e stringendo alleanza con questo cantone e con quelli di Friburgo e Soletta (2). L'avvenire tuttavia appariva fosco. Il giorno in cui fosse isolato sentiva il Duca che si sarebbe trovato alla mercè del re. Pensò allora di creare una milizia nazionale, ma gli Stati Generali con belle parole negarono i sussidi. E mentre questo era il caso di agire contro la volontà dei sudditi, Carlo ebbe il torto di rassegnarsi. Certo i suoi grandi predecessori, certo il figliuol suo, Emanuele Filiberto, non si sarebbero piegati con tanta facilità a simile errore, ma avrebbero fatto quel che riputavano interesse del loro stato con o senza l'approvazione degli stati generali. A Carlo mancò l'energia necessaria in simili frangenti.

2. — Nel 1519 venne a morte l'imperatore Massimiliano I. Alla corona imperiale, com'è noto, concorsero allora il giovane re di Spagna, Carlo I, ed il re di Francia. In quest'occasione la condotta del Duca fu onesta e nel tempo stesso politica. I diritti spettavano al re di Spagna, non a Francesco I. Inoltre egli non poteva desiderare l'innalzamento di questo, che mostrava per lui tanta avversione, e proprio in quei giorni gli dava nuove cause di malcontento. Agli ultimi del 1518 le questioni sue con Renato, il *Bastardo*, s'erano riaperte, e Luisa, madre del re, aveva ordinato al signor di Confignon, ambasciatore sabaudo alla sua corte, di ritornare presso il Duca e di sollecitarlo al pronto invio di Onorato Grimaldi, signore di Beuil, in ambasciata straordinaria, con ampie istruzioni circa le cose di Renato. Essa prometteva di metter termine alle differenze (3). Il Duca eseguì i

(1) Von Bucholtz, *Geschichte der Regierung Ferdinand des Ersten*, vol. II. Wien, Schaumburg e Comp., 1831, pag. 500, doc. 1°. — Von Höfler, *Karl's I (V), Königs von Aragon und Castilien, Wahl zum Römischen Könige. 28 Juin 1519* in *Sitzungsberichte der K. Ak. der Wiss. zu Wien*, LXXIX, pag. 27, e Baumgarten, op. cit., I, 55.

(2) Ricotti, I, 159.

(3) *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari.* Confignon al Duca. Romorantin, 18 dicembre (1518). " ... Madame me manda querrer et me depescha tout à lors et me comanda men aller par devers vous, et vous dire que fisses partj Mons^r de Beul pour venir pardessa et quelle dresse-

voleri della sorella, ed il Beuil si recò in corte. Lunghe furono le trattative, irte di difficoltà, nelle quali Luisa e Francesco sostennero sempre gli interessi di Renato (1). Il balivo di Touraine ed il signor di Saint-Tropes furono mandati alla corte sabauda, e Guglielmo Gauffier, signore di Bonnivet, ammiraglio di Francia, personaggio di molta autorità presso il re, unì alle insistenze reali le sue (2). S'aggiunga che non appena la corona imperiale fu vacante, Margherita d' Austria scrisse caldamente al Duca, suo cognato, esortandolo ad accompagnare poi in Germania il re di Spagna, la cui elezione non appariva dubbia, od almeno di farsi rappresentare dal fratel suo, Filippo, conte di Ginevra. Essa gli metteva in luce qual vantaggio avrebbe tratto da questa condotta col futuro imperatore, cioè col sovrano più potente d'Europa (3). Il Duca non si lasciò abbagliare dalle

---

royt vous afferes de sorte que auries cause vous contenter „. — Le lettere del Confignon mancano quasi tutte della data annuale.

(1) De Panisse-Passis, *Les comtes de Tende*, ecc., pag. 26-30, e 229-32. Pubblica il De Panisse-Passis vari doc. sulla missione del Beuil tratti dall'*Arch. di Stato di Torino*. — Altri esistono nello stesso *Archivio. Lettere particolari*. Confignon al Duca, 15 e 25 ottobre (1518).

(2) *Arch. di Stato di Torino*, loc. cit., Bonnivet al Duca. Bloys, 30 novembre (1518), Romorantin, 28 febbraio (1519) e Cognac, 6 marzo (1519).

(3) *Arch. di Stato di Torino. Lettere principi, conti e duchi di Savoia, anteriori al duca Carlo III*, m. 2°. Margherita al Duca. Malines, 27 febbraio 1519.

" Mons[r] mon bon frère. Je me recommande à vous du meilleur de mon cueur. Jay bien a plein esté avertie du desir et bonne affection que le Roy mons[r] et nepveu esleu Roy des Romains et futur empereur a destre accompaigné et assisté de vous, comme lung des principaulx princes et suppoz du sainct empire a sa prouchaine coronation et assumption de ses coronnes tant a Aix que ailleurs, Ou a tout le moings du conte de Genevois, vostre frere, Comme par ses lettres pouvez plus amplement entendre. Et combien que pour le devoir quavez audict sainct empire Romain Ne faiz aucune difficulté que ne obtemperez voulentiers ad ce, Neantmoins pour aucunement macquieter de lamour et grosse affection que ay tousiours eu au bien et avancement de la noble maison de Savoie pour les biens et honneurs que y ay Receuz, vous ay bien voulu advertir sur ce de mon petit advis quest que pour obvier a tous inconveniens que à la faulte de ce se pourroient ensuyvir, Et pour le mieulx entretenir et accroistre les bonnes amyties et alliances qui ont longuement Regné entre ses deux maisons, Ny devez aucunement mettre delay ou difficulté, Assavoir dy venir ou dumoings envoier mondict frere le conte de Genevois,

parole della cognata. Le inviò bensì il vescovo di Moriana, Luigi di Gorrevod, a ringraziarla dei suoi consigli (1), e, non appena fu nota l'elezione di Carlo a re dei Romani (2), mandò il signor di Salleneuve a complimentare il nuovo eletto, che espresse molta riconoscenza dell'ufficio, il primo eseguito da ambasciatore straniero (3). Ma per assistere all'incoronazione, avendo promesso al re di Francia, che non voleva inimicarsi del tutto, di non andare in persona nè mandar il fratello (4), preferì inviare uno dei suoi ministri di maggior valore, Pietro Lambert, signore de la Croix (5). Carlo però sbarcando a Flessinga, espresse al Lambert in forma alquanto viva il desiderio di vedere ad Acquisgrana il conte di Ginevra (6), sicchè non ostante la parola data a Francia, Filippo di Savoia si recò alla cerimonia (7). Fu ricevuto con grandi

vostre frere. Et sil veult anticiper le temps et venir icy actendre la descente dudict s[r] Roy mon nepveu, que sera briesve, Il me sera le tresbien venu, Et luy feray le meilleur Recueil et bonne chière que possible me sera, De sorte que chascun cougnoistra lamour et affection que sa m. porte à vostre maison. Et sur ce, mons[r] mon bon frere, Je men vais prier a nostre s[r] vous donner ce que plus desirez. Escript a Malines, ce xxvij[e] de febvrier v[c]xix vostre bonne seur

MARGUERITTE „.

Arch. di Stato di Torino, ecc. Margherita al conte del Genevese, Filippo (stessa data). Lo invita in Fiandra. “ Et tiendray main devers sa M.té quil vous traictera de sorte que chascun cougnoistra lamour quil porte a vostre maison „.

(1) *Id.*, Margherita al Duca. Malines, 9 maggio 1519. Ringrazia per l'invio del vescovo.

(2) *Id.*, Margherita al Duca. Bruxelles, 1 luglio 1519. “ ... Je vous veulx bien advertir que hier au soir Je recevy lettres des amb[rs] et commissaires dudict s[r] Roy mons[r] et nepveu estans en Allemaigne, par lesquelles Il me scripve que mardy dernier xxiij[e] du mois passé tous les electeurs ont unanimement et dune voix sans discrepence quelconque... esleu et nommé à Roy des Rommains et futur empereur Jcelluy mons[r] et nepveu le Roy „.

(3) LAMBERT, col. 850.

(4) SANUTO, XXIX, 277.

(5) LAMBERT, loc. cit.

(6) LAMBERT, loc. cit.

(7) SANUTO, loc. cit. — Il VON BUCHOLTZ, *Geschichte der Regierung, ecc.*, I, 117, scrive che alle feste per l'incoronazione era ad Acquisgrana anche il Duca di Savoia. È una svista. — Sull'elezione di Carlo V a re dei Romani, vedi anche GUASTI, *I manoscritti Torrigiani donati al R. Arch. di Stato di Firenze* in *Arch. storico italiano*, serie 3[a], XXIII (1876), pag. 3-53 e 404-22, e XXV (1877), pag. 3-18, 369-403.

onori (1), ed a Worms nel novembre 1520 giurò fedeltà al nuovo imperatore in nome del Duca (2). S'acquistava il Duca in questo modo la benevolenza del maggior sovrano d'Europa, e si toglieva dall'isolamento politico in cui minacciava trovarsi per l'inimicizia occulta di Francia ed i dissidi che andavano nascendo cogli Svizzeri causa le turbolenze di Ginevra.

Naturalmente l'amicizia tra il Duca e l'imperatore rabbuiò le già poco cordiali relazioni del primo colla Francia, fors'anche perchè il re ebbe sentore di un' ambasciata che il Duca aveva mandato in Inghilterra per offrire a quel re, Enrico VIII, una lega. Enrico era in quegli anni nemico di Francia, e faceva buon viso all'imperatore. Nonostante quindi il rifiuto che il cardinale Tommaso Wolsey, vescovo di York, primo ministro del regno, oppose alle offerte ducali (3), è probabile che Francesco I si insospettisse delle intenzioni di Carlo. Egli richiese infatti allo zio di nuovo Vercelli, Nizza ed altre terre, ma, scrive il Lambert, si acquetò poi alla vista dei titoli che il Duca gli fece mostrare (4). È probabile invece, parmi, che il re non sentendosi ancor preparato ad una guerra in Italia, o non volendo romperla subito coll'imperatore, preferisse temporeggiare anche collo zio. Questi ad ogni modo per rabbonirlo e scusare il viaggio dèl fratello

(1) Sanuto, XXIX, 326. Francesco Corner al Doge. " Scrive è zonto il fratello dil duca di Savoja di qui. Fè honorata intrata; li andò incontra il principe di Orangies e il principe di Bisignano et uno altro. È venuto per nome del fratello, qual par sia partito da l'amicitia dil re Christianissimo e sia aderito a questa Maestà ". — In un documento pubblicato dal von Bucholtz, III, 700, è nominato nel seguito dell'imperatore a Worms " des Herzogs von Saphoien Bruder " con 250 cavalli. Il numero di questi è forse errato.

(2) Lambert, col. 851. — La presenza di Filippo a Worms appare anche dal documento pubblicato dal von Bucholtz, vedi nota prec. — Circa l'andata di Carlo ad Acquisgrana ed a Worms v. Gachard, *Collection des voyages des souverains des Pays-Bas*, vol. 2°, Bruxelles 1874 (in *Collection de Chroniques Belges inédites* edite dalla *Commission royale d'histoire belge*), pag. 28-29.

(3) Sanuto, XXIX, 450. Le relazioni tra Francesco ed Inghilterra in questi anni sono descritte dal Mignet, I, 334-57, e specialmente ricordate dal Jacqueton, *La politique extérieure de Louise de Savoie. Relations diplomatiques de la France et de l'Angleterre pendant la captivité de François I^er^* (1525-26). Paris, Bouillon, 1892, pag. 30-90.

(4) Lambert, col. 852.

ad Acquisgrana e Worms mandò un'ambasciata a Parigi (1), e lasciò libero il passo a molte genti francesi che sotto il maresciallo di Lescun, fratello del Lautrec, scendevano in Italia a rinforzare l'esercito che già occupava il Milanese. Il Lautrec stesso dopo breve assenza tornava a Milano e ne riprendeva il governo (2). Agli occhi degli imperiali questa concessione del Duca, forzata e non volontaria, apparve quasi una defezione. Eppure il ducato senza esercito nè milizia nazionale e senza aiuti estranei non poteva impedire il passo ai Francesi.

L'invasione del Lussemburgo, fatta dal conte Roberto de la Marck, diede ben presto inizio alle ostilità fra Carlo V e Francesco I (3). Questi fece grandi preparativi, e voleva mandare al Duca uno dei principali suoi ministri, Guglielmo Gauffier, signore di Bonnivet, ammiraglio del regno, perchè si dichiarasse dalla parte sua, ambasciata che, pare, il Duca attendesse con mediocre soddisfazione (4). I Francesi in Lombardia iniziarono le ostilità, ma il Lescun, com'è noto, fu respinto da Reggio, il fratel suo, il Lautrec, battuto da Prospero Colonna, generalissimo delle forze imperiali e pontificie, e Milano cadde nelle mani di Francesco Sforza, duca di Bari, che venne così ristabilito sul

---

(1) Sanuto, XXIX, 514.

(2) De Leva, II, 30.

(3) De Leva, II, 77. — *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari.* Confignon al Duca. Chatillon, 11 maggio (1521): " ... et sependant est survenu le trouble entre lempereur et le Roy au cause de messyre Robert de la Marche ".

(4) *Id.*, " Il nest bruyt ycy que de fere grosse preparatives pour la guerre, et le Roy lever quelque nombre de suisses par la vertu de lalliance que la feste auvec eulx, *et si la guerre tyre oultre Je ne croy point que ly hont James ung si gros trouble à la crestienté...* Touchant lallee de mons[r] ladmyral pardevers vous, les propos sont tousiours quil vous yra trouver ainsi que par si devant Je vous ay escrip. Mais, mons[r], Je ne vous puis advertj quant sera, car il ne cest pas luy meames, ny le Roy, car sellon les afferes que surviendront le Roy yra à Lyon, ou demourera par la bourgonye..... Jey remontré quavies touplein de facherie della les mons, parquoy y vous estoyt plus que espedient de passé les mons. Toutesfoys pource que navies escrip que attendries mons[r] ladmyral, que nesties point bugé et que Je vous fisse savoir quant ce porroyt estre, mais Je ney heu point daultre responce pour vous assuré quant ce porra estre ".

trono avito (1). Mai nella penisola s'era veduto da molti anni un successo militare così rapido e decisivo.

Le armi imperiali si trovavano alle porte del ducato sabaudo, ed il Duca non si sentiva tranquillo sulle intenzioni dei generali spagnuoli, sdegnati del passo accordato al Lescun (2). Eppure nessuno più del Duca aveva abbracciato in cuor suo il partito imperiale con miglior buon volere. La sola impossibilità di difendersi e le convenienze politiche l'avevano indotto a mostrarsi conciliante verso il re e Luisa, con cui Filiberta, duchessa di Nemours, s'adoperava di mantenerlo in armonia (3). Ma quando le insistenze dei sudditi lo indussero a prendere consorte, egli scelse Beatrice di Portogallo, figlia del re Emanuele, legato a Carlo V da stretti vincoli di parentela e d'amicizia, e non impedì al fratel suo Filippo di cercare i servizi imperiali, con profondo dispetto della corte francese (4). Beatrice fu condotta a Nizza da una flotta portoghese e ricevuta con grandi onori, secondo gli storici piemontesi (5). Narra però il sopracomito d'una galera veneta da Lisbona che al ritorno dell'armata fu dal comandante riferito al re Emanuele come i Nizzardi gli avessero usati pochi riguardi, e Beatrice non fosse contenta del matrimonio. Tali notizie commossero l'animo del vecchio re, il quale ammalatosi spirò il 13 gennaio 1522 (6), E pare che non tutto

(1) De Leva, II, 82-141. V. circa il mal governo del Lautrec e le sue sconfitte Mignet, I, 291-301.

(2) Sanuto, XXXI, 356. " El ducha di Savoja, di la qual nazion son mi „ diceva il gran cancelliere Mercurino di Gattinara a Gaspare Contarini, ambasciatore veneto, " è soto l'imperio, *tamen* ha lassà passar francesi che vengi in Italia contra questa Maestà „.

(3) *Arch. di Stato di Torino. Registri della Corte*, reg. cit., fol. 345. Filiberta al Duca. 11 novembre 1521.

(4) *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari.* Confignon al Duca. S. Germain en Laye, 9 settembre (1521). " Madame ma dit que lambassadeur du Roy des Romains quest ycj luy a dit que le Roy son maistre a fest le mariage de vous et de la fille du Roy de Portugal et que vous fest donner VIII cens mille escus. Et aussi que mons^r vostre frère prenoyt le... de Borgonye. *De quoy Madicte dame est fort esmervellié pour autant que vous naves voulu quil aye prins celluy du Roy* „.

(5) Ricotti, I, 169. — Claretta, *Notizie storiche intorno alla vita ed ai tempi di Beatrice di Portogallo, duchessa di Savoia, con documenti.* Torino, Botta, 1863, pag. 21-50.

(6) Sanuto, XXXIII, 176. — Gli storici piemontesi però affermano tutti che grandi onori ebbe Beatrice. — V. Lambert, col. 852. — Guichenon, II, 201.

sia falso in questi voci, poichè ancora nel febbraio 1523 l'imperatore rimproverava il Duca di non aver eseguito intieramente le condizioni del contratto nuziale (1), ed alla corte di Francia un anno prima un signore portoghese spargeva tristi voci accusando il Duca di non aver trattato degnamente Beatrice ed il suo seguito di portoghesi (2). Ad ogni modo il matrimonio assicurò a Carlo l'amicizia imperiale, ed anche il re di Francia, per quanto poco soddisfatto, dissimulò, avendo bisogno dello zio nelle sue aspirazioni italiane.

Francesco infatti non sapeva darsi pace della perdita di Milano. Già durante la triste campagna del Lautrec aveva espresso il desiderio di recarsi in persona a Milano (3). Ai primi del 1522 pareva deciso alla spedizione ed era convinzione pubblica che egli scendesse a riacquistare il perduto (4). Intorno ai 10 di gennaio infatti Luisa di Savoia ricevendo in udienza Gio. Giacomo di Bernezzo, signor di Rossana, ambasciatore residente del Duca, gli disse esplicitamente: " Je veulx que vous alles ver mon frère an dilligence et luy dires de ma part comant le Roy a deslibere daller au personne reconquester ce quest perdu de la Duché de Millan et que Je luy prie et conseyle que, quant Il aura novelles que le Roy sera a Lyon, quil envoye ver luy pour luy presenter ses pais et tout quant quilla à son comant, et luy

(1) *Arch. di Stato di Torino. Spagna. Lettere principi*, m. 1°. Carlo V al Duca. Valladolid, 11 febbraio 1523. " Nous avons entendu que ancores naves satisfait sur aucunes choses dont estes tenu et obligé par vertu du traicté de vostre mariage avec nostre treschière et tresamée cousine, la Duchesse vostre compaigne ".

(2) *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari*. Gio. Giacomo di Bernezzo, sig^re^ di Rossana (*Bernex*) al Duca. S. Germain en Laye, 14 gennaio (1523). Il portoghese diceva " commant madame et ceulx qui sont venus au sa compagnie sont mal trétés de vous ". Filiberta, duchessa di Nemours, affermava al Bernezzo " Jl y a icy ung de portugal qua dit quelques parolles de mon frère, dont il ne parle pas saigement. Il la voulu parlé a moy, ce que Je nay point voulu, quar Je ne seres point... ayse quil me vint antretenir de tieulx propos, mes Jatans et du Roy mesmes que set ung fou ".

(3) Lett. cit. del Confignon, 9 settembre. " Au surplus, Monseigneur, le Roy continue destre bientost a Lyon et delibère de passer par Gennes pour aller à Millan ".

(4) Mignet, I, 325-26.

dire que sil ne le fit que le Roy ne passera point par ses pais que le moins quil poura, ce que luy facheroyt fort, veheu que cest le plus droyt et le plus ayse, quar Il ne se fieroyt point en luy et *luy donra cause de croyre pluseurs parolles que lon luy a dit, ce qua presant Il ne peult bonnemant croyre*. Vous luy dires que, oultre ce, Je luy pris que luy memes veusle venir audavant du Roy tant avant quil poura, soy presenter prest à luy fère service dune bonne chière et rondemant, quar le Roy ne veult de luy chause que luy sceut pourter dommaige, si non ung bon vollayre et luy dites de ma part que se le fet que Je lassure quil santrovra bien, aultremant Je seroyt desplesant, *quar Je metiens estre leur mère* „ (1). Luisa era inquieta. Voleva vassallo del figlio il fratel suo, ma nel tempo stesso non desiderava rottura tra nipote e zio, vedendo i rovesci della Francia nella penisola e l'unione di Enrico VIII coll'imperatore, a cui il re inglese pare facesse in quei giorni imprestito di ben 300.000 scudi (2). Il Bernezzo si schermì alla meglio, assicurando a Luisa essere ottima intenzione del suo principe. Ma essa tosto: “ Je le voudres bien; mais se doulte que non, *quar Illa tout plein de mauves francoys au tour de luy* „. Allora il nostro ambasciatore replicò: “ Madame, ... vous assure que mons.r votre frère ne se governe allapetit *(sic)* de personne, car il conest asses se que luy est profitable „. La conclusione fu che il Bernezzo si tenesse pronto al viaggio, quando ne ricevesse ordine da Luisa (3).

Il re però rinunziò alla calata. Mandò soccorsi al Lautrec, rimasto sull'Adda, ma la disastrosa giornata della Bicocca e la perdita delle ultime piazze lombarde abbatterono le speranze di una rivincita (4). Contro il re vinto si formò una coalizione europea, a cui aderirono quasi tutti gli stati italiani, l'imperatore, ed il re d'Inghilterra (5). Ma Francesco, non domo dai rovesci, respinse le invasioni tentate dalla Piccardia e da Bayonne, smascherò la congiura del conestabile Carlo di Bourbon, inasprito dalle intenzioni reali a suo riguardo (6) e nell'estate del 1523

(1) Lett. cit. del Bernezzo del 14 gennaio.
(2) *Id.*, lett. cit.
(3) *Id.*
(4) Mignet, I, 326-40.
(5) Mignet, I, 357-59.
(6) *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari.* Bernezzo al Duca. Saint

fece avviare alla volta d'Italia il maresciallo Anna di Montmorency per la via di Lione e l'ammiraglio Guglielmo Gauffier, signore di Bonnivet per quella di Grenoble (1). Cercò bensì il Bonnivet di attraversare la Bressa, ma il Duca, a cui dispiaceva fosse calpestata quella ricca ed ubertosa provincia dalle soldatesche, mandò subito ad invitarlo di seguire la via di Lione e del Delfinato ed a concertare segreto accordo per la tutela dei suoi interessi (2). Carlo era in quei giorni a Ginevra. Viste le mosse francesi s'affrettò alla volta d'Italia per sorvegliare il Piemonte durante la nuova guerra (3). Per via incontrò il Montmorency, al quale concesse il passo (4). Il 30 agosto il Bonnivet

Germain en Laye, 20 aprile (1523). Dice che il processo intentato al conestabile dal re e da Luisa per ispogliarlo dei suoi beni si diceva " prandroyt quelque bonne fin " ed era rimesso a Luisa. — V. su questi fatti Mignet, I, 374-75, 396-97.

(1) Mignet, I, 453-55. — De Leva, II, 204. — Decrue, *Anne de Montmorency, grand maître et connétable de France à la cour, aux armées et au conseil du roi François Ier*. Paris, Plon, 1885, pag. 38.

(2) *Arch. di Stato di Torino. Francia. Lettere ministri*, m. 1°. Il Duca ai sigri di Confignon e di Rean, 13 agosto 1523. — *Id., Lettere particolari*. Bonnivet al Duca, Lione, 17 agosto (1523) " ... puis quil vous plaise que lon sollaige ledict pays pour les causes et Raisons que mescripvez, soyez seur, Monseigneur, quil ny passera personne, et que lon tiendra le chemin de la Savoye ainsi que desirez ". — Da vari mesi trattava il Bonnivet per aver passo nelle terre ducali, v. la vivace lettera sua al Duca da Lione 10 maggio (1523) e altra del 17 dello stesso mese. Carlo poi aveva mandato il presidente della camera dei Conti, Pietro Lambert, signore de la Croix, a sollecitare gli Svizzeri in favore del re. V. *id.*, loc. cit., Lione, 10 maggio (1523).

(3) *Arch. di Stato di Torino. Lettere principi, duchi di Savoia*, m. 3°. Carlo a [Filiberta] (?). Ginevra, 17 luglio (1523): " Je men pars demain pour faire le voyage ditallye comme desja vous ay escript. Et vous asseheure quil desplaist bien fort à vostre seur. Et voyant lestat en quoy elle est Je tascheray donner ordre à nos afferez pour men revenir inconténent ". Scrive pure di aver saputo che il Bonnivet ed il Montmorency dovevano trovarsi a Lione entro pochi giorni. — Da questa lettera si vede che il Duca lasciò a Ginevra Beatrice in istato interessante. E colà infatti diede la Duchessa alla luce Luigi, principe di Piemonte. V. Guichenon, II, 229.

(4) De Leva, loc. cit. — *Arch. di Stato di Torino, Lettere particolari*. Bonnivet alla duchessa di Nemours, Lione, 7 aosto (1523). Il Montmorency ha trovato il Duca di Savoia in ottima disposizione, " et la bonne voulenté quil a de faire service au Roy sans y Riens epargner, mesmement pour le passage de larmee dudict sr en Itallie, de quoy Je suis aussi ayse que de nouvelle que Jaye sceue ". — *Id.*, Bonnivet al Duca. Lione, 8 agosto (1523).

giunse a Susa, proclamando le sue intenzioni verso i sudditi ducali ottime e che il re per amore dello' zio dimenticava le ostilità fatte alle genti francesi nella disgraziata campagna del Lautrec e del Lescun da vari signori piemontesi (1), in particolare dai signori di Masino, di Crescentino e di Scalenghe. Anzi poichè il duca l'aveva pregato di non scendere ad ostilità contro i suddetti nobili, in ispecie contro il Masino, del quale proprio in quei giorni aveva sequestrate lettere dirette al Duca di Milano, a Prospero Colonna ed a Girolamo Morone con minuti particolari circa le truppe francesi, chiese in contraccambio al consiglio ducale di Torino un certo numero di ruote pei carri delle sue artiglierie, danneggiate forse dalle difficoltà delle strade (2). Unitosi poi al Montmorency ebbe ben presto a fronte l'ottuagenario Prospero Colonna, generalissimo dell'esercito imperiale, ed essendo questi spirato nell'inizio della campagna, il vicerè di Napoli, D. Carlo di Lannoy, ed il marchese di Pescara, Ferdinando Davalos. Egli cercò di bloccare Milano, ma, stretto dal nemico (3), dovette presto ritirarsi e porre il campo ad Abbiategrasso. Confidava di ricevere qualche soccorso di gente d'armi e di fanti dalla Francia, e pregava quindi il Duca di tener pronti viveri al passaggio di quei soldati, pur ringraziandolo con effusione dell'opera da lui prestata fino allora (4). Ad Abbiategrasso rimase due mesi, molestato di continuo dalle ostilità dei Vercellesi (5), finchè il vicerè di Napoli, il Duca di Milano ed il Pescara, raggiunti dal conestabile di Bourbon, si accamparono nelle vicinanze. Quattromila svizzeri raggiunsero

---

(1) *Arch. di Stato di Torino*, loc. cit., Bonnivet al Duca. Susa, 30 agosto (1523). "... en executant la charge quil a pleu du Roy me baller, et non point pour user de vengeance. Car le Roy veule oublier tout ce que on lui a fait de mal en cest endroit pour lamour de leur maistre ".

(2) *Id.*, loc. cit., Bonnivet al consiglio ducale. Avigliana, 30 e 31 agosto (1523).

(3) *Id.*, Bonnivet al Duca, Abbiategrasso, 23 novembre (1523). Attribuiva alla pioggia ed alle nevi la ritirata, e vantava che questa " nest pas sans fere autant dennuy à ceulx de Millan, que si nous estions tousiours en nostre logis accoustumé ".

(4) *Id.*, lett. cit. " Il me semble que vous vous acquietez si tresbien en ce que toucha le bien des affaires du Roy, que Je puis dire que vous estes tout tel que navez promis ".

(5) *Id.*, *Lettere partic.*, Bonnivet al Duca. Abbiategrasso, 26 genn. (1524).

l'esercito francese, altri si attendevano di giorno in giorno, ma il nemico pure ingrossava (1). Alcune scaramuccie infelici e più di tutto una mossa ardita del Lannoy, che tagliò i viveri all'esercito francese, obbligarono il Bonnivet a ripassare il Ticino e ridurre il campo a Vigevano (2). La ritirata proseguì lenta, ma disastrosa, verso Novara. Il Bonnivet, ferito al passo della Sesia, lasciò il comando all'illustre cavaliere Bayard (3), che ripiegò su Novara, e morì da valoroso combattendo il 29 aprile 1524 in uno scontro tra Lessona e Quaregna in quel di Biella (4). Il Montmorency più fortunato si salvò e, ben ricevuto a Torino dal Duca, potè in lettiga rientrare nel regno (5). Le orde spagnuole affamate ed avide di bottino s'accostarono minacciose al confine piemontese, desiderando trarre dai poveri sudditi ducali viveri e danaro.

Per evitare questo pericolo, da lungo tempo preveduto, Carlo fin dall'estate del 1523 aveva con ogni possa cercato di rappacificare tra loro i due grandi monarchi. Il 17 agosto 1523 Pietro Lambert, signore de la Croix, erasi recato presso il re Francesco I con istruzioni pacifiche. Diceva il memoriale affidatogli che non ostante i suoi sforzi il Duca vedeva con dolore nemici l'imperatore ed il re, e che da tale inimicizia ne sortiva male irreparabile alla cristianità (6). Grandi essere le forze preparate da uno per offendere, dall'altro per difendersi. Desiderar egli adoperarsi tuttora per un accomodamento: badassero ambidue che la vittoria era nella mano divina, e mai cosa sicura. Scegliesse adunque il re un luogo neutro prima di venire alle armi, e s'affidasse in lui Duca, suo zio, ed anche stretto parente

---

(1) *Id.*, *Lettere particolari*. Il signor d'Estavaye al Duca, Abbiategrasso, 16 febbraio (1524).

(2) *Id.*, Vigevano, 15 marzo 1524. — V. anche Mignet, I, 496.

(3) De Leva, pag. 206-10.

(4) Sul luogo della morte del Bayard, vedi Callamand, *Du lieu où Bayard a été tué*. Grenoble, Allier, 1892.

(5) Decrue, op. cit., pag. 41-47.

(6) *Arch. di Stato di Torino. Francia, Lettere ministri, ecc.* 1° Istruzione al Lambert. 17 agosto 1523: " ... et toujours linimitié se agumente de jour à aultre, dont lon ne peult experer que la ruyne de la plus part des chrestiens, si quelque bon moyen nest trouvé par le quel ilz puissent estre reduitz à meillieur terme ".

coll'imperatore (1). Il Lambert andò a destinazione, ma non ottenne altro che un apparente miglioramento nelle disposizioni della Francia verso il Duca. Il re fece dichiarazione pubblica di rinunziare a tutti i diritti che poteva avere negli stati dello zio come conte di Provenza e duca di Milano: rinunziò quindi a Nizza e Vercelli (2). Ma fu tutto. Carlo V, supplicato dal Duca, del quale diffidava in quei giorni (3), circa alla pace rispose freddamente di non potersi impegnare, senza conoscere prima la volontà de' suoi alleati, il Pontefice, Clemente VII, il re d'Inghilterra, Enrico VIII, e le potenze italiane, salvo Venezia (4). Promise invece calde lettere a' suoi ministri per

(1) *Arch. di Stato di Torino, ecc.* " Et considerant les forces et armees assemblees par ung chascun deulx et que de present Ilz sont sur chemin pour essayer de fere selon quilz ont proposé lung pour la conqueste, laultre pour la deffense, tout ne peulx rendre que plus grant malveulience, et advisé envoyer des rechiefs devers eulx remonstrer ce que desus ".

(2) Guichenon, *Histoire général. de la maison de Savoye*, v. IV, parte 2ª, pag. 493-94. Lione, 10 settembre 1523. Ricorda tra gli altri questa rinunzia il Carutti, I, 270.

(3) Dal luglio 1522 a Lisbona si trovava Onorato Cays di Nizza, suddito del Duca, il quale cercava di stringere matrimonio tra il rè Giovanni di Portogallo e Renata di Francia, a nome di Francesco I e di Luisa. Questo matrimonio era avversato da Carlo V, che voleva impedire qualsiasi avvicinamento tra Francia e Portogallo. V. in *Comptes-rendus des séances de la Commission Royale Belge d'histoire ou recueil de ses bulletins*, serie 4ª, VII (Bruxelles, 1880). Piot: *Correspondance politique entre Charles-Quint et le Portugal de 1521 à 1522*, pag. 101. Il protonotario Cristoforo di Barroso, agente imperiale a Lisbona, al cancelliere Gattinara. Lisbona, 22 luglio 1522. — Il Cays era nato a Lisbona, avendo nel 1521 trattato colà il matrimonio del suo Duca con Beatrice. Ora Carlo V sospettava che le sue pratiche nel 1522 a pro' di Francia fossero appoggiate dal Duca. V. *id.*, pag. 105. Il Gattinara al Barroso, dicembre 1522. " Et entre aultres choses principalement S. M^té^ désire que vous sachez secrètement et certainement *si ledit Honorat a point apporté quelque commission de Mons^r^ le Duc de Savoye en faveur des affaires dudit roy de France.* Et si pouvez recouvrer quelque lettre ou copie à ce propos, seroit bien venue ".

(4) *Arch. di Stato di Torino*, Genève, cat. 1ª, mazzo 11. Memoriale del Duca all'Imperatore colle risposte imperiali, Pamplona. 19 ottobre 1523. " Puisque S. M. ne peult en ce parler sans le Pape, le Roy dangleterre et autres alliez desquels ne se peut si tost savoir la volunté, Et ledict s^r^ de Savoie na sur ce faicte aucune ouverture, sur la quelle lon puist prendre aucun fondament, ny gist autre response Jusques à ce quil y ait meilleur Informacion et que lon parle plus clerement ". V. anche Rawdon-Brown,

evitare soprusi e distruzioni nel territorio ducale, purchè i Piemontesi non accordassero ai Francesi ristoro alcuno, bensì agli imperiali (1). Ammise nondimeno che le condizioni del Ducato impedivano al Duca di opporsi ad una calata francese (2). Ma, interpretando una domanda di Carlo circa la condotta da tenere verso la lega italiana (3) come un desiderio di entrarvi, disse amerebbe molto di vederlo membro della medesima, e che avrebbe scritto al Pontefice ed agli altri collegati su tal materia, invitandoli ad accettarlo senza pretendere da lui alcuna contribuzione pecuniaria (4).

Era un oltrepassare le intenzioni del Duca, ma i progressi dell'esercito imperiale impedirono a Carlo di rilevare l'inconveniente. Il Lannoy, nemico dichiarato del Duca, perchè esso aveva concesso il passo ai Francesi e per altri motivi occulti, appariva pieno di mal talento. In tale occasione Beatrice di Portogallo ritornò dalla Savoia, dov'erasi trattenuta fino a quei giorni, facendosi precedere da efficaci lettere al borioso vicerè, al conestabile di Bourbon ed ai principali capitani dell'esercito imperiale, in ispecie al marchese di Pescara, Ferdinando d'Avalos, ad Antonio de Leva ed a Ferdinando Alarcon, esortandoli di risparmiare il territorio ducale (5). Dapprima tutte le esor-

---

Calendar of State papers and manuscripts existing in the Archives of Venise, ecc., vol. 3° (1520-26). London, 1869, pag. 340. Gaspare Contarini al Doge. Burgos, 12 settembre 1523.

(1) *Archivio di Stato di Torino*, loc. cit.: " ... en espoir quil pourveyera que sesdictz subiectz ne assisteront aux ennemys, Ains se conduiront comme bon Imperiaulx à Recuillir gracieusement les gens de sadicte Mté et les assister de vivres et autres choses necessaires ".

(2) *Id.*: " *Sa Majesté tiendra pour excuser* (sic) *monsr de Savoie quant au passage des ennemys par ses pays, puisquil nest en son pouvoir de y resister, en faisant du surplus ce que bon prince et vassal du sainct empire doit faire* ".

(3) *Id.*: " Plus fera donné advis à monsr de Savoye de quelle sorte il se devra guider sur le fait de la lighe ".

(4) *Id.*: " Sa M.té desire et aura trez aggreable que ledict sr entre en la lighe selon la forme dicelle. Et a cest cause escripra voluntiers a notre r. père et autres, qui ont le povoir sur ce, toutes lettres favorables à fin quilz recoivent ledict sr en ladicte lighe sans le grever en contribucion dicelle ".

(5) *Archivio di Stato di Torino. Registri lettere della Corte* cit., reg. 1522-37, fol. 8 e 10-11. Chambery, 8 maggio 1524.

tazioni furono inefficaci, poichè Vercelli venne occupata (1), ma poi il vicerè ed il Bourbon ai primi di giugno consentirono ad un abboccamento colla Duchessa per stabilire qualche temperamento alle angustie del paese ed ai bisogni dell'esercito (2). La incontrarono nella notte del 5 giugno presso Rivoli e l'accompagnarono fino a Torino. La Duchessa non sapeva come alloggiarli in quella città, nulla avendo preparato, e mancando il castello assolutamente di suppellettili (3). Desiderava essa scoprire la vera causa del malanimo di D. Carlo di Lannoy, ed alla fine vi riuscì. Il vicerè asseriva d'aver saputo per via indiretta che il Duca l'aveva tacciato, parlando con un ambasciatore milanese, di millanteria e detto ch'egli, Lannoy, per ben sette anni aveva supplicato d'essere ammesso a' suoi servigi, mentre la risposta di lui, Duca, era sempre stata negativa; appariva quindi molto sdegnato. Beatrice, coadiuvata nel mese di luglio da Filippo di Savoia, conte di Ginevra, suo cognato,

(1) Sanuto, XXXVI, 255.

(2) *Archivio di Stato di Torino. Registri* cit., fol. 19. Avigliana, 3 giugno 1524. — *Id., Lettere Principi, Duchi di Savoia,* m. 6°. Beatrice al Duca. Avigliana, 4 giugno 1524. Dice attendere i duci imperiali pel giorno seguente (5).

(3) *Archivio di Stato di Torino. Lettere Principi,* loc. cit. Beatrice al Duca. Torino, 5 giugno (1524). " Et dez ceste nuyt y arriverent mons[r] de Bourbon, le vice Roy, mon cousin de Paintyèvre et pluseurs aultres cappitaines et chiefz de larmee de lempereur, lesquelz hier me vindrent audevant aupres de Rivolles et maccompagnerent Jusques Icy avecques pluseurs bons et honnestes propos. Reste, monseigneur, que Je suis assez mal en ordre de caddretz dune manyere, potz, flascons, platz, chandelliers, et aultres veisselle dargent. Et ne scay si le duc de Millan vient. Comme les pourray recepvoir a vostre honneur et myen? Semblablement ny a icy aulcune tappisserie ny donzelletz de soye, Combien que Jay faict accoustrer le chasteau au myeuls que ma esté possible. Sus quoy, Monseigneur, vous plaira avoir bon advys, Et y fere donner lordre necessaire. Ayant parlé audict mons[r] de bourbon Je vous advertiray des devys quil maura tenu et de toutes auttres choses que pourray entendre ". Non è punto strano che nel castello di Torino, sede della Corte, mancassero, nei periodi d'assenza dei Duchi, addobbi convenienti. Ancora nel secolo XVII in Francia, quando la Corte non risiedeva a Parigi, veniva asportato tutto, persino il letto reale, sicchè il Re, se per qualche urgente motivo faceva ritorno nella città, doveva ricorrere all'ospitalità privata. V. A. Barine, *La Grande Mademoiselle* [in *Revue des deux mondes*, vol. CLV (1 ottobre 1899], pag. 581.

tentò di riavere Vercelli; ed i ministri imperiali, consigliati specialmente dal marchese di Pescara, e dominati dall'alto prestigio che la Duchessa godeva presso l'imperatore, consentivano già a mandare lettere missive e patenti per eseguire lo sgombro della piazza, quando il Lannoy, pieno di mal animo, fece nuova opposizione, pretendendo di trattenere quella città finchè il forte di Bard nella valle d'Aosta non gli fosse consegnato, e 700 uomini d'arme ricevessero alloggio in terre piemontesi. Solo a stento riuscì la Duchessa a calmarlo ed indurlo ai suoi voleri. Beatrice consigliò per lettera il Duca di rivolgere all' altiero spagnuolo qualche espressione gentile, scrivendogli parole di ringraziamento per lo sgombro di Vercelli e per l'ottima sua volontà (!), con preghiera di affrettare la liberazione dello stato dalle soldatesche entratevi. Così forse si sarebbero annullate le avversioni dell'ombroso vicerè (1). In conclusione Vercelli fu restituita, e venne pure impedito l'assedio di Fossano, già stabilito dal Lannoy (2). Di più Beatrice, messa sull'avviso dalla domanda di Bard, scrisse al Duca mandasse colà tosto due gentiluomini a presidiare il forte; s'eviterebbe così ogni colpo di mano degli Spagnuoli, che mostravano profondo sospetto del conte Renato di Challant, principale feudatario della valle d'Aosta, che essi accusavano d'inimicizia verso l'imperatore ed i suoi interessi (3).

---

(1) *Archivio di Stato di Torino*, loc. cit. Beatrice al Duca. Torino, 8 giugno (1524): " ... le Vyce Roy neust voulenté de ce fere pour ce que lambass[r] de Millan, comme Il a dit au dict s[r] de Maurianne, a escript à ung sien maistre dhostel et luy a dit *que luy avyer dheu dire quil nestoit que ung glorieulx, et quil avoit tasché de demeurer vostre serviteur lespace de sept ans, ce que naryes voulsu accepter, ains aves faict dislayer de luy administrer justice durant ledict temps*... Et ne vouloit que Verceil fust rendu que premierement Bard ne luy fust remys. Et en aultre demande lougeys sur voz pays pour sept cens hommes darmes. Sur quoy demain renvoyeray par le conseil des dicts s[rs] devers lesdictz s[rs] Mess[rs] de Maurianne, President de Piemont et Chabert de Scallenghes, avecques les memoires et Instructions dont vous envoye le double. Tant ya quil vous fault gaigner ledict s[r] Vice Roy. Car cest celluy sans lequel ny mons[r] de Bourbon ny aultre ne aouseroit riens exequuter ny fere aulcune chose. Et est requis... que luy escripvez quelque bonne lettre... „.

(2) *Id.*, Beatrice al Duca. Torino, 19 luglio (1524): " ... et nont procedé au siege de Fossan et neust esté la diligence dont on y a usé, les choses ne fuissent passées à si bon marchié „.

(3) *Id.*, lett. cit. dell'8 giugno: " ... pour ce quilz ont pour suspect

Carlo del resto non era rimasto inattivo. Sebbene trattenuto in Savoia dalle cose di Ginevra, non appena conobbe l'occupazione di Vercelli, spedì Francesco, signore di Bellegarde, suo maggiordomo, presso il vicerè ed il Bourbon, invitandoli a sgombrare la piazza, e poco dopo mandò anche a quella volta Chiaberto di Piossasco dei signori di Scalenghe. Siccome la risposta tardava a giungere, ordinò al suo rappresentante in Isvizzera, il signor Baptendier, di avvertirne i cantoni, pensando forse di ricorrere al loro aiuto, quando il Lannoy rifiutasse. Invece la destrezza di Beatrice spianò le difficoltà (1).

Il Bourbon, pieno di fiele verso l'antico signore, il re di Francia, chiese in quei giorni, ed ottenne dalla Duchessa, il passo attraverso il contado di Nizza per invadere la Provenza (2). S'aggiunga che un ambasciatore inglese, Riccardo Pace, comparve allora in Piemonte, cercando di far entrare il Duca nella lega contro Francia. L'abilità colla quale il Duca o chi per lui seppe schermirsi dalle domande inglesi, insospettirono il Pace, al punto da dubitare quasi che il Bourbon inoltrandosi verso la Provenza fosse attirato in qualche tranello (3). L'esercito imperiale adunque entrò in Provenza (4), e com'è noto, prese Tolone

mons[r] de Challand quil disent ennemy de lempe reur „. La Duchessa in questa lettera raccomandava pure al Duca di ringraziare caldamente il Pescara, a cui si doveva la restituzione di Vercelli. " Car cest celluy seul qui est cause de la Remission, comme entendrez par le s[r] de Musinens, vostre grand escuyer „.

(1) *Archivio di Stato di Torino, Svizzera, Lettere ministri*, m. 1°. Il Duca al Baptendier.

(2) Brewer, *Letters and papers. Foreign and Domestic of the reign of Henri VIII*, vol. IV, p. 1ª (1524-26). London, 1870, pag. 186. Richard Pace al card. Wolsey. Savigliano, 25 giugno 1524. " In three days the army will be at Nice, which is offered to Bourbon by the Duke of Savoy, the lord there „. Dubito molto che il Duca abbia offerto Nizza al Bourbon; credo piuttosto che non abbia potuto rifiutarla. — Baldassar Castiglione da Roma informava per tempo i marchese di Mantova della spedizione. — Serassi: *Lettere del conte Baldassar Castiglione ora per la prima volta date in luce*, vol. 1°. Padova, Comino, 1769, pag. 113. Roma, 25 maggio 1524. Circa la lega di Enrico VIII e di Carlo V in questo anno vedi Guicciardini, libro XV, cap. 3° e Jacqueton, op. cit., pag. 90 e segg.

(3) Brewer, pag. 187, lett. cit. " Founds Bourbon a very substantial, wise and virtuoous prince. *If he is deceived by the Duke, every one else is* „.

(4) Alla fin di giugno i lanzichenecchi già erano a Tenda, con molto danno per le terre ducali, *Arch. di Stato di Torino, Lettere particolari*. Il

ed Aix, ma si trovò impedito dalla resistenza di Marsiglia (1). Pochi giorni prima che Aix s'arrendesse, il 6 agosto, un nuovo ambasciatore inglese, Giovanni Russel, giunse a Torino, ben ricevuto da Beatrice, che trovò principessa molto bella e graziosa (2), ma rimase colpito dalla triste condizione delle terre piemontesi. Il paese soffriva, il Duca non padrone di casa sua, e gli abitanti, non paghi della miseria ed invasioni, erano dilaniati da fazioni intestine e si uccidevano l'un l'altro (3). Cavour, Barge, Bagnolo gemevano oppresse dalle imposizioni guerresche del capitano Alarcon, ed il Vercellese tutto era pur sempre alla discrezione dei soldati, che vivevano di violenza e rapine. Naturalmente i soprusi provocavano di continuo tumulti e qualche soldato imperiale vi lasciava la vita. Beatrice mandava acri lagnanze all'Alarcon ed al vicerè per mezzo del collaterale Cara del senato di Torino (4). Ed il conte di Ginevra, Filippo, si recava in Asti personalmente dal Lannoy per rimediare ai soprusi; riuscì a fare un concordato (5), ma fu lettera morta, poichè una bufera ben più terribile si addensò di nuovo dalle Alpi sopra il povero e tribolato Piemonte.

---

signor di Balleyson al Duca, Torino, 28 giugno (1524): "... meurrant par les champs lung ca, e l'aultre la, Mons^r de Bourbon doibt partir de Villefalet pour les suiyvre. Je ne scay sil sera si tost quilz disent. Je vous adverty quilz font du mal au pays plus quon ne sauroit extimer, Et lon sy peult remedier ".

(1) De Leva, II, 211 15. Breve cenno della campagna del Bourbon in Provenza fa il Decrue, op. cit., pag. 48. Vedi anche Gioffredo, col. 1268-70. Sanuto, XXXVI, col. 497, 498, 515.

(2) Brewer, *Letters and papers* cit., p. 250. John Russel ad Enrico VIII. Torino, 9 agosto 1524. " The is a fair, gracious, and wise princess, and accompanied with many cauncilors in long robes, gentlemen, ladies and gentlewomen ".

(3) Brewer, loc. cit. " Piemont is very dangerous, *the prince is not matter of it*, as there are so many men of war in it. The inhabitants daily rob and Kill each other, and the Duke of Savoy, *who is a great justicer*, is coming hither to set them in order ".

(4) *Archivio di Stato di Torino. Registri* cit., fol. 30, 32. Memoriale al Cara, fol. 34. Beatrice all'Alarcon. 13 agosto 1524.

(5) Brewer, op. cit., pag. 250, lett. cit. " The count of Geneve har just arrived here ". — *Archivio di Stato di Torino*, lett. cit. di Beatrice all'Alarcon. "... Nel quale ancora heri in Ast presente ley confirmò le dette promesse a lo mio fratello el Conde de Genevra ".

3. — Il conestabile di Bourbon ed il Pescara, mentre stringevano Marsiglia, vennero a conoscenza che il re Francesco I ed il maresciallo Anna di Montmorency andavano concentrando un esercito ai piedi delle Alpi, coll'intenzione manifesta di scendere un'altra volta in Lombardia. Lo scopo del re era noto da lungo tempo al Duca, che, mosso a sdegno dalla brutalità degli imperiali, non aveva esitato, colla maggior secretezza possibile, a trattare col nipote, per trarre dalla nuova spedizione vantaggio a sè ed allo stato suo. Il Bonnivet lo visitò a Chambery, e sorbendo dell'ottimo cognac mandato da Beatrice, mise con lui le basi di un trattato (1). Qualche malumore serpeggiava bensì alla Corte, specie quando il re s'era incamminato verso Lione con desiderio di vedere il Duca, e questi, per una coincidenza che parve molto strana, s'avviò contemporaneamente alla volta del Piemonte. Francesco fin dall'anno precedente aveva fatto intendere che una visita dello zio gli sarebbe stata gratissima, coll'intenzione occulta di mostrarlo pubblicamente suo alleato (2). Ma il Duca, desideroso sempre di evitare manifestazioni pubbliche, schivò alla meglio la visita, pur facendo all'ambasciatore francese alla sua corte, il signor des Barres, le più vive dichiarazioni di simpatia (3). Il Bonnivet che per intesessi suoi particolari appoggiava i disegni del Duca (4), parlò a suo favore (5), sicchè il re non fece più osservazioni, ma disse di approvare la partenza dello zio, e chiese il passo in Savoia per 300 uomini d'arme e 4000 fanti, con ampie provvisioni di viveri ad equo prezzo (6). Nel tempo stesso, quasi a compenso della domanda

---

(1) *Arch. di Stato di Torino*, *Lettere particolari*. Bonnivet alla Duchessa. Chambery, 17 giugno (1524): " Mons[r] ma fait taster de vostre codignac (*sic*), que Jay trouvé le meilleur et plus excellent du monde, qui me fait bons supplier de men vouloir donner ".

(2) *Id.*, Bonnivet al Duca. Lione, 7 maggio (1524).

(3) *Id.*, Bonnivet al Duca. Paray, 12 luglio (1524).

(4) *Id.*, Chitain sur Loyre, 8 luglio (1524) e dal campo innanzi Pavia, 28 dicembre (1524).

(5) *Id.*, Paray, 15 agosto (1524): " ... je vous advise quil sest fait beaucoup de mauvais Rapports en vers ledict s[r], mais Jusques Ici ny a prins pied, pource que Je lay tousiours adverty que vous ne vouldriez pour riens luy faiblir, ne contrevenir à ce que Je luy ay rapporté de vostre part ".

(6) *Id.*, Paray, 6 agosto (1524).

fatta, ordinò al Bonnivet di mettere a disposizione dello zio gente, qualora il Duca volesse opporsi armata mano alle angherie spagnuole (1). Intanto l'esercito francese si andava concentrando: 2500 uomini d'arme, 12,500 lanzichenecchi, 8000 svizzeri, 18,000 avventurieri francesi ed italiani e da 800 a 1000 cavalleggieri s'incamminavano per diverse strade verso il Delfinato e la Linguadoca; quantunque si mostrasse esteriormente volontà di pace. Il re trattava infatti coll'imperatore e col re d'Inghilterra, mentre il Bourbon ed il Pescara stringevano Marsiglia, difesa tenacemente dal signor di Brion. Era universale la meraviglia che il Bourbon non fosse penetrato in Francia dalla parte di Lione, incalzando il Bonnivet, invece di rivolgersi alla Provenza, chè la sua vittoria sarebbe stata quasi certa, tanto era indebolito l'esercito francese nella primavera del 1524 (2).

Ora al contrario il re minacciava le spalle degli invasori: il maresciallo Giacomo di Chabannes, signore de la Palisse, ed il Montmorency stesso muovevano loro contro, sicchè per evitare una catastrofe i duci imperiali si ritirarono precipitosamente dalla Provenza verso Nizza, inseguiti dai nemici, in particolare dal Montmorency, che penetrava a Nizza da una parte, mentr'essi ne uscivano dall'altra (3). L'ammiraglio di Bonnivet con un altro corpo d'esercito scendeva in Piemonte e compariva nel marchesato di Saluzzo, dove il marchese Michele Antonio l'attendeva con impazienza.

A questo punto dobbiamo ritornare sulle nostre orme e ricercare alcune notizie, le quali ci spiegheranno gli avvenimenti della presente campagna. Vedemmo come nel 1519, quando l'imperatore si recò in Germania a prendere la corona imperiale, Filippo di Savoia, conte di Ginevra, avesse assistito alla cerimonia, con ottima accoglienza. Desiderava Filippo entrare al servizio imperiale, ed acquistare un'alta posizione, che lo togliesse dall'oscurità in cui viveva. Ritornò, a quanto pare, abbagliato dalle cose vedute ed intese, e nel 1522 riapparve alla corte imperiale. Carlo V nella primavera di quell'anno

---

(1) *in Id.*, Paray, 27 luglio (1524).

(2) *Id.* " Memoyre de ce que ce porteur a à dire a Monseigneur ", senza data.

(3) Gioffredo, *Storia delle Alpi marittime* (in *M. H. P.*, lib. II), col. 1273.

ideava una coalizione contro la Francia, e nella fine di maggio si recava in Inghilterra a visitare Enrico VIII per trattenerlo nell'orbita della sua politica (1). Al fianco dell'imperatore andarono Filippo di Savoia ed un ambasciatore del Duca, il signor di Chateaufort. Filippo ebbe notizia lungo il viaggio di male voci che correvano nelle corti imperiale e inglese sulle intenzioni del fratel suo. Il passo accordato al Lescun era sempre rimproverato al Duca. Non fu dunque inutile la presenza sua, che servì a togliere i sospetti già concepiti (2). Voleva però il Duca che l'assenza del fratello non si prolungasse. Il conte invece preferì restare coll'imperatore (3), sicchè ancora nel luglio di quell'anno era in Inghilterra, e chiedeva sovvenzioni in danaro, finchè avesse ottenuto da Carlo V qualche alta carica (4). Egli seguì l'imperatore in Ispagna, dove lo ritroviamo ai primi del 1523 (5), finchè con tenacia di proposito finì per

---

(1) Mignet, I, 345.

(2) *Arch. di Stato di Torino. Lettere principi. Duchi del Genevese e di Nemours*, m. 1°. Filippo al Duca, 28 giugno (1522). " Devant estre arrivé out estoyt lempereur et le Roy dangleterre ay esté adverty daucungs Rappors fait adit empereur et au Roy dangleterre quj estoyent fort à vostre desadvantage. Des quiens rappors le s^{r} de chateaufort ansamble autres occurrans vous escrip bien au long. Mays Je estre arrivé ma on fayt gros souvenir et bon acueil lampereur et le Roy et mesmement la Reine dangleterre, et ay parlé à lampereur, suivant la charge, des propous quil vous pleust me comander ly dire a mon despartyr de vous, de sorte que les choses la mersy dieu se porte (*sic*) bien pour ce tems.

(3) *Id.*, " Monseigneur. Il vous pleust moy comander a mon departyr que me deusse retourner. Sur quoy vous supplie bien considerer les afferes qua meintenant lempereur, mesmement ausy voiant la deffiance dernierement faite du Roy dangleterre et du Roy de France, pour quoy ne mest possible a mon honneur man aller, non obstance que la Rien de monde que plus Journellement desire sest vous lemplere et obeyr, don suys serten auries mon honneur quest le vostre. Don vostre bon plessir sera me pardonner sy Je ne man ves ".

(4) *Id.*, Filippo al Duca. 7 luglio (1522). Da un porto d'Inghilterra. Ha bisogno di danaro, " jusques lempereur aye le moyen de moy fere quelque bien, ce en quoy Il est en voulenté, comme il ma dit plussieurs foys, et Je le desire, mons^{r} ... ". — *Id.*, Alla Duchessa, 7 luglio (1522). Dal porto suddetto dell'Inghilterra. Dice di voler seguire Carlo V in Spagna e siccome " monseigneur en pourroit marrier " (*sic*) prega la Duchessa di " faire mon excuse envers luy ".

(5) *Id.*, Filippo al Duca. Valladolid, 12 gennaio 1523

ottenere il desiderato compenso (1). Era Carlo V sdegnatissimo contro il marchese Michele Antonio di Saluzzo, che, guidato del tutto dalla madre Margherita di Foix, si mostrava schiettamente francese d'animo e d'intendimenti. Michele Antonio aveva combattuto sempre contro gl'imperiali, rendendosi, come vassallo dell'impero, colpevole di fellonia. Nel 1522, quando il Lautrec fu debellato alla Bicocca, e Prospero Colonna ebbe in mano sua la Lombardia, un corpo di Spagnuoli, comandato dal marchese di Pescara, entrò nel marchesato, prese e saccheggiò Carmagnola, e mise l'assedio a Saluzzo, che costrinse alla resa il 17 luglio. La marchesa, Margherita di Foix, venne allora a patti, e giurò omaggio e fedeltà all'imperatore, riconoscendone l'autorità sul marchesato. Essa promise di ottenere la ratifica del figlio (2), che infatti l'accordò poco dopo (3), ma perseverò ciò nonostante nella fede regia. E forse per tenerlo in soggezione i comandanti imperiali gli occuparono Carmagnola il 2 marzo con 3000 Spagnuoli, che vissero in quella terra a discrezione per ben sei mesi, salvo breve intervallo, fino all'agosto, quando il Bonnivet comparve nella penisola. Allora il marchese, più che mai avverso agli imperiali, prese il comando dell'avanguardia francese (4). Passò un anno, ed a Valladolid, nel giugno 1524, Carlo V decise la confisca del marchesato e ne investì Filippo che trovò in quell'occasione potente aiuto in Luigi di Gor-

---

(1) Il re di Francia cercò ripetutamente nel 1523 e nel 1524 e pochi mesi prima della catastrofe di Pavia di attirarlo a sè, ma non vi riuscì, v. *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari*, Bonnivet al Duca. Lione, 7 maggio (1523). " Monseigneur, le Roy a entendu comme avez envoyé après monseigneur vostre frère, *lequel ledict s^r desire fort que vous retirez dela ou il est, Vous asseurant que vous lui ferez plus grant plaisir en ce faisant* ... ". — *Id.*, Certosa di Pavia, 3 novembre (1524). " Continuant la servitude que Je vous porte ay pensé ne devoir faire de moing que de vous dire quil seroit temps et saisons, sans plus attendre, que mons^r le comte de Genève, votre frère, se arrestait pour venir au service du Roy, si vous et luy le desirez ".

(2) Della Chiesa Ludovico, *Dell'historia di Piemonte*, Torino, 1608, pag. 227. Muletti, *Memorie storico-diplomatiche ... di Saluzzo*, vol. VI. Saluzzo, Lobetti-Bodoni, 1833, pag. 63-67. Vedi Promis, *Memoriale di Gio. Andrea Saluzzo di Castellar dal 1482 al 1528* in *Miscell. di storia italiana*, vol. VIII (1869), pag. 572-77.

(3) Muletti, VI, 69.

(4) Promis, *Memoriale*, cit., pag. 582-83. Muletti, VI, 70.

revod, signore di Pont-de-Vaux, gran maggiordomo dell'imperatore (1). Il conte di Ginevra, felice, ai primi di luglio fece vela dalla Spagna alla volta di Nizza. Toccò Monaco, quando il conestabile di Bourbon ed il Pescara invadevano la Provenza (2), e giunse in tempo al fianco della duchessa Beatrice per aiutarla nelle sue trattative col vicerè, il Lannoy (3). Non si fermò tuttavia in Piemonte, ma avendo una missione da compiere presso Margherita d'Austria, governatrice dei Paesi Bassi, si recò a Bruxelles. Prima di partire però mandò una schiera di Spagnuoli ad assediare Carmagnola, perduta all'arrivo del

---

(1) *Archivio di Stato di Torino. Duchi del Genevese e di Nemours* cit. Filippo alla Duchessa. Valladolid, 18 giugno (1524). " Madame, J a pleu à lempereur confisqué le marquisat de Saluces et le me donner et investir comme Jescriptz bien au long a mons^r^, luy suppliant volloier envoyer pour prendre la possession ceulx quil luy plaira du nombre des s^rs^ procureurs que Jay esleu pour ce fere ". — *Id., Vienna, Lettere ministri*, mazzo 1°. Gorrevod al Duca. Valladolid, 13 giugno (1521). " Je me suis empliée (*sic*) envers la Mayesté de lempereur de sorte quil a fait don et present a mons^r^ le Conte vostre frere du marquisat de Saluces et lui en ce fait despeché le prendre (?) en bonne forme. Et aussi len a receu en homaige et a esté le tout passé bien honorablement ". — Mercurino di Gattinara in una sua importante istruzione senza data nomina presente alla corte Cesarea " lo illustre conte de Geneva e marchese di Salucio ". Queste parole ci dimostrano che l'istruzione deve essere del giugno 1524. Il documento è pubblicato dal Claretta: *Notizie per servire alla vita del gran cancelliere di Carlo V Mercurino di Gattinara* (estr. dalle *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, serie 2ª, XLVII). Torino, Clausen, 1897, pag. 65.

(2) Sanuto, XXXVI, 518. Vedi su questi fatti i documenti editi dal Saige, *Documents historiques relatifs à la Principauté de Monaco depuis le XV siècle*, vol. 2°. Monaco, 1890, pag. 200 e segg. — Si attendeva il conte a Nizza con grande ansia, poichè una flottiglia francese correva quelle acque, e proprio in quei giorni catturava Filiberto di Châlons, principe d'Orange, in un brigantino, sulle coste provenzali. V. *Arch. di Stato di Torino, Lettere particolari.* Alessandro du Fresnoy, signore di Chuez, capitano del castello di Nizza, al Duca. Castel di Nizza, 4 luglio (1524). " Aujourdhuy au mattin les gallères de France ont descouvert ung brigantin et une fuste. Sortirent huyt gallères dessus, lesquelles les sont aller battre et les ont contraingt damener, sus les queulx brigantin et fuste estoyt mons^r^ le prence dorenge, lequel est prysonnyer. Jay envoyez vostre mareschal des logis scavoir des nouvelles de mons^r^ vostre frère, lequel se dist estre encore derrier. Dieu luy doint meillieur fortune ". — V. sul caso dell'Orange: Serassi, *Lettere cit. del Castiglione*, I, 132. Roma, 17 luglio 1524.

(3) V. pag. 27.

Bonnivet, e se ne rese padrone. Giacomo Fozaro di Scalenghe fece giurare agli abitanti fedeltà pel nuovo marchese di Saluzzo (1). Pareva che la sconfitta e ritirata del Bonnivet dovessero render facile la conquista di tutto il marchesato, ma l'andata di Filippo stesso nei Paesi Bassi, la lontananza del Bourbon e del Pescara, che combattevano in Provenza, e più di tutto l'arrivo del Bonnivet nel marchesato ai primi di ottobre, sconcertarono il piano del conte. D'altro canto il marchese di Saluzzo ne approfittava, irrompeva nelle terre ducali, occupava Cuneo e Fossano, e cingeva Carmagnola d'assedio (2). Era questa terra difesa da Giovanni Vagnone di Troffarello. Gli abitanti aprirono le porte: il castello s'arrese alle prime intimazioni, ed il castellano, il Vagnone, lasciò la vita sul patibolo. Così dopo due soli mesi Carmagnola ritornò sotto il dominio dell'antico signore (3).

Ad attendere il Bonnivet erano stati mandati da Torino il signor di Confignon ed alcuni altri gentiluomini della corte in Avigliana. Speravano i messi di trovare il Bonnivet ben disposto verso il loro signore, ed ebbero in ciò l'aiuto di Carlo Solaro, signore di Moretta, suddito piemontese, ma al servizio di Francia. Il Bonnivet promise di recarsi a Torino per ossequiare il Duca (4), tornato celermente di Savoia, come vedemmo. Carlo aveva provveduto viveri lungo le strade percorse

(1) Promis, op. cit., pag. 589. " L'anno sopradito per haver dato lo imperatore lo marchesato al conte de Genieva, fradelo de lo duca de Savoa, per via de li espagnoli mandò asediare lo castelo de Carmagnola.... et siresse a bage salve ... „. Sanuto, XXXVI, 538. Lettere da Ferrara, 16 agosto 1524: " ... et come era stà a parlamento col conte di Zenevre, fradello del ducha di Savoia,... et che l'era partido con 12 zentilhomini vestiti a una livrea con li penachi a una banda per andar a tuor il possesso del marchesato di Saluzo che l'Imperador li ha dato, e altri castelli e terre dil Bastardo di Savoia „.

(2) *Archivio di Stato di Torino. Lettere particolari.* Confignon al Duca. Avigliana 2 ottobre (1525). " Un gentilhomme de mons^r^ le marquis de Sallusses estoyt desjà audevant de mons^r^ lamiral le pressant fort daller a Carmagnolle ... „. Dice che il marchese non avrebbe tardato molto a recarsi sotto Carmagnola.

(3) Promis, pag. 591. Ottobre 1524: " ... Il conte de Gieneva non tenite Carmagnola soa doi messi et dito conte si è fradelo de lo duca de Savoa „.

(4) *Archivio di Stato di Torino*, loc. cit. Confignon al Duca. Avigliana, 2 ottobre (1524).

dall'esercito francese per evitare gli abusi e le licenze delle soldatesche (1), e dati ordini per gli alloggi (2). A Torino pure fece raccogliere numerose provvigioni, ma emise anche un bando nel Piemonte, con avvertimento ai cittadini tutti di tener pronte le armi al primo ordine (3). Nella metà d'ottobre il re entrò in Torino, e prese alloggio nel castello, mentre il Duca si ritirava in una casa privata (4). Passò quindi Francesco celermente il Ticino ad Abbiategrasso, ed il 26 ottobre occupò Milano, sgombrata poche ore prima dal duca Francesco II e dagli imperiali, che, stremati dalla precipitosa ritirata di Provenza, non avevano potuto opporre resistenza alcuna. Solo a Pavia si concentrarono 5000 fanti e 300 uomini d'arme sotto il comando d'uno dei più illustri capitani di quell'età, D. Antonio de Leva. Altri sotto il Lannoy riparavano a Soncino, e pochi col Pescara a Lodi (5). Ed a Pavia si diresse il re dopo occupata Milano.

Il Duca vedeva con preoccupazione l'avvenire. Convinto che il suo interesse fosse di mantenere in pace i due monarchi, volle ancora una volta interporre fra i rivali la sua opera. Egli aveva cercato di trarre il massimo profitto dalla guerra con ambidue i temuti vicini: segreto accordo, come vedemmo, lo univa al re, segrete mene pure intratteneva presso l'imperatore al quale aveva chiesto, ma invano, Savona, allora possesso francese (6), Prevedendo forse quello che poi avvenne, cercò ora sinceramente di accordare i due monarchi. Durante il mese di ottobre 1524 Chiaberto di Piossasco dei signori di Scalenghe, Gio. Luigi di Cavalleone, Luigi di Donneval ed altri

(1) Champollion-Figeac, *Captivité du roi François Ier*, Paris, Imprimerie Royale, 1847 (in *Collection de doc. in. pour l'hist. de France*), pag. 28-29. Il re al Bonnivet. Briançon, 14 ottobre 1524.

(2) Sanuto, XXXVII, 48.

(3) Sanuto, XXXVII, 60.

(4) Sanuto, XXXVII, 63, 66.

(5) De Leva, II, 217-26. Decrue, pag. 48-49.

(6) V. *Arch. di Stato di Torino. Vienna. Lettere ministri.* Valladolid, 13 giugno (1524). Lorenzo di Gorrevod al Duca. " Jay parler touchant Savonne, mais lon ma Respondu quil nestoit à ceste heure temps den parler pour aucune Raisons, que ne vous puis escripre, dont il me desplait. Car vous navez subiect ny serviteur quil plus desire laccroissement de vostre estat, ce que Je faiz. Mais pour ceste heure en lafferre dudict savonne ne se apoit (?) fere aultre chose ".

furono mandati ai campi francesi ed imperiale (1). Anche il Pontefice, Clemente VII, pur cercando vantaggi per sè, coadiuvò il Duca nella sua opera di pace adoperandovi Girolamo Aleandro, arcivescovo di Brindisi, e nunzio presso il re, ed il suo legato nella Lombardia Cispadana, il cardinale Giovanni Salviati (2). Mentre fervevano i negoziati il conte di Ginevra di ritorno dalle Fiandre, giungeva ad Innsbruck il 26 gennaio del nuovo anno 1525 (3), ed il 15 febbraio entrava nel campo imperiale (4). La sua venuta forse aggravò le cose. Filippo aveva bisogno che la guerra continuasse per conquistare il marchesato di Saluzzo: la sua presenza accanto al Lannoy ed al Bourbon, già desiderosi di venire alle mani coi Francesi, rendeva difficili i negoziati. Il Duca, sebbene poco fiducioso sull'esito (5), mandò nel febbraio al re ed al Lannoy il presidente della sua camera dei conti, Pietro Lambert, con vari gentiluomini, tra cui il signor di Confignon, tentando un ultimo passo conciliativo (6). Il re pareva in quei giorni animato da buone intenzioni. Già nelle trattative dell'estate di quell'anno aveva accordato allo zio una pensione annua, non appena fosse conquistata la Lombardia. E Carlo quando le genti francesi entrarono in Milano, aveva mandato il Lambert a rammentare la promessa (7). Il Bonnivet assicurò che la parola data sarebbe stata mantenuta (8), ed infatti l'11 novembre 1524 nell'abbazia

---

(1) *Archivio Camerale di Torino. Conti dei tesorieri generali di Savoia*, reg. n. 184, fol. 1967-197. Torino, 21 novembre 1524, fol. 207 *r*. Torino, 10 e 27 ottobre 1524.

(2) Virgili, *Otto giorni avanti alla battaglia di Pavia, 16-24 febbraio 1525* in *Archivio storico italiano*, serie V, tomo 4° (1889), pag. 174-89.

(3) Sanuto, XXXVII, 539-38.

(4) Id., col. 626.

(5) Desjardins, II, 818. Il Duca al legato pontificio. Torino, 27 gennaio 1525.

(6) Lambert, col. 852-53. Guichenon, II, 203.

(7) *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari*. Bonnivet al Duca. Certosa di Pavia, 25 ottobre (1524). " Le Roy a esté tresaisé dentendre de voz nouvelles par le president Lambert, et vous puis asseurer et dire quil na parent à qui il porte plus damystié. De vostre affaire il est tenu pour fait. Et si le seau quon a envoyé querir estoit icy, croiez, monseigneur, que cela fust despeché. Mais il ne peult tarder, comme il vous plaira voir par ce que ledict president vous escript ".

(8) *Id.*, Milano. 7 novembre (1524). " Au regard des dix mil escus de

di S. Lanfranco presso Pavia il re concesse allo zio una pensione di 12.000 lire annue, ed il comando di 20 uomini d'arme e 40 arcieri delle sue ordinanze, con facoltà di servirsene dove e come gli paresse; inoltre dichiarò non avere nella donazione altro movente che la stretta parentela e la riconoscenza che sentiva verso lo zio per l'aiuto datogli nella conquista di Milano (1). La nuova ambasciata del Lambert fu quindi ricevuta da Francesco con notevole favore. L'inverno faceva sentire il suo peso sull'esercito francese assediante e l'abilità del De Leva lasciava dubitare che Pavia avrebbe resistito ancora a lungo. Il Lambert conferì pure col Lannoy e col Bourbon, che alla testa dell'esercito riposato e forte s'accostavano a Pavia, ed ebbe da costoro le ultime condizioni che portò al re. Francesco parve disposto ad accettarle; ma avendole sottoposte in seguito ai suoi consiglieri, pochi minuti dopo ritornava sulle parole già dette, respingeva le condizioni del vicerè e rinviava il Lambert senza conclusione (2). Fu un passo molto imprudente, del quale egli si pentì in seguito amaramente. Era il suo esercito assottigliato dalle scaramuccie (3), dall'invio di alcune migliaia d'uomini sotto Giovanni Stuart, duca d'Albania, alla volta di Napoli, ed anche da alcune parziali sconfitte avute da corpi separati. Il 25 febbraio il Lannoy e gli altri condottieri di Spagna, il Bourbon, il Pescara, l'Alarcon ed il marchese del Vasto, vennero alle mani coll'esercito francese, e lo annientarono. Il re stesso dovette arrendersi prigioniero al Lannoy. Partecipò alla battaglia con molto valore il conte di Ginevra, combattendo nelle file imperiali (4), mentre il fratello bastardo,

---

rente qui vous ont esté promis sur lestat et duché de Milan, reposez vous hardiement sur moy, mons^r, quil ny aura point de faulte que vous nen soyez assigné, Incontinent que ledict estat sera reduict soulz lobeissance dudict „.

(1) Guichenon, loc. cit. *Archivio di Stato di Torino. Negoziazioni con Francia*, mazzo 1° (1301-1559), n. 28.

(2) Lambert, col. 852.

(3) Ai primi di gennaio per lettera del Bonnivet il re chiedeva al Duca artiglieria. *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari.* Bonnivet al Duca. Dal campo innanzi Pavia, 5 gennaio (1525).

(4) Lanz, *Correspondenz des Kaisers Karl V*, vol. 1°, Leipzig, Brockhaus, 1844, pag. 151, n. 62. Carlo di Lannoy all'imperatore. Pavia, 25 febbraio, 1525. " Mons^r le comte de Jeneve a eu son cheval tué dun coup dartillerie, mais sa personne na point eu de mal „.

Renato di Savoia, periva a fianco del re (1). Il disastro fu grandissimo per la Francia, che naturalmente perdette subito Milano e gli altri acquisti fatti in Lombardia (2).

4. — La condotta del Duca dopo tale catastrofe fu di buon politico e d'uomo di cuore. Egli soccorse i francesi fuggiaschi e privi del necessario. Un signor di Bertaigne, uomo d'arme del signor de la Tremouille, spogliato d'ogni cosa nella battaglia, ebbe il danaro necessario per tornare in patria (3). Un altro ebbe due scudi d'elemosina (4). Inoltre il Duca mandò più volte a consolare il re prigioniero ed assicurarlo del suo vivo interesse, e spedì il Lambert ad annunziare la cosa ed offrire i suoi servizi alla madre del re, Luisa di Savoia, sua sorella, che già teneva la reggenza dello stato (5). Le sciagure del momento avevano abbattuto l'animo di Luisa, che era stata spesso così avversa al fratel suo. Essa disse al Lambert: " quil ne failloit point que ... son frere heust regard aux chauses passees „ esprimendo il desiderio d'abboccarsi con lui e concertare i mezzi per ottenere la liberazione del figlio suo. Ma nel tempo stesso, pur non sembrando il momento opportuno, volle aggiungere una stilla d'amaro alle dolci parole. Tre giorni dopo la battaglia era giunto a Torino a nome del Bourbon un gentiluomo, che pregava il Duca di comunicare tosto per lettera al re d'Inghilterra ed a Margherita d'Austria, governatrice dei Paesi Bassi, la vittoria. Non parve al Duca nè ragionevole, nè opportuno respingere la domanda, tanto più vedendo alle porte dello stato l'esercito vittorioso e non animato verso di lui dai migliori sentimenti. Troppo grande era già il malcontento del Lannoy per gli aiuti di vi-

(1) De Panisse-Passis, pag. 40.

(2) Vedi su questi fatti il cap. 4° del libro XV del Guicciardini, *Storia d'Italia*. De Leva, II, 231-43. Decrue, pag. 52-53. Virgili, *Dopo la battaglia di Pavia, marzo-giugno 1525* in *Arch. storico italiano*, serie 5ª, vol. VI (1890), pag. 247-66.

(3) *Archivio Camerale di Torino. Conti* cit., reg. cit. Torino, 11 aprile 1525. Quattro scudi sono " baillé à ung hommes darmes de mons[r] de lentremoille appellé mons[r] de bertaigne, à qui mondict seigneur luy a donner pour sen aller a son pays, *le quel avoit esté detroussé en revenant du camp* „.

(4) *Archivio Camerale di Torino, ecc.*, fol. 59. Ordine dato a Torino, 18 marzo 1525.

(5) Sanuto, XXXVIII, 108. Il 28 febbraio giunse a Lione la notizia della catastrofe.

veri e munizioni dati all'esercito francese, perchè ancora lo si inasprisse con un rifiuto (1). Il Duca scrisse adunque le lettere richieste, e non potè evitare in esse alcune espressioni di gaudio per la vittoria (2). Queste comunicate a Luisa ne ferirono la suscettibilità, ed anche in quei momenti in cui il soccorso del Duca doveva esserle preziosissimo, essa ne volle fare cenno, in tono di rimprovero, all'ambasciatore sabaudo residente presso di lei, Gio. Giacomo di Bernezzo, signore di Rossana. Il Duca non mancò di rispondere dignitosamente alle osservazioni della reggente: non parergli il caso di rilevare alcune sue parole, scritte per necessità ineluttabile, quand'egli aveva aiutato ed ora ricettava i soldati francesi scampati alla battaglia (3). Il frutto dei suoi servizi al re avergli procurato il pericolo in cui si trovava d'imminente invasione nei suoi stati, trattenuta solo dal conte di Ginevra, che fraternamente s'adoperava a suo vantaggio cogli imperiali. Ancora egli ignorava, se non dovrebbe in avvenire sborsare grosse somme di danaro per riscattare i suoi paesi dalle invasioni e dai saccheggi (4). E mandava pure al maestro della camera dei conti Barroys l'incarico di esporre intieramente l'opera sua alla reggente in favore dell'esercito francese e le angustie da cui in conseguenza era afflitto (5). Se Luisa sia rimasta contenta delle dichiarazioni franche e dignitose del Duca, ignoro. Certo è che mostrò d'appagarsene, e non ebbe più cogli ambasciatori ducali in quei giorni che parole di riconoscenza verso il fratel suo. Il quale, dimenticando ogni cosa, non appena conobbe il desiderio della sorella di abboccarsi con lui a Lione, fece grandi apparecchi e partì da Torino

(1) *Arch. di Stato di Torino. Lettere Principi, Duchi di Savoia*, mazzo 5°. Carlo allo scudiere Bernezzo. Torino, 19 marzo (1525).

(2) *Id.*, lett. cit.

(3) *Id.* "... trouvant estrange toutesfoys *ce que lon fais plus de cas dun double de lettre* que des grans troubles et dangier ou nous sumes pour avoir faict les services que scavez assez ... ".

(4) *Id. Memoriale* cit. al Bernezzo. Il Bernezzo era stato mandato ambasciatore residente in Francia nel febbraio 1525. Vedi *Archivio Camerale di Torino, Conti* cit., reg. cit., fol. 216. Ordine del Duca (Torino, 11 febbraio 1525) di pagare 120 scudi al Bernezzo " le quel envoyons pardevers Madame ma seur pour y resider ".

(5) *Id.* Il Duca al maestro Barroys. Torino, 19 marzo (1525).

il 23 giugno (1) con seguito di 100 gentiluomini, di 700 cavalli e 5 prelati di molta importanza, cioè Pietro de la Baume, vescovo di Ginevra, Gio. Filippo di Grolée, arcivescovo di Tarantasia, Luigi di Gorrevod, vescovo di S. Jean di Moriana, Claudio d'Estavaye, vescovo di Belley e l'abate dell' Abbondanza, che apparteneva ai signori di Masino (2). Egli ebbe da Luisa accoglienza regale, e la contraccambiò dichiarandosi pronto ad andare personalmente in Ispagna per chiedere la liberazione del re (3). Il Pontefice, Clemente VII, con un breve lo esortò a perseverare nel proposito (4). Ma quando l'imperatore conobbe l'intenzione del Duca, pur affermando di gradire la sua venuta, osservò parergli troppo grande la distanza ed i calori perchè s'avesse egli ad esporre ad un viaggio inutile. Già Margherita d'Augoulême, duchessa d'Alençon e sorella del re prigioniero, aveva chiesto ed ottenuto un salvacondotto per tale viaggio con uguali intendimenti. Riserbasse adunque il Duca la sua opera ed i suoi mezzi pel giorno in cui esso imperatore andrebbe in Italia a prendere la corona imperiale (5). Il Duca, raffreddato dalla risposta di Carlo V, vedendo pure che Luisa non insisteva più circa il viaggio, decise di rinunziarvi. E fece

---

(1) Sanuto, XXXIX, 178. Lettera da Torino, 27 giugno: " ... el ducha di Savoia cavalcò alli 23 del presente ... ".

(2) *Id.*, col. 132. Da Milano, 29 giugno 1525. Lettera dell'ambasciatore Veneto presso il Duca di Milano, Marco Antonio Venier.

(3) Lambert, col. 854. *Archivio di Stato di Torino*, loc. cit. Il Duca a Francesco Richardon, signore di Chambuel, ambasciatore a Roma (senza data), " Plus que Je suis venu Jcy ou Madame ma seur accompaignée de tous ces Princes de ce royaulme ma faict de lhonneur et bonne chiere ce quil est possible, aggreant merveilleusement ledict voyage ".

(4) *Archivio di Stato di Torino*. Lett. cit. del Duca. " Vous dires a nostre sainct père pour response du brefs quil luy a pleu mescripre, trouvant bonne mon allee en Ispaigne sur ce trecté de paix entre ces deux grans maistre (*sic*), que la bonne voulenté procede de mon cousté pour le debvoir que Jay à tous deux, aussi pour le desir que Jay de veoir la pouvre chrestienneté en meilleur tranquillité quelle nest et particulièrement nos subgectz hors des foulles et ennuys quilz supportent ".

(5) *Id.*, Memoriale all'arcivescovo d'Atene, ambasciatore del Duca a Roma. Chambéry, 6 agosto 1525. " ... pour le soulleger et conserver Jusques au voyage de son couronnement auquel Il entend que mondict seigneur le doibve accompagner ".

bene, chè in quei giorni il suo stato veniva messo a ruba dalle genti imperiali, e richiedeva la sua presenza (1).

Infatti durante e prima della residenza ducale oltr' Alpe gravi fatti si erano succeduti in Piemonte. I duci imperiali fin dal marzo avevano chiesto di alloggiare nelle terre piemontesi buona parte del loro esercito, ed il conte di Ginevra che stava loro ai fianchi, durava gran fatica a trattenerli. Il Lannoy voleva 50.000 scudi di indennità promettendo di non entrare in Piemonte (2). Ma la spesa era troppo grave, non ostante avesse il Duca messo un'imposta ai sudditi (3). Le discussioni continuarono, ed il vicerè intanto, non sapendo come nutrire le sue genti, senz' altro ne alloggiò buon numero nel Vercellese (4). Cercò Filippo di condurlo a più miti pretese, ma solo dopo molti stenti riuscì a pattuire con lui lo sborso di 30.000 scudi, di cui due terzi in contanti subito, ed il resto dieci giorni dopo che le truppe imperiali avessero sgombrato il Piemonte. Aveva il conte di Ginevra con sè 14.000 scudi, portatigli dal tesoriere della Duchessa, Antonio Rubat, ed alcune gioie di molto valore. Duemila furono tosto dati al conestabile di Bourbon (5),

---

(1) *Archivio di Stato di Torino.* Lett. cit. al Chambuel. Il Duca dice già in questa d'aver differito il viaggio "... lequel Je nay point rompu, mais bien ma semblé le differer voyant les extremes malleurs quil faict „. Sul viaggio del Duca in Ispagna si discorreva variamente, vedi Sanuto, XXXIX, 178, 292, 297.

(2) *Archivio di Stato di Torino. Lettere principi, Duchi del Genevese e di Nemours*, m. 1°. Filippo al Duca. Milano, 13 marzo (1525). Nessuno sfugge alle contribuzioni, non la Repubblica di Venezia, non il pontefice. " Don, Monseigneur, Je ne voye moyen que vous dit pays en puisse eschapes (*sic*). Et demande la somme de cinquante mille escus, Que Jay trouver (*sic*) fort deraisonable et lay desbatue en conseil devant eulx de mon pouvoir, leur faisant toutes remonstrances que hues ... „.

(3) Sanuto, XXXVIII, 110.

(4) *Id.*, col. 112. — L'invasione degli imperiali era preveduta e temuta da Filippo, che scriveva da Vercelli, il 21 marzo (1525) al Duca (*Archivio di Stato di Torino*, loc. cit.). " Si Je vous presse de fere avancer lesdicts commissaires nen soyes point esbahy, mais que les face dilligences, Je vous en supplie. *Car sil y a faulte et ne les lougeys, soy prennent sans eulx, mieulx vauldroit avoir Jouer cinquante mil escus* „.

(5) *Archivio di Stato di Torino*, loc. cit. Filippo di Savoia al Duca. Milano, 13 aprile (1525). " Mais voyant quil ny avoit nul ordre Jay fait envers eulx quilz soy contentent resoluement a trente mil escus pour

e tanto fecero il conte ed il Rubat che il 18 aprile ben 22.000 scudi erano stati sborsati. Attendeva con ansia Filippo l'invio

---

une foys, Mais que les vingt mil soyent contens. Et pource que la somme que Jay Icy nest que du douze mil et que Je doubte qui leur delivrera les bagues pour fère le payement des dicts vingt mil quilz ne les facent battre pour sen aider, qui me desplairoit pour la tres-grant perte que vous seroit, Je vous supplie vouloir avoir de ladvys et fere dilligenter le plus que pourrez à les envoyer. Car la chose le requiert ainsi que pouvez panser...: Je leur ay accordé dix Jours appres Icelluy deslougement les dix mil escuz de Reste pour lentier payement des trente mil, pourveu que par lettre Ilz attesteront comme a esté accordé les avoir receu pour le service de lempereur, ainsi que plus amplement le vous feray en brefs savoir. Les corps de françois mons^r de lorreyne et mons^r de Sainct Pol malade sont encoures comme Je sceu a Pavye „.

Vedi pure l'interessante lettera del Rubat. *Archivio di Stato di Torino. Lettere particolari.* Rubat al Duca. Milano, 13 aprile (1525). " Appres avoir beaucoup desbattu, mons^r votre frère avecques mess^rs de Bourbon et le vyce Roy *Jusques à entrer en colère avecques eulx*, dont Il est requys dez meintenant en desbourser vingt mil et dans dix Jours appres que les gens de guerres auront vuyder voz pays les aultres dix mils, Monseigneur, Desdicts vingt mille escuz Je nen ayz que douze mille encoures quelque peu moyens. Car Jen ay desyà desboursé deux mille à mons^r de bourbon par le commandement de mondict seig^r vostre frère et de mons^r de Chasteaufort. Des bagues quj les leur donnera Ilz desliberent les fère fondre, Que serait grosse perte comme savez. Et crains que mondict s^r votre frère nait assez affere ny obvyera et quoy il vous plairra advoir advys et mander le complement dela dicte somme, aultrement Je ne voys moyen pour deslouger lesdicts gens de vos pays, Quelque peine quil en prene, car Je vous asseheure quil est prèsque continuellement appres et des le mattin Jusques à la mynuit et noblie Rien a dire et remontrer esdicts s^rs de ce qui est Requis... Monseigneur, les dicts s^rs demandoyent quarante mille escuz, et nen vouloyent Rien rabbatre. Lon avoit donné entendant audict s^r vyce Roy que vous les avyes deszà Receu de voz subgectz et beaucoup daventaige et diroit pour quoy vous ne les avyez envoyes, et que vous en vaulyez fère avecques beaucoup daultres propos quil tenist à mons^r de Chateaufort qui estoit demeuré avecques la fièvre qui le prinst au sortie de Verceil et dont il nest encoures quitté. Il le remonstrat entre ceste ville et byegras (*Abbiategrasso*) allans à lencontre de sa seur „ (*in un foglietto*). " Mons^r, depuis la lettre escript Jay deslivré la plus grant part de largent et sera grosse perte sur les monnoyes, car Ilz les prenent pour beaucoup moins quelle ne courent en voz pays. Sur les escus de Savoye Il ya plus de cinq solz de perte pour pièce, deux et demy ceulx sus de Roy et sept... sus ceulx alaigle et sus vos testons deux solz „. — Oltre al conte di Ginevra ed al Rubat tutelavano gli interessi ducali a Milano Chiaberto Piossasco di Scalenghe, Luigi di Châtillon, s^r di Musinens, ed altri. Vedi *Archivio Camerale di Torino, Conti* cit., fol. 214, 216, 220.

degli altri 8.000 che mancavano, non volendo consegnare le gioie che i ministri imperiali avrebbero tosto fuso per trarne danaro (1). Nell'attesa egli decise di recarsi col vicerè a Pizzeghettone a visitare il re prigioniero, forse per tentare qualche apertura di pace. I Veneziani infatti negavano qualunque pagamento di danaro, ed il Lannoy non sentiva sicuro il Milanese finchè non avesse esplorate le intenzioni della possente Repubblica e del Pontefice. Il Rubat con occhio diffidente seguiva le mosse del Lannoy e le comunicava al Duca (2). Il 19 aprile giunse il signor di Chambuel con 8.000 scudi, resto della somma da sborsare. Ma qui colla solita mala fede il Lannoy si rifiutò di comprendere i 2.000 scudi dati al Bourbon nei trentamila pattuiti, sicchè il Rubat dovette scrivere di nuovo alla corte per averne altri 2.000 (3). Non dubito che il Duca si sarà

(1) *Archivio di Stato di Torino*, loc. cit. Rubat al Duca. Milano, 18 aprile (1525): " ...quelque chose que mons[r] vostre frère ait peu fere ny a moyen Rien pouvoir Rabbatre de la somme de trente mille escus, dont Journellement Il est pressé, Des huyt mille qui restent a payer. Et si dans troys Jours au plustard vous ne les envoyes, Il sera contrainct fere fondre les bagues. Aultrement Je ne voys moyen que les gens qui sont sus voz pays en deslougent... Mondict seig[r] vostre frère y prent merveilleusement grosse peine et ne tient à presser ces mess[rs] et leur en fère les remonstrances necessaires ".

(2) *Id*., lett. cit. " Avant larrivee de mons. de Beau Reins (*probabilmente il conte di Buren*) mons[r] le vyce Roy desliberoit sen partir deux o troys Jours appres pasques pour aller à Napples, mais depuis à esté faict quelque arrest entre eulx quil demeurera encoures quelques Jours. Aujourdhuy ou demain Il doibvent tous aller de compaignie à pizqueton trouver le Roy et mons[r] vostre frère avecques eulx et croys quil y aura quelque ouverture de paix, Comme Jespere. Mondict s[r] vostre frère vous advertira plus aulong. La ligue nest encoure clouse, Car les venitiens ne veullent donner point dargent. A ce que Jen ay peu entendre Ilz sont contentz entrer en loffensive et deffensive. A scavoir en loffensive pour cinq moys et en la deffensive à la vie de lempereur et ung an appres. Ils vont tousiours dislayant le pape saccorde à toute. Les lansquenety qui sont en Pavye continuent en leur combination et desmandent argent, dont mesdicts s[rs] sont fort marrys, *et est à craindre qui ne soit quelque Jeu joué* ".

(3) *Id*., Rubat al Duca. Milano, 19 aprile (1525) " ... Quant aux deux mille escuz de mons[r] de bourbon Ilz ne vueillent ny entendre les comprendre en ceste somme de vingt mille escuz, par quoy sera requis encoures en envoyer deux mille. Mons[r] vostre frère a esté ung peu marry de quelques propos que luy avez escript disant qui luy sembloit que ne

arreso alla dura necessità, ma le sue condizioni non migliorarono. Lungi dall'essere sgombrato, il Piemonte gemeva pur sempre sotto le imposizioni e gli alloggi delle milizie imperiali (1). Sicchè nel giugno si riaprirono trattative fra Beatrice e Fernando Marino, abate di Najera, commissario dell'esercito spagnuolo (2). Il signor di Chateaufort si recò a Milano per sottoporre al marchese di Pescara, che teneva il comando delle truppe al posto del Lannoy, partito col re verso la Spagna, i capitoli del trattato, e li vide respinti. Il marchese pretese altri 30.000 scudi. Il consiglio ducale, interpellato dal conte di Ginevra, fu d'opinione che dal pagamento di quella somma non sarebbe venuta diminuzione alle sofferenze del paese, poichè, anche ammesso che i duci imperiali avessero mantenuto la parola data, e ritirato le genti, dopo quindici giorni, consumato il sussidio, avrebbero riversato nuovamente le soldatesche sul misero Piemonte. Meglio adunque rassegnarsi al triste fato, ed affidarsi all'onestà (?!) degli invasori (3). Tale deliberazione non pare nè seria nè giudiziosa. Il

---

vous confiez de luy. Je vous asseheure quil a prins et prent une grosse peine pour ce affère comme desjà vous ay escript, et ne tient à luy que les choses ne voysent ainsi que desirez. Et croy, monseig[r] à la fin que vous trouverez le tout estre pour vostre prouffit. Mons[r] de Chasteaufort et de Chambuet vous en escripvent plus au long, que me gardera vous ennuyer de plus long propos „.

(1) Il Sanuto riporta una lettera del 20 marzo da Milano, dove già si parla dei 30.000 scudi sborsati dal Duca. Le lettere del conte di Ginevra e e del Rubat non lasciano dubbi che tale pagamento avvenne nell'aprile. Non escludo però che già nel marzo non sia stata al Duca imposta tale contribuzione; salvo la lettera citata dal Sanuto non ho però finora altra prova. Sanuto, XXXVIII, 118. " Il ducha de Savoia ne ha pagato 30 milia con promissione fattagli di non mandargli altri soldati, nè altra spesa; e subito pagati li dinari, gli hanno pieno quello stato di soldati „.

(2) V. Gayangos, *Calendar of Letters, Despaches and State papers relating to the negociations between England and Spain preserved in the Archives at Simancas and Elsewhere*, vol. 3°, parte 1ª (1525-26). London, 1873, p. 223. L'abate di Najera all'imperatore. Milano, 15 luglio 1525.

(3) *Archivio di Stato di Torino. Duchi del Genevese e di Nemours*, m. 1°. Filippo di Savoia al Duca. Torino, 4 luglio (1525): " ... il ny a nul ordre que les chiefs de ceste armee vueillent observer ny entretenir les chappitres arrestez et concluz dentre madame et labbé de nagere, dont Je suis fort esbahy. Car encoures que tous ceulx qui treuvoye en ce oppinion bonne desiner la somme de trente mil escus pour fère lever ces gens, Lon ne veoit moyen que les subgectz lheussent peu ny voulu fère pour les rai-

Conte di Ginevra tornò a Novara presso il marchese di Pescara (1) ed il 15 luglio s'abboccò con lui e col Bourbon. Ebbe promessa che le terre sarebbero state sgombrate definitivamente dalla fanteria spagnuola, italiana e tedesca mediante un sussidio di 15.000 scudi d'oro del sole, di cui 7500 pagati entro la settimana ed il resto cinque giorni dopo, e dalla gente d'arme mediante lo sborso di altri 12.000 scudi in una volta sola (2). Simili proposte apparivano così gravose, che il conte non ebbe animo d'accettarle senza avvertirne prima la duchessa Beatrice, rimasta a Torino (3), dov'egli fece ritorno (4). Pare che Beatrice abbia ceduto alla necessità, poichè continuamente avvenivano risse e tumulti nelle terre piemontesi fra i soldati e gli abitanti (5). Nella fine di luglio o primi di agosto fu sborsata la

---

sons quil vous plaira veoir par le discours de la lettre du s[r] de Villeneuve. Et despuys a esté trouvé bon audict conseil que ledict trecté soit tombé en Rupture, Disant combien que ladicte somme fust esté desbourser (*sic*) au terme prins audict arrest et contentement deulx et de voy subgects et que ces gens fussent aller louger hors voz pays, que ce ne pourroit estre sinon pour quinze Jours ou troys septmaines au plus (Estant les circonvoisins près que tous Ruynes desfaictz et manges), au bout desquelz quelque argent quilz heussent receu et promesse quilz pourroyent avoir fecte ne pouvant ailleurs vyvre, Ils seroyent contrainctz contravenir à leur trecté et Revenir sur cedict pays au mescontentement et cryerie des subgects et mesfians de ceulx qui sont meslevé au debvoir et toute equité. Pourquoy a esté advisé descripre ausdicts s[rs] pour resolue response, que cougnoissant le debvoir en quoy lon sest mys et quon fait plus quon ne peult quilz loigent là ou bon leur semblera, Leur recommandant vos dicts subgectz et pays, Esperant que ce moyens et leur accordant ce quilz demandent Ilz ne useront de cruaulté „.

(1) *Id.*, Filippo al Duca. Vercelli, 9 luglio (1525) e Torino, 20 luglio (1525).

(2) Ecco le terre in cui erano distribuite le genti d'arme. Avigliana 100 lancie, Rivoli 50, Cavour 50, Cavallermaggiore 50, Pancalieri 25, Virle 25, Racconigi 45, Pinerolo 90, Poirino 30, Riva di Chieri col mandamento 50, Balle (?) 230 e Vercelli 50. V. loc. cit. " Lixte des villes ordonnés pour le lougement de la gendarmerie „.

(3) *Id.*, Filippo alla Duchessa. Vercelli, 16 luglio (1525): " ... Et pource, ma dame, que Je trouve bien estrange de bailler si grosse somme dargent et encoures que ladicte gendarmerie demeure sur ledict pays, Je vous en ay bien voulsu advertir „.

(4) Lett. cit. — Il 20 luglio infatti era a Torino il conte. V. nota 1.

(5) Sanuto, col. 114 e 121. — I tumulti si succedevano in Torino ed in tutto il paese innanzi alle enormità spagnuole. Così ai primi di luglio gli Spagnuoli sgombrando Grugliasco, rubavano 14 paia di buoi. Gli abitanti sdegnati ne mossero lagnanze colla Duchessa, v. *Archivio di Stato di To-*

prima rata stabilita, ma la seconda ancora nella metà d'agosto era reclamata dal marchese del Vasto (1). Questo spiaceva al conte di Ginevra, che allora confidava nel marchese per ottenere finalmente l'ambito possesso di Saluzzo (2).

Sino dai primi di giugno infatti il conte istigava il marchese di Pescara ed il conestabile di Bourbon perchè mandassero genti contro Saluzzo (3). Le insistenze sue riuscirono (4), ed ai primi di luglio Alfonso d'Avalos, marchese del Vasto, entrò con un corpo di Spagnuoli nel marchesato. A Saluzzo era rimasta la marchesa, Margherita di Foix, con valido presidio. Essa pubblicò che avrebbe fatto buon viso ai comandanti imperiali, purchè non invadessero a nome del conte di Ginevra (5). Scarnafigi cadde senza resistenza e Saluzzo venne a patti il 16 luglio. La marchesa dichiarò volersi sottomettere all'autorità imperiale, e chiese tregua per un mese, finchè l'imperatore facesse nota la sua volontà. Nel frattempo lasciava occupare tutte le terre del marchesato, purchè in ognuna rimanesse un gentiluomo a rappresentare il marchese, suo figlio (6). Il conte di Ginevra fu

---

rino. *Minute di lettere del Duca Carlo III*, m. 3°. Torino, 10 luglio 1525. Beatrice ai duci imperiali.

(1) *Archivio di Stato di Torino. Lettere principi, Duchi del Genevese e di Nemours.* Filippo al Duca. Vercelli, 14 agosto (1525). — Forse il ritardo nel pagamento era causato dallo stesso marchese di Pescara, che dopo aver consentito al nuovo trattato, disse avrebbe concentrato le soldatesche che toglieva dalle terre ducali in Carmagnola ed in altre terre sui confini del Piemonte, mentre la Duchessa voleva l'allontanamento totale delle genti V. *Archivio di Stato di Torino. Minute* cit. Beatrice al Bourbon. Torino, 23 luglio 1525.—Ma il Pescara persisteva non ostante le rimostranze di Beatrice (*Id.* Il Pescara alla Duchessa. Milano, 28 luglio 1525). D. Giovanni de Leva, che teneva Carignano, ne approfittava per non isgombrarla (*Id.* Torino, 12 agosto 1525) ed a Santià gli Spagnuoli, lungi dal partire, s'impadronivano persino del grano nei molini ducali (*Id.* Beatrice al Pescara. Torino, 5 agosto 1525).

(2) Lett. cit. del conte da Vercelli, 14 agosto.

(3) Sanuto, XXXIX 5-6, 49.

(4) Sanuto, col. 114.

(5) Sanuto, col. 206. Lettera dell'11 luglio. " ... La signora marchesa di Saluzo dice, che a ciascheduno, che andava per il nome di la Cesarea Maestà alle sue terre, erano sempre le porte aperte, et farà bona ciera; a chi gli anderà in nome dil conte di Ginevra serano serate et tirata l'artellaria ".

(6) Sanuto, col. 226. — Promis, pag. 599-601.

molto irritato di quest'accordo: egli avrebbe voluto ricevere consegna del marchesato, ora che le armi imperiali l'avevano conquistato. Invece dovette attendere il responso di Carlo V (1). Questo giunse, e, pare, a lui favorevole, con ordine nel tempo stesso al Pescara di togliere le genti dal Piemonte e ridurle tutte od il maggior numero possibile dentro al marchesato (2). La cosa fu eseguita in parte, e per due mesi circa il conte fece grida, diede ordini ed amministrò Saluzzo come sovrano (3), ma nell'ottobre di quell'anno, essendo partiti dal marchesato i soldati imperiali, la marchesa rioccupò Saluzzo, prese per forza Carmagnola, e ricuperò in breve tutto lo stato al figlio suo (4). Il conte rimase ferito profondamente dall'abbandono in cui lo

(1) *Archivio di Stato di Torino. Lettere principi, Duchi del Genevese e di Nemours.* Filippo al Duca. Torino, 20 luglio (1525). " Salluces a esté prins par les lansquenetz qui lon fait rendre pieca. Et Jay esté requys par les chiefs qui ont cappitulé avecques la marquise de riens attempter par tout ung moys, Ce a quoy Je nay point voulsu consentir, si non que ce fust pour le service de lempereur et que si Je cougnois que estoit aultrement, que Je le remonstreray en lieu dont les pratiqueurs nauront temps deulx repantir. Sur quoy Ilz mont fait serment que passé ledict moys Ilz me remectront la Jouyssance dudict marquisat et que ce quil en font nest que pour le bien dudict s[r] et myen ". Affermava di più il conte che la marchesa non manteneva i patti, poichè alcune truppe di cavalleria sue avevano all'impensata con qualche schiera di fanti assalito ed ucciso dodici lanzichenecchi presso Saluzzo.

(2) *Id.*, Filippo alla Duchessa. Vercelli, 20 agosto (1525) " Quant a mon affère de Salluces, toutes ces gens sen y vont pour achever de gaigner certaines places qui restent, Et appres men bailler ou à mes commys et deputez la possession et Jouyssance suyvant la toutelle resolution quen a esté Jcy prinse et arrestee. Et ce qui a retardé mon allee devers vous, pour bien au long vous advertir du tout, na esté sinon pour aulcuns afferes de lempereur qui se desmelent Icy, qui sera pour la fin ". V. anche Sanuto, col. 278, 298.

(3) Promis, pag. 601-2: " ... et esendo li lancequenec in Saluce il conte de Gieneva il quale si è fradelo de lo duca de Savoa, mandò piglare posesione de Saluce et fare a fare cride come marchiso, et disia che lo imperatore glie lo avia dato, et pigliava li rediti et tenia lo castelo, ma questo durò poco, non durò doi messi ".

(4) V. Brewer, *Letters and papers* cit., vol. IV, p. 1ª, pag. 665. Mentre il Duca era a Lione, le truppe " are pillaging Piedmont ". *Archivio di Stato di Torino. Registri lettere della Corte 1522-37*, reg. 1525-28, fol. 86. V. anche in genere Cibrario, *Origini e progressi delle istituzioni della monarchia di Savoia sino alla costituzione del regno d'Italia*, vol. 1° (storia). Firenze, Cellini, 1869, pag. 142. Ricotti, I, 172-73.

lasciarono gli imperiali, e ciò l'indusse negli anni che seguono ad accostarsi a Francia e togliersi dal servizio dell'imperatore.

Il ritorno delle genti imperiali nelle terre piemontesi aggravò di nuovo la condizione dei miseri abitanti. Era tempo che si mettesse realmente fine a tante angherie, ed alla corte di Spagna il collaterale Luigi Gorras, signor di Escrivieux, fin dal giugno di quell'anno ne aveva fatto esplicita domanda. Era allora giunto a Toledo il re di Francia prigioniero col vicerè Lannoy, ed il maresciallo di Montmorency aveva trattato con buona speranza i preliminari di un accordo, fissando un armistizio di sei mesi. Appena terminata la missione del Montmorency il Gorras, coadiuvato dal signor di Gorrevod, gran maggiordomo imperiale, ottenne licenza di esporre innanzi al consiglio imperiale gli eccessi e gli abusi dell'esercito di S. M. nelle terre del Duca. Il nostro ambasciatore parlò con grande efficacia, ma a combattere le sue valide affermazioni sorse il Lannoy, che pronunziò una vera diatriba contro i Piemontesi, tacciandoli di mala voglia nel servire gli interessi dell'imperatore. Replicò il Gorras che il Duca li avrebbe certo obbligati a diversa condotta, ma che esso Lannoy stesso doveva far fede che il Duca ed i suoi avevano in ogni modo aiutato gli imperiali. Il vicerè ammise la buona volontà nel Duca, ma persistette nell'accusare molti piemontesi di aver agito contro gli interessi dell'imperatore. Il Gorras ribattè nuovamente le parole del vicerè e fece rilevare la tolleranza mostrata dal Duca davanti alle oppressioni del soldati imperiali. Era alla corte in quei giorni anche un ambasciatore del Duca di Milano, Francesco II, che veniva a prendere l'investitura in nome del suo principe: fu stabilito che questa sarebbe accordata, purchè lo Sforza sborsasse 100.000 ducati per soddisfare i soldi delle truppe. Altri 20.500 si attendevano dai Veneziani. Infine Carlo V, piegando alle giuste ragioni del Gorras (1), stabilì di mandare presso il Duca un amba-

---

(1) Il gran cancelliere, Mercurino Arborio di Gattinara scrisse anzi al Duca chiedendo scusa del ritardo a provvedere e mostrandosi dolentissimo degli eccessi avvenuti in Piemonte. *Arch. di Stato di Torino. Roma. Lettere ministri*, m. 1°. Gattinara al Duca. Toledo, 23 luglio 1525. — Circa le relazioni del Gattinara col Duca v. Claretta: *Notizie per servire alla vita di Mercurino di Gattinara*, cit. e Bornate: *Ricerche intorno alla vita di Mercurino di Gattinara, gran cancelliere di Carlo V.* Novara, Miglio, 1899.

sciatore per informarsi degli eccessi ed abusi dei soldati e farli cessare con un totale sgombro del Piemonte. Il difficile incarico venne affidato a D. Lopez Urtado de Mendoza, personaggio di molta autorità, che però sulle prime voleva declinare il mandato per non mettersi in urto col Lannoy, ma poi accettò, lusingato dalla speranza di bei regali, che il Gorras seppe fargli luccicare. Il Mendoza ricevette lettere pel marchese di Pescara con ordini espliciti circa lo sgombro delle truppe. Raccomandò il Gorras al Duca di accogliere l'ambasciatore nel miglior modo, e di tentare ogni via per renderselo propizio (1).

Era indispensabile che il Mendoza arrivasse colla massima celerità in Piemonte, ma anche qui la sorte non favorì il Duca. L'ambasciatore imperiale giunse attraverso la Francia a Chambéry, dov'era il Duca, in pessimo stato di salute, e là dovette sottoporsi alle cure dei medici (2). Mandò bensì al Pescara la sua commissione per non ritardare l'esecuzione degli ordini imperiali (3), ma fino agli ultimi d'agosto non fu in condizione di attraversare i monti, il che fece in lettiga sofferente ancora della malattia (4). La sua presenza non impedì gli arbitrii dei

(1) *Archivio di Stato di Torino. Vienna. Lettere ministri*, m. 1°. Gorras al Duca (luglio 1525). Et sil ne fust mons^r le grant maistre (*il Gorrevod*), ledict ambassadeur ne y vouloit aller aucunement pour non desplaire a mons^r le Visroy, lequel y a obvyé de son pouvoir. Parquoy estant icelluy ambassadeur homme destat et qui a heu de grands charges pour lempereur sera expedient que estant depardella ll soit tracté si bonnestement de vous et voz subgectz quil aye occasion dexploicter sa charge avecques ce que ledit mons^r le grant maistre luy a promyt que vous et voz subgectz luy feries tel presente quil nauroit pas perdu ces pas, quest la chose par quoy il a accepté ladict charge, avecques ce quil dit que passant une foys par Chambery vous et madame luy feistes si bonne chière quil desire vous fere service. Ledict commandeur a nom don Loppo Ortado de Mendossa, lequel partira dedans deux Jours sans faulte ... „. — V. le credenziali dell'imperatore al Mendoza in *Arch. di Stato di Torino. Spagna. Lettere principi*, m. 1°. Carlo V al Duca ed alla Duchessa. Toledo, 23 luglio 1525. — V. pure il tardo dispaccio del Castiglione: Serassi, *Lettere del conte Baldessar Castiglione*, ecc., vol. 2° (Padova, 1771), pag. 20. Il Castiglione all'arcivescovo di Capua, Niccolò Schomberg. Toledo, 28 dicembre 1525.

(2) Sanuto, XXXIX, 359. Avvisi del 28 agosto. " ... Lopes Urtado in camin si ha mallato et è rimasto a Zanbarì su la Francia „.

(3) Sanuto, XXXIX, 359. Id. " ...et a mandato di longo ditta commission „.

(4) Lo accompagnò fino a Vercelli il signor di Confignon. V. *Archivio Camerale di Torino. Conti* cit., reg. cit., fol. 218. Ordine di pagamento da

comandanti imperiali, fomentati anche dalla congiura di Girolamo Morone. Il 15 ottobre 1525 il Pescara pose le mani sul Morone (1), occupò Milano (2), e quindi senza chiedere permesso alcuno cercò di mettere presidio in Vercelli. Ma la città non appena conobbe l'intenzione del marchese, rispose che non permetteva innovazioni senz'ordine della Duchessa, alla quale trasmise la domanda, supplicando le fosse risparmiata simile calamità. " Pregamo quella et humilmente la supplicamo habia questa misera città ricomandata, la quale anchora sia in tutto

Chambéry, 22 agosto 1525, di 60 scudi al Confignon " pour conduyre et destrier lambassadeur... et aussi pour les despens de la lectière pour deux chevaulx et aussi pour deux hommes de pied ordonnés pour la menner pour le dict ambasseur qui est mallade et a entrecy et Verceil ". Un Ferdinando ed un Tommaso, medici, che curarono il Mendoza, ricevettero dal Duca, il primo 10 scudi d'oro, il secondo 4 (*Id. Conti* cit., fol. 213-14).

(1) V. su questi fatti Dandolo, *Ricordi inediti di Girolamo Morone*, Milano, 1855, pag. 152 e segg. — Gioda, *Girolamo Morone e i suoi tempi*, Torino, Paravia, 1887. — Müller, *Documenti concernenti la vita di Girolamo Morone* in *Miscell. di storia italiana*, vol. III (1865). — Villari, *Niccolò Machiavelli e i suoi tempi*, vol. 3°. Milano, Hoepli, 1897, pag. 314.

(2) Il castello, nel quale s'era rinchiuso Francesco II, resisteva tuttora. V. *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari*. Il s^r di Confignon al Duca. Torino, 8 novembre (1525). " Jay aujourdhuy devisé auvec ung homme de bien venant de Mylan, qui ma dit que le s^r marquis de Pescare et presque du tout guerj, car desgea une foys le Jour y va hors de son logis pour prendre lher. Les Jours passes y manda labbé de nazara au chasteau parlé au duc, et luy demanda ledict chateau de la part de lempereur, et luy remettre ung secretayre quest au Moron, qui doyt savier toutes les praticques dudict Moron, quest audict chateau, et parelliement luy fere ballié le chateau de Cramone pour y fere mettre gens de la part de lempereur. Sour quoy le duc luy a fest responce que des chateaus quant y playroyt à lempereur les avoer, et sa personne, que par la moindre lettre que luy playra luy escripre, que tout Incontinant Il en fera son bon plaisir comme bon subget et serviteur de lempereur. Et aussi dudict secretayre de Moron ledict abbé de Nazara luy dit que ledict s^r marquis de Pescara avoyt lettres de lempereur, addressantes à luy pour remettre lesdicts chateaus et ledict secretayre entre les mains dudict s^r Marquis de Pescara. Le duc luy fist Responce que savoyt bien le s^r Marquis avoyt des blans de lempereur pour les complir a son plaisir; mais que si ledict s^r Marquis voloyt envoye ung gentilhomme de siens vers lempereur que parelliement Il en manderoyt ung aultre quant et quant, et puis quil hobeiroyt à ce que lempereur luy en manderoyt par sesdicts deux gentilshommes, et ce pandant que gardera le chateau et ledict secretayre, et qu'y ny ferroy autres. Et neust aultre responce ledict abbé de Nazara... ".

disfatta, come quella sa, aspecta seguendo questo allogiamento l'ultima roina et desolatione „ (1). Ignoro quale accoglienza abbia fatto la Duchessa a simile proposta, ma ritengo sia stata negata la concessione al Pescara. Pochi giorni prima infatti il conte di Ginevra erasi recato dal medesimo, insistendo perchè accelerasse lo sgombro del Piemonte, ed aveva tratto promessa che entro la settimana il desiderio suo sarebbe stato esaudito (2). Poco probabile adunque che Beatrice abbia ceduto alla nuova domanda. Del resto il marchese era in fin di vita, e moriva il 3 dicembre 1525, in giovane età e nell'apogeo della sua fortuna. Beatrice nel condolersi coll'ambasciatore imperiale Lopez Urbado de Mendoza, esprimeva la fiducia che le cose imperiali avrebbero continuato colla solita fortuna, nonostante perdita sì grande, poichè rimanevano all'esercito due capitani come il marchese del Vasto, Alfonso d'Avalos, e l'illustre difensore di Pavia, D. Antonio de Leva (3). Ma pel ducato sabaudo tale morte fu una sciagura. Il Pescara era nel suo intimo bene disposto verso il Duca e la Duchessa, e se durante il suo comando l'esercito imperiale aveva commesso eccessi in Piemonte, era stato certo senza la sua volontà e per circostanze alle quali

---

(1) *Arch. di Stato di Torino. Minute di lettere del duca Carlo III*, m. 3°. Il marchese di Pescara a Beatrice. Novara, 17 ottobre 1525. " Sapendo che Gieronimo Moron andava in alchune pratiche che erano deservitio del Imperatore, me a parso de tenerlo connico (*sic*) et assecurarme de questo stato per sua M.tà Ces^{a} et per il s^{r} ducha de Milano, fin che se provedemo alchune cose che bisognanno. Et perchè Vercelli è terra de grandissima Importantia, per questi effecti per stare donda sta, ho posto alchuna gente in epsa con vera confidanza che v. A. non ne resterà deservita et che me ne tenerà per discolpato si lo osato senza sua saputa „.

Arch. di Stato di Torino, ecc. Il comune di Vercelli a Beatrice. Vercelli, 17 ottobre 1525.

(2) SANUTO, XL, 57.

(3) *Arch. di Stato di Torino*, loc. cit. Beatrice al Mendoza. Torino, 9 dicembre 1525.

Circa la malattia del Pescara riferirò un consiglio medico che Luisa di Savoia dava al Bernezzo come ultimo esperimento di guarigione. *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari.* Bernezzo al Duca. S. Just presso Lione, 5 dicembre (1525). " Elle ma au surplus dit quelest advertie que le marquis de Pescara est très mal et *que pour le dernier remède lons doibt fandre ung mullet tout vif et le metre dedans*, et que lon ny a tant point la vie, et que cest chose mons^{r} en quoy vous debves prandre garde „.

egli non poteva opporsi. Il marchese del Vasto e specialmente il de Leva mostrarono in avvenire ben altre disposizioni verso la corte sabauda.

5. — Mentre in Ispagna fervevano le trattative d'accordo tra il re e l'imperatore, Luisa di Savoia si adoperava per migliorare le condizioni politiche della Francia, istigando Francesco II Sforza, duca di Milano, e le corti italiane contro gli oppressori imperiali. Un'imprudenza del Morone, come accennammo, rese noto al Pescara il disegno e rovinò la congiura. Luisa nondimeno continuò ad agire efficacemente a Roma, a Venezia ed in ispecie a Londra, dove il 30 agosto 1525 fece trattato di pace e d'alleanza col re Enrico VIII. Teodoro Trivulzio, figlio del famoso Gian Giacomo, il 22 settembre lo pubblicò a Lione. Tra i confederati Luisa comprese Venezia ed il Duca di Savoia, suo fratello (1). La condizione della Francia dopo questo trattato si trovò di molto migliorata. Ed infatti Luisa già pensava, quando a Natale nulla ancora l'imperatore avesse fatto sapere circa la pace, di riprendere le armi e tentare di nuovo la fortuna (2).

Fu ventura che a Madrid l'opera della duchessa d'Alençon e del Montmorency riuscisse finalmente ad un trattato di pace sottoscritto colà il 14 gennaio 1526, pel quale il re faceva cessione all'imperatore di tutti i suoi diritti e possessi in Italia, prendeva in isposa Eleonora, sorella dell'imperatore, con varie minori condizioni. A tali patti ricuperava la libertà, ma dava in ostaggio, fino all'esecuzione completa degli articoli, due figli, cioè il delfino Francesco ed il duca d'Orléans Enrico (3). Stava a Chambéry il Duca in grave apprensione, poichè il Bernezzo, suo ambasciatore in Francia, scriveva di non intendere nulla ai

---

(1) Jacqueton, pag. 134, 148. — Sanuto, XL, col. 10.

(2) *Arch. di Stato di Torino. Lettere particolari.* Bernezzo al Duca. S. Just, 5 dicembre (1625). Il Robertet disse al Bernezzo: " que si entre cy et noel sylz nont novelles de quielque fermesse dappointemant Ilz entendent de Jouer ung aultre Jeu, combien quilz esperent plustoust la paix que la guerre ".

(3) De Leva, II, 319. — Decrue, pag. 59-60. — V. il trattato in Du Mont, *Corps universel diplomatique, ecc.*, tomo IV, parte 1ª (Amsterdam, 1726), pag. 40.

primi del 1526 circa le trattative di pace (1), quando il 29 gennaio giunse a Lione presso la reggente il Montmorency colla felice notizia della pace, che il Bernezzo si affrettò a partecipare al Duca (2). Luisa partì subito col Delfino e col duca d'Orléans verso Bayonne, a poca distanza dal fiume Bidassoa, luogo del cambio tra il re ed i suoi figli (3). Il Bernezzo la seguì, ed il Duca mandò inoltre a Bayonne per felicitare la reggente ed il re, non appena fosse giunto, il presidente Pietro Lambert (4). Il 12 febbraio 1526 Francesco partiva da Madrid (5), accompagnato fra gli altri da Luigi Gorras, signore di Escrivieux, ambasciatore piemontese a quella corte (6). Sulla Bidassoa assistette come intermediario tra Luisa ed il vicerè Lannoy, che doveva consegnare il re e riceverne i figli, il conte di Moretta, Carlo Solaro, suddito del Duca, ma gentiluomo della corte francese. Il 17 marzo avvenne lo scambio (7): fu costrutto nel mezzo del fiume un pontone ad àncora. Il Moretta, a nome della reggente, un gentiluomo spagnuolo a quello del vicerè, cioè dell'imperatore, assistettero alla collocazione del pontone in un punto del fiume situato tra Fontarabie e Endaix. Due battelli uguali vennero apparecchiati: sul primo prese posto il re, nell'altro entrarono i due principi col maresciallo di Lautrec, 9 gentiluomini armati di spada e di pugnale, 12 rematori pure francesi e le due governanti dei principi stessi. Nel battello in cui

---

(1) *Arch. di Stato di Torino. Francia. Lettere ministri*, m. 1°. Il Duca al Bernezzo. Chambery, 12 gennaio 1526.

(2) *Id.*, Il Duca al Bernezzo. Chambery, 31 gennaio 1526. — *Id.* Il Duca al Montmorency (stessa data). " Je ne vous sereys escripre la Joye que ma été de vostre heureuse arrivee devers madame, ny aussy remercier de la bonne voulenté que aves envers moy ".

(3) Decrue, pag. 60.

(4) Lambert, col. 854. — *Arch. di Stato di Torino*, loc. cit. Lambert al Duca. Dax, 23 marzo 1526.

(5) Decrue, pag. 61.

(6) *Arch. di Stato di Torino. Vienna. Lettere ministri*, m. 1°. Gorras al Duca (senza data, ma certo da Bayonne, marzo 1526). " Je me suis revenu despagnie avec le roy ".

(7) *Arch. di Stato di Torino. Lettere principi, duchi di Savoia*, m. 8°. Il Duca al segretario Chatel. Chambery, 7 aprile (1526). Comunichi al Mendoza che il re arrivò il 17 marzo a Bayonne e che esso e l'imperatore " sont partiz densemble gros amys appres plusieurs longs et reiterez devys quil ont heu entre eulx seul a seul ".

era il re stavano il Lannoy con altri 9 gentiluomini spagnuoli armati di bastoni e 12 rematori della stessa nazione. In un terzo battello salirono il Moretta ed un gentiluomo a nome dell'imperatore, 4 marinai spagnuoli ed altrettanti francesi, per visitare gli altri battelli ed accertarsi che d'ogni parte si fossero seguìte le prescrizioni stabilite. Sbarcarono finalmente ad un lato del pontone il Lannoy seguìto dal re e da Ferdinando Alarcon, ed all'altro il Lautrec solo coi principi. Il Lautrec consegnò questi ultimi, il Lannoy il re, che si recò immediatamente a Bayonne, mentre i principi vennero condotti a Fontarabie, che fu sgombrata dai Francesi e consegnata secondo il trattato agli imperiali. Ad una lega dal luogo di consegna il re incontrò 1000 fanti francesi che lo scortarono a Bayonne (1). Francesco fece ottimo viso agli inviati sabaudi che l'attendevano. Già il Lambert, giunto a Bayonne il 13 marzo, era stato dalla reggente ricevuto con parole molto cordiali verso il Duca. Luisa aveva assicurato il presidente ed il Bernezzo che il re suo figlio nutriva soddisfazione viva della condotta tenuta dallo zio. Quando poi si trovò col Lambert, Francesco disse di sentire riconoscenza infinita pel Duca che non l'aveva dimenticato nella disgrazia, e promise di mostrare coi fatti i sentimenti suoi benigni (2).

---

(1) La cerimonia della consegna di Francesco I è pur descritta dal Mignet, II, 198-201 e dal Decrue, pag. 61. — Io seguo la minuta narrazione del Moretta. V. *Arch. di Stato di Torino. Francia. Lettere ministri*, m. 1°. Lett. cit. del Moretta da Bayonne, 18 marzo 1526.

(2) Lambert, col. 854. " ... lors que fus de sa Magesté bien veheu et le premier aouy, disant que pour tant de bons tours que mon dict seigneur luy avoit faict, et a madite dame sa mere, il se tenoit plus tenu a luy que à point daultres de ses parens et amys et que iamays ne l'oblieroit ", — *Arch. di Stato di Torino*, loc. cit. Lambert al Duca. Dax, 23 marzo 1526. " ... et par resolution, Mons^r, lesdicts s^r et dame sont en tel vouloir vers vous quil ne scauroyent meilleur, desliberez en toutes choses qui vous pourroyent survenir exposer leur estat pour le vostre. Ainsi que sur ce mont amplement chargé vous dire les Intention parellement sur pleusieurs aultres bonnes choses ". Il Lambert scrive quanto alle cerimonie di rimettersi al racconto del Moretta, e quanto alle parole del re al racconto del Gorras. Eccolo. V. *Arch. di Stato di Torino. Vienna. Lettere ministri*. Lett. cit. del Gorras. " Je suis revenu despagnie avec le roy, lequel apres havoir remis mess.^rs ses enfans en son lieu le xvij^e de ce moys arrivast en Bayonne, là ou mons^r le president si trouvast, auquel il a dit lobligation quil tient havoir en vous pour non le havoir oblier en sa necessité *en*

Al Moretta pure disse che nulla da parte sua verrebbe trascurato, pur di soddisfare lo zio in quanto desiderava (1).

La pace ed il ritorno del re giungevano in buon punto per togliere il Duca da gravi inquietudini. Nel mese di febbraio ancora, la reggente non vedendo tornare il figlio, sembrava in procinto d'inviare un nuovo esercito di 20,000 fanti, 1000 uomini d'arme e non pochi cavalleggieri nella penisola, e n'aveva già chiesto il passo al Duca, il quale preoccupatissimo erasi affrettato ad avvisarne i capitani imperiali, dichiarando che le condizioni del suo stato gl'impedivano di negare il passo a chiunque lo volesse (2). Le buone parole del re pareva dovessero lasciargli sperare un po' di tranquillità per l'avvenire. Ma erano sincere le espressioni di Francesco? e l'antico odio, assopito dalle recenti disgrazie e dai favori ricevuti, non avrebbe ripreso il sopravvento nell'animo del poco leale monarca? Questi pensieri dovettero certo passare nella mente del Duca, altrettanto buon conoscitore degli uomini, quant'era principe di scarsa energia. E gli anni futuri ben presto gli mostrarono quanta fede dovesse attribuire alle amorevoli dichiarazioni del nipote.

---

sorte que plus content ne pourroit estre quil est de vous, Comme de meme madame et les aultres qui les ont servy audict Espaignie luy ont dit, et que par effect pourres cognoistre, parce que ledict mons^r le president vous dirà de sa part „. Il Gorras portava pure al Duca i saluti dell'imperatore.

(1) *Arch. di Stato di Torino. Francia. Lettere ministri*, m. 1°. Lett. cit. del Moretta del 18 marzo. Dice di aver visitato a Saint Sebastien il re. " Il en fust fort aise et vous promectz, Monseigneur, sus ma foy que au propos quil ma tenu Il nespargnera rien de vous secourir en voz afferez. De ce tient sy content de vous que nest possible de plus „.

(2) SANUTO, XL, 765.

Due note dantesche

del Prof. PIETRO GAMBÈRA.

I.

L'aurora descritta da Dante nel canto IX del Purgatorio.

La concubina di Titone antico
  Già s'imbiancava al balco d'orïente
  Fuor delle braccia del suo dolce amico:
Di gemme la sua fronte era lucente,
  Poste in figura del freddo animale,
  Che con la coda percuote la gente:
E la notte dei passi con che sale,
  Fatti avea duo nel loco ov'eravamo
  E il terzo già chinava in giuso l'ale;
Quando io che meco avea di quel d'Adamo,
  Vinto dal sonno, in sull'erba inchinai
  Là 've già tutti e cinque sedevamo.

Dopo lunga salita Virgilio e Dante, nell'Antipurgatorio, incontrarono Sordello che li guidò in un seno verde e fiorito, formato come da una frana nella montagna. Quel seno era il *bel soggiorno*, come dice Sordello, dove avrebbero atteso *il nuovo giorno* (*Purg.*, VII, 45 e 69). Di là videro e conobbero alcuni personaggi (*grandi ombre*) che sedevano nella sottostante piccola valle. Ma giacchè la sera non era ancora oscura, Sordello invitò i compagni a scendere nella valletta; ed ivi, quando *tempo era già che l'aer s'annerava* (VIII, 49), videro il serpente fugato da due angeli e incontrarono le anime di Nino Visconti e Corrado Malaspina, con le quali s'intrattennero.

La notte intanto s'era inoltrata, e i tre poeti tornarono al *bel soggiorno*, accompagnati da Corrado e da Nino. Colà si posero a sedere *tutti e cinque* (IX, 12) per attendervi *il nuovo giorno.* Dante doveva essere stanco per la lunga e faticosa salita fatta; tuttavia non s'addormentò, per il riguardo dovuto a' suoi compagni, se non quando fu *vinto dal sonno* (IX, 11), il che avvenne allo spuntare dell'attesa aurora solare, cioè quando *già s'imbiancava al balco d'oriente — la concubina di Titone antico.*

Ora procuriamo di determinare il tempo in cui sorgeva appunto l'aurora solare al *bel soggiorno*, dove Dante si addormentò.

Egli personifica la notte colle ali, come l'aveva personificata il suo maestro, Virgilio, in un bellissimo verso dell'*Eneide:*

Nox ruit, et fuscis tellurem amplectitur alis.

La notte, come l'hanno personificata i due poeti, discende (*ruit*) verso la terra, dal tramonto del sole sino alle ore dodici pomeridiane, per oscurarla con le nere sue ali; risale poi verso il cielo sino al risorger del sole. Ma Dante soggiunge che la notte aveva già fatto salendo (rispetto al luogo in cui egli si trovava) due passi e avea quasi compiuto il terzo passo (IX, 7-9) col battere e chinare in giù per la terza volta le sue immense ali; e siccome egli poco dopo misura il tempo in ore (IX, 44), si deve conchiudere che, dove e quando s'addormentò, l'aurora sorgeva poco prima delle ore tre antimeridiane.

Il sole, come si rileva dalla penultima terzina del precedente canto ottavo, si trovava in Ariete, e però il tempo era equinoziale o, per dir meglio, corrispondeva ad uno dei primi giorni della nostra primavera. Inoltre, quando Dante si destò, *il sole er'alto già più di due ore* (IX, 44); erano, cioè, già passate le ore otto del mattino. Risulta adunque che il tempo, che il Poeta trascorse nel sonno, durò poco più di *cinque ore,* ossia dalle tre alle otto passate del mattino.

Non arrecherà meraviglia che Dante abbia veduto sorgere l'aurora solare alle ore tre, invece che alle quattro, dopo mezzanotte, se si consideri che egli si trovava ad una grande altezza dal livello del mare. Quanti hanno osservato l'aurora, l'alba e il sol nascente da un monte molto elevato, possono attestare che vi si rendono visibili molto prima che nelle regioni sottostanti, avvolte ancora dalle tenebre.

Si ponga ora mente alle circostanze relative all'aurora dal Poeta veduta o meglio intraveduta. Il sole era per risorgere insieme all'Ariete, e l'aurora doveva già velare i vicini Pesci sorgenti e trovarsi per conseguenza, nella volta celeste, *di fronte* allo Scorpione. Infatti questo tramonta subito dopo la Libra, la quale era prossima a tramontare perchè diametralmente opposta nello Zodiaco all'Ariete, che era per risorgere insieme col sole, come già si è detto.

Pertanto lo Scorpione (*freddo animale che con la coda percuote la gente*) stava *di fronte* (dirimpetto), non *nella fronte* del-

l'Aurora. Se lo Scorpione si fosse trovato nella fronte dell'Aurora, le stelle che lo compongono, non sarebbero state visibili.

Il fatto che Dante finge d'aver constatato dal monte dell'isola del Purgatorio, da lui immaginata agli antipodi di Gerusalemme, si può osservare più o meno bene di buon mattino, negli ultimi giorni di marzo e nei primi di aprile, da ogni luogo della superficie terrestre, non prossimo alle regioni polari e abbastanza lontano da monti orientali e da monti occidentali: chi allora (e precisamente mentre sorge l'aurora solare) si volge a ponente, vede ancora assai lucenti sopra l'orizzonte le stelle dello Scorpione.

Il Poeta dicendo dell'aurora: *la sua fronte*, intese di significare, ripeto, la parte occidentale della vôlta celeste, che le stava *a fronte* (dirimpetto), e, più precisamente, là dove era la costellazione dello Scorpione. Egli non pensò mai di dare all'aurora per diadema lo Scorpione, come hanno creduto i comentatori, alcuni dei quali poi l'hanno incoronata invece col Serpente, coi due Pesci, e financo colla Balena. Essi hanno tentato di sostituire Titano a Titone, Teti all'Aurora, l'aurora lunare alla solare, il nostro all'opposto emisfero, facendo dormire Dante per più di *undici ore* consecutive, cioè dalle nove di sera sin dopo le otto del mattino!

Devo tuttavia dichiarare che quanti si occuparono del difficile e controverso passo dantesco, dubitarono delle proprie conclusioni. I molti e gravi errori dei comentatori si devono principalmente al significato ambiguo della parola *fronte* e alla confusione fatta *dei passi con che sale* la fantastica notte alata, con i passi della notte astronomica che, *opposita al sol, cerchia* (*Purg.*, II, 4). Ma giova ripetere che questi passi nel primo caso incominciano evidentemente alle ore 12 pomeridiane (mezzanotte), e non mica subito dopo il tramonto del sole, come nel secondo caso.

Insomma, dal predetto canto IX, inteso a dovere, risulta che Dante s'addormentò nel seno verde e fiorito dell'Antipurgatorio mentre vi spuntava l'aurora solare; che *nell'alba* fu tolto da Lucia e trasportato, *come il dì fu chiaro,* presso la porta del Purgatorio; che sognò l'*aquila* dalle *penne d'oro* al sorger del sole; e che finalmente si svegliò quando questo era già alto più di due ore, sicchè la troppa luce improvvisa lo spingeva a tenere *il viso alla marina torto.*

Conchiudo con l'invocare il giudizio dei colti lettori e con lo sperare che si riconoscerà essere oramai risoluta, in modo semplicissimo, una questione che, per causa di facili equivoci, affaticò inutilmente eletti ingegni, compresi il P. Antonelli e l'insigne matematico e astronomo F. Mossotti.

II.

La salita di Dante dall'Eden alla Luna.

Dante, come si rileva dall'ultimo canto del *Purgatorio*, finì di percorrere il Paradiso terrestre, a mezzogiorno, quando *più corrusco, e con più lenti passi, teneva il sole il cerchio di merigge* (vv. 103-104). Non potè esser molto il tempo impiegato per recarsi a bere al vicinissimo fiume Eunoè, donde tornò *puro e disposto a salire alle stelle.* Tuttavia si fermò nel Paradiso terrestre sino al domani mattina, al risorger del sole, il quale *fatto avea di là mane e di qua sera* (*Parad.*, II, 43); *mane*, cioè, al Paradiso terrestre, immaginato dal Poeta alla sommità del monte del Purgatorio, agli antipodi di Gerusalemme; e *sera* nei paesi del nostro emisfero non troppo lontani dal meridiano di quella città.

I comentatori non son riusciti a spiegare perchè Dante e Beatrice abbiano indugiato quasi 18 ore a salire al cielo. Perciò il Benassuti, sostenuto nella sua opinione dal P. Sorio, tentò di provare che la salita avvenne non al mattino del giorno appresso, ma subito dopo il ritorno di Dante dal fiume Eunoè.

L'illustre astronomo Schiaparelli, in una lettera al professore Rigutini, che l'aveva invitato a dare il suo parere sulla nuova interpretazione, dimostrò che il tentativo di sopprimere quelle 18 ore era *una violenza al più volgare buon senso.* Riconobbe per altro che il lungo indugio, che sembrava anche a lui ingiustificato, era degno di ponderazione, pur soggiungendo che lo si poteva ritenere come una *sconvenienza di poco momento,* perchè il Poeta *non poteva e non doveva considerare con soverchia pedanteria tutte le circostanze di tempo e di luogo* (*Nuova Antologia,* 1867, vol. VI, pag. 792).

Ma la risposta del Direttore dell'Osservatorio astronomico di Milano non fu, in tutto e per tutto, esauriente. Infatti egli non dissipò la difficoltà che fu causa della nuova stravagante

interpretazione; e però le sue argomentazioni vennero trascurate, e alcuni anni di poi combattute dai signori Vaccheri e Bertacchi, dal Pincherle e più tardi dal sig. Agnelli; senonchè costoro non riuscirono che a moltiplicare gli errori del Benassuti.

Or io mi propongo di dimostrare che l'indugio di Dante e Beatrice a salire al cielo costituisce, non già una sconvenienza più o meno giustificabile, ma una delle maggiori bellezze scientifiche della *Commedia*.

Il Poeta dice che la salita fu fatta con rapidità fulminea e che egli giunse con Beatrice direttamente nella Luna (*Parad.*, I, 91-93 e II, 22-36). Questa adunque doveva allora passare al meridiano del monte del Purgatorio, ossia trovarsi a mezzo del suo corso per la soprastante vôlta celeste. Così infatti avvenne, come ora dichiarerò.

La luna era già piena o *tonda* (*Inf.*, XX, 127-129), e per conseguenza si era levata poco dopo il tramonto del sole, quando Dante, smarritosi nella *selva oscura*, vi passò *la notte* (*Inf.*, I, 2, 21). Uscitone al mattino e guidato da Virgilio, entrò su l'imbrunire nell'Inferno (II, 1-3), e ne raggiunse il fondo (centro della terra) la sera del giorno seguente (XXXIV, 68), cioè *due giorni* (computati da sera a sera) dopo il plenilunio, mentre risorgeva la notte a Gerusalemme e si levava il sole all'antipodo monte del Purgatorio. Oltrepassato il centro terrestre e trovatosi così da sera a mane immediatamente, salì quindi all'isola e al monte del Purgatorio sino al Paradiso terrestre, impiegando *cinque giorni*, computati da mane a mane, comprese le 18 ore d'indugio ad ascendere al cielo. Pertanto la luna, che era già piena *sette giorni* prima, doveva essere ridotta all'ultimo quarto (a mezzo disco apparente), ossia figurare, sulla volta celeste, distante 90° dal sole e quindi culminare tarda sul meridiano del monte del Purgatorio, mentre colà spuntava il sole e avveniva l'ascensione di Dante con Beatrice. Il loro indugio delle 18 ore, a salire nella luna, era dunque necessario, perchè dovevasi attendere che essa arrivasse in posizione propizia ossia vicina, quanto più era possibile, al loro zenit. Se avessero fatta l'ascensione nel meriggio del giorno precedente, subito dopo che Dante tornò dal fiume Eunoè, non avrebbero potuto arrivare alla luna, perchè essa allora era colà tramontata.

Osservo ora che, mentre il Poeta ascendeva con immensa

velocità, doveva veder sollevarsi assai rapidamente il sole, a cagione della sua enorme lontananza, e quindi *giorno a giorno essere aggiunto, come quei che puote avesse il ciel d'un altro sole adorno* (*Parad.*, I, 61-63). Adunque, nella magnifica descrizione dantesca, la *sfera del fuoco* è una strana invenzione dei commentatori. Giammai, nemmeno di notte, ci apparve la terra avvolta da un cielo infuocato. Del resto i filosofi antichi per *sfera del fuoco* intendevano semplicemente lo spazio compreso fra l'atmosfera e il cielo della luna, nel quale spazio si supponeva che salissero i corpi specificamente più leggeri dell'aria, come le fiamme.

Relazione intorno alla *Memoria* dell'avv. prof. Attilio Levi, *L'elemento storico nel greco antico. Contributo allo studio dell'espressione metaforica.*

Chiarissimi Colleghi,

Per investigare quale e quanta sia stata l'azione del fatto storico, nel più largo senso della locuzione, sul greco antico l'autore ne sottopose ad esame la grande ricchezza lessicale, valendosi non solo delle opere del Passow e del Pape, e soprattutto della prima, ma anche del *Thesaurus graecae linguae*, e, per la parte etimologica, dei risultamenti delle migliori ricerche raccolti nel libro del Prellwitz, ma astenendosi per lo più da congetture nuove, e non trascurando di trarre profitto da ogni recente trattazione, da lui riputata giovevole, degli argomenti più connessi con quello del proprio lavoro. Nell'esame dei fatti storici come cause di fatti semasiologici il Levi giudicò opportuno limitarsi alla " grecità vera e propria con esclusione del mondo romano e del cristianesimo ", ma ben comprese come fosse cómpito suo valersi d'ogni vocabolo, anche d'età assai tarda, che alla civiltà greca più schietta si riferisse e potesse così riuscire utile allo studio dell'argomento propostosi. Le parole greche in cui l'autore credette di scorgere esempî in particolar modo notevoli dell'azione esercitata sul linguaggio da fatti storici sono state da lui divise, in primo luogo, in tre grandi categorie di cui i titoli sono: 1° la religione (miti, culto) [n[i] 1--200]; 2° la storia propriamente detta (che in gran parte

potrebbesi denominare ‘geografia’) [n^i 201—342]; 3° la vita (pubblica, privata, intellettuale e morale) [n^i 343—583]. Nelle varie suddivisioni di queste tre sezioni troviamo citate dal Levi, colle più utili indicazioni intorno al loro uso, le voci corrispondenti ai vari argomenti per cui procede la sua trattazione e somministranti esempi più o meno cospicui dei fenomeni di senso da lui investigati. Seguono tre indici speciali, con ordine alfabetico: 1° indice dei nomi propri o dei loro derivati cui il fatto storico diede, o, meglio, rese valore di nomi comuni (di che sarebbero esempi italiani *un Catone, una Lucrezia* ecc.); 2° indice di vocaboli che dal fatto storico ebbero un senso non inerente alla radice od al tema (come avvenne della voce *cavaliere* ‘in senso morale’ nella nostra lingua) ecc.; 3° indice di parole che dovettero al fatto storico la propria formazione ed il cui significato andò spesso, non sempre, soggetto a mutamenti o per nuova causa storica o per normale associazione d'idee (tali sono, ad esempio, le voci italiane *tribuno, tribunizio*). Un indice generale, alfabetico anch'esso, s'aggiunge ai tre indicati, con non poca utilità per gli studiosi.

Questa *Memoria* del Levi, frutto di non breve nè facile lavoro, è veramente, come l'autore la intitolava, un contributo allo studio dell'espressione metaforica, e, come i sottoscritti commissari aggiungono, un contributo notevole, per importanza e novità di tema, per diligenza di trattazione, a ricerche per lo più non ancora abbastanza frequenti ed estese, ma di cui questa nostra Società scientifica non mancò di dare qualche saggio. I sottoscritti pertanto vi propongono, chiar^mi Colleghi, d'accogliere con benevolenza questo nuovo lavoro d'un investigatore a Voi già noto per seria attività intellettuale, ammettendone la *Memoria* all'onore della lettura.

I commissari
B. PEYRON
D. PEZZI, *relatore*.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

Stab. Eliot. Molfese — Torino.

$^{1}/_{11}$

icchielli dis. dal vero

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXV, DISP. 3ª, 1899-900

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1900

CLASSE

DI

SCIENZÉ FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Dicembre 1899.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: BIZZOZERO, Direttore della Classe, LVADORI, BERRUTI, D'OVIDIO, MOSSO, CAMERANO, SEGRE, PEANO, LTERRA, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA e ACCARI Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza precedente e viene approvato.

Il Presidente comunica alla Classe l'invito fatto dall'Accamia delle Scienze di Berlino a questa Accademia a prender rte alla festa del centesimo anniversario della sua fondazione. festa si terrà nel marzo 1900. Questo invito fu già comucato all'altra Classe, che deliberò di trattarne nella prossima unanza a Classi Unite. La stessa deliberazione prende pure Classe.

La Società di Biologia di Parigi invitò l'Accademia a prenre parte alla solennità del cinquantesimo anniversario della sua ndazione. La Classe pregherà il sig. Prof. Augusto CHAUVEAU embro dell' Istituto di Francia, di rappresentarla in quella lennità.

Il Socio Peano presenta in omaggio all'Accademia il secondo volume del suo: *Formulario di Matematica.* Il Presidente ringrazia.

Il Presidente presenta l'opera intitolata: *Spedizione di S. A. R. Luigi Amedeo di Savoia duca degli Abruzzi al Monte S. Elia Alaska 1897* (Milano, 1900). Essa fu inviata all'Accademia dall'autore Dott. Filippo De Filippi a nome di S. A. R. Fu già ringraziato l'autore e verrà inviato speciale ringraziamento a S. A.

Il Segretario presenta un volume inviato dalla Società fisico-medica di Würzburg e intitolato: *Festschrift zur Feier ihres Fünfzigjährigen Bestehens.*

Vengono poi presentate e accolte per l'inserzione negli *Atti* le seguenti note:

1° *Di un nuovo flessimetro e sua applicazione,* del Socio Guidi,

2° *Sugli integrali lineari dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti,* del Socio Volterra,

3° *Sulla metrica degli spazi a curvatura costante,* di Francesco Giudice, presentata dal Socio Peano,

4° *Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane,* del dottor Tommaso Boggio, presentata dal Socio Volterra.

LETTURE

Di un nuovo flessimetro e sue applicazioni;

Nota del Socio CAMILLO GUIDI.

(Con una tavola).

Il Laboratorio sperimentale per i materiali da costruzione, annesso alla R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri di Torino, del quale ho dato già notizie in altre mie pubblicazioni (*), mancava di un istrumento di precisione per la misura delle freccie dei solidi inflessi, nè era possibile adattare alla grande macchina universale ivi esistente un flessimetro di tipo già noto, come ad esempio quello adottato dal prof. BAUSCHINGER per la macchina WERDER (**). Ho dovuto quindi ideare un flessimetro di nuovo tipo, il quale potesse applicarsi convenientemente alla macchina di cui dispongo. Lo studio pratico dei particolari costruttivi dell'istrumento ed i relativi disegni furono accuratamente eseguiti dall'egregio ing. prof. A. GALASSINI. La costruzione venne affidata al sig. C. KLEBE, assistente del Laboratorio meccanico tecnico del Politecnico di Monaco (Baviera), costruttore rinomato di apparecchi di tal genere, il quale, salvo lievi modificazioni, si attenne ai disegni inviatigli.

Dopo aver constatato con parecchie esperienze che con tale istrumento è stato felicemente raggiunto lo scopo, mi propongo colla presente Nota di darne una succinta descrizione, riportando inoltre alcuni risultati sperimentali con esso ottenuti, ed accennando ad altre applicazioni che l'istrumento potrebbe avere fuori del Laboratorio, in special modo nel collaudo delle costruzioni metalliche.

(*) Cfr. C. GUIDI, *Notizie sul Laboratorio per esperienze sui materiali da costruzione, ecc.* Roma, Centenari, 1895. — Id. " Atti R. Acc. Scienze di Torino ", 1898-99.

(**) ***Maschine zum Prüfen der Festigkeit der Materialien construirt von Ludwig Werder, etc.*** München, Wolf & Sohn, 1882.

Col flessimetro Bauschinger si misura lo spostamento della sezione di mezzo di una trave inflessa, semplicemente appoggiata alle estremità, e gli spostamenti non trascurabili che soffrono le sezioni in corrispondenza degli appoggi, dopo di che si può dedurre la vera freccia della curva elastica della trave. Colla macchina di cui dispongo nel mio laboratorio, non essendo possibile una simile disposizione, ho reso indipendente dagli spostamenti delle sezioni in corrispondenza degli appoggi la determinazione della freccia d'incurvamento, la quale viene semplicemente fatta con una sola lettura e senza alcuna operazione di riduzione.

La fig. 1 dell'annessa tavola rappresenta l'istrumento già fissato contro la traversa che viene applicata alla macchina, quando si sperimenta alla flessione; nella fig. 2 esso è disegnato schematicamente parte in vista e parte in sezione, nell'atto di misurare la freccia d'incurvamento del solido AB semplicemente appoggiato in A e B e sollecitato, nel caso della figura, da un carico concentrato P applicato in G, in corrispondenza della sezione mediana.

Il flessimetro misura la freccia d'incurvamento che si verifica nella faccia opposta a quella cui è applicato il carico; con lieve modificazione costruttiva, sulla quale è inutile qui insistere, esso potrebbe, qualora si preferisse, misurare la freccia in corrispondenza del piano assiale del solido, normale al piano di sollecitazione.

Il mio flessimetro nelle sue parti essenziali risulta così formato:

Due braccia CD, CD (fig. 2), rigidamente connesse ad un dado centrale CC, constano di una parte cilindrica solidale al dado e di un tubo il quale s'introduce a forza su di essa, ed alla medesima viene rigidamente fissato mediante collarini E, E'; F, F' (fig. 1): di tali tubi esiste una coppia di ricambio per modo che la distanza fra le punte D, D colle quali terminano le braccia del flessimetro può variare da cm. 45 a cm. 85.

Il dado presenta secondo l'asse normale alle braccia un foro cilindrico, nel quale si muove senza alcun giuoco laterale una spina d, che è costantemente spinta contro il saggio da inflettersi da una molla ad elica e che coll'intermediario di un tubo f trova appoggio contro il fondo di un astuccio cilindrico H.

Altra molla pure ad elica *e'* esistente nel medesimo astuccio spinge costantemente il dado e per conseguenza anche le braccia del flessimetro contro il saggio, in modo che le punte *D*, *D* sono sempre tenute a contatto col medesimo. Una piccola vite d'arresto e di guida impedisce che le parti che si muovono entro l'astuccio possano uscirne fuori, come pure che l'istrumento possa ruotare intorno all'asse dell'astuccio stesso.

Tale astuccio che, come si vede, porta tutto l'istrumento, è sorretto, in modo però da poter liberamente ruotare attorno ad un asse verticale, da un sostegno a quattro gambe (fig. 1) infisse in un blocco, che viene fissato, mediante due viti di richiamo, nella scanalatura a coda di rondine praticata nella faccia anteriore della traversa della macchina. Il flessimetro essendo girevole, come si è detto, intorno ad un asse verticale, le estremità *D*, *D* delle sue braccia possono mantenersi costantemente a contatto della faccia posteriore del saggio, ancorchè la sua flessione fosse alquanto dissimmetrica.

Da quanto si è detto emerge che lo spostamento relativo della spina *d* durante la flessione del saggio misura senz'altro la freccia d'incurvamento del medesimo nel tratto abbracciato dall'istrumento. Ora tale spostamento viene misurato nel modo che segue. Alla spina *d* è resa solidale, con una disposizione analoga a quella nota, adottata dal Bauschinger nel suo *Spiegelapparat*, una linguetta *m* d'acciaio, disposta parallelamente all'asse della spina, rivestita di carta smerigliata finissima; essa, per giuoco di leva, è spinta contro un piccolo tamburo di ebanite *n* (fig. 1), portato da un alberino orizzontale normale all'asse della spina, girevole con minimo attrito fra due punte, tenute in posto da due montantini solidali al dado C dell'istrumento. Al medesimo dado è anche connesso un arco graduato sul quale scorre un indice equilibrato, che è solidale all'alberino anzidetto. Quando l'istrumento non deve funzionare, una piccola vite di pressione *v* permette di distaccare la linguetta dal tamburo di ebanite.

Con tale disposizione ogni spostamento della spina *d* è convertito senz' alcun passo morto in una rotazione del tamburo e, per conseguenza, dell'indice. L'arco è graduato sulle due faccie e l'estremità dell'indice è ripiegata sulla faccia posteriore dell'arco per modo che la lettura può farsi da ambedue le parti.

La circonferenza del tamburo di ebanite è di mm. 24,00 e le parti in cui è diviso l'arco sono $\frac{1}{2400}$ dell'intera circonferenza, talchè ogni parte misura $\frac{1}{100}$ mm. di spostamento della spina; si può ancora apprezzar bene ad occhio $\frac{1}{5}$ di parte e quindi stimare la freccia d'incurvamento fino ai $\frac{2}{1000}$ mm. Con più riprese il flessimetro può misurare una freccia massima di mm. 15.

Con tale istrumento si possono valutare colla necessaria approssimazione le freccie corrispondenti alle deformazioni elastiche, come pure dedurre il limite di elasticità ed il modulo di elasticità del materiale. L'espressione analitica della freccia elastica misurata dal flessimetro si deduce nel seguente modo:

La freccia d'incurvamento f misurata dall'istrumento (fig. 3a) che è poi eguale allo spostamento relativo di ciascuno dei punti D rispetto alla tangente in C alla curva elastica, si ottiene semplicemente considerando, in grazia della simmetria, una metà della trave (fig. 3b) come incastrata rigidamente in C e sollecitata in A da una forza $\frac{P}{2}$ ed in D da una forza ipotetica $\mathfrak{T}$ (che poi si eguaglierà a zero) e scrivendo l'equazione dei lavori virtuali (*). Si osservi inoltre che ciascuno degl'integrali che entrano in tale equazione va scisso in due, dei quali quello relativo al tratto e è nullo, per essere nulle in quel tratto le derivate parziali $\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{T}}$, $\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{T}}$ del momento flettente e dello sforzo di taglio rispetto alla forza ideale $\mathfrak{T}$. Si ha quindi semplicemente, contando le x dal punto D verso destra ed adottando i soliti simboli (**):

(*) Cfr. C. Guidi, *Lezioni sulla scienza delle costruzioni*. Parte II. Torino, Bertolero, 1899.

(**) M = momento flettente.
T = sforzo di taglio.
F = area della sezione trasversale del solido.
I = momento d'inerzia della medesima rispetto all'asse di flessione.
E = modulo di elasticità normale.
G = " " tangenziale.
χ = coefficiente numerico dipendente dalla forma della sezione trasversale del solido.

$$f = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{T}} dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \chi \frac{T}{GF} \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{T}} dx$$

nella quale:

$$M = \frac{P}{2}(e + x) + \mathfrak{T} x, \qquad \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{T}} = x,$$

$$T = \frac{P}{2} + \mathfrak{T}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{T}} = 1,$$

quindi:

$$f = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{P}{2}(e + x) + \mathfrak{T} x}{EI} x dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \chi \frac{\frac{P}{2} + \mathfrak{T}}{GF} dx .$$

Supposta la trave omogenea e di sezione costante, si ottiene integrando:

$$f = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pel^2}{16} + \frac{\frac{P}{2} + \mathfrak{T}}{24} l^3\right] + \frac{\chi}{GF}\left(\frac{P}{2} + \mathfrak{T}\right)\frac{l}{2},$$

e, facendo finalmente $\mathfrak{T} = 0$ ed $e = \frac{L}{2} - \frac{l}{2}$:

$$f = \frac{Pl^2}{32EI}\left(L - \frac{l}{3}\right) + \chi \frac{Pl}{4GF}. \tag{1}$$

Se il solido è isotropo, potrà porsi $\frac{E}{G} = \frac{5}{2}$, e sostituendo inoltre ρ^2 ad $\frac{I}{F}$, la (1) diviene:

$$f = \frac{PlL^2}{96EI}\left[3\frac{l}{L} - \left(\frac{l}{L}\right)^2 + 60\chi\left(\frac{\rho}{L}\right)^2\right]. \tag{2}$$

La freccia d'incurvamento f_0 relativa a tutta la lunghezza AB della trave si ottiene semplicemente dalla (2), facendovi $l = L$ e cioè:

$$f_0 = \frac{PL^3}{48EI}\left[1 + 30\chi\left(\frac{\rho}{L}\right)^2\right]. \tag{3}$$

Fra le due freccie passa quindi la relazione:

$$f_0 = f \frac{L}{l} \frac{2 + 60\chi\left(\frac{\rho}{L}\right)^2}{3\frac{l}{L} - \left(\frac{l}{L}\right)^2 + 60\chi\left(\frac{\rho}{L}\right)^2} \tag{4}$$

la quale permette di dedurre, qualora si desiderasse, la f_0 dalla f misurata dall'istrumento.

Facendo terminare le braccia del flessimetro e la spina d a forma di staffe in modo da abbracciare il solido, ed appuntandole in corrispondenza del piano assiale normale al piano di sollecitazione si avrebbe la possibilità di misurare la freccia elastica in corrispondenza dello strato neutro e di ottenere direttamente la f_0; tuttavia ho preferito la disposizione sopra descritta, perchè costruttivamente molto più semplice.

Può interessare di esprimere la f in funzione della tensione unitaria massima σ' sopportata dal materiale, cioè dalla fibra che ha la massima distanza y' dallo strato neutro. Ciò si ottiene ponendo nella (2):

$$P = 4\,\frac{\sigma' I}{L y'},$$

con che si ha:

$$f = \frac{1}{24}\,\frac{\sigma'}{E}\,\frac{L}{y'}\,l\left[3\frac{l}{L} - \left(\frac{l}{L}\right)^2 + 60\chi\left(\frac{\rho}{L}\right)^2\right]. \tag{5}$$

Per una sezione rettangolare di base b e di altezza h ($b =$ lato parallelo all'asse neutro) si ha:

$$I = \frac{1}{12} b h^3, \quad \chi = \frac{6}{5}, \quad \rho^2 = \frac{1}{12} h^2, \quad y' = \frac{h}{2},$$

quindi le (2) e (5) divengono in tal caso:

$$f = \frac{PlL^2}{8 E b h^3}\left[3\frac{l}{L} - \left(\frac{l}{L}\right)^2 + 6\left(\frac{h}{L}\right)^2\right] \tag{6}$$

$$f = \frac{1}{12}\,\frac{\sigma'}{E}\,\frac{L}{h}\,l\left[3\frac{l}{L} - \left(\frac{l}{L}\right)^2 + 6\left(\frac{h}{L}\right)^2\right]. \tag{7}$$

Se scopo dell'esperienza è la ricerca del modulo di elasticità E, questo si deduce dalla freccia valutata col flessimetro, per mezzo della (2). Al medesimo scopo può con vantaggio utilizzarsi l'altro caso di flessione indicato dalla fig. 4, quello cioè di una trave appoggiata semplicemente alle estremità A e B e sollecitata da due forze eguali $\frac{P}{2}$ applicate ad eguale distanza a dagli appoggi. La curva elastica del tratto CD, supposta sempre la trave prismatica ed omogenea, è, in tal caso, circolare, giacchè per quel tratto lo sforzo di taglio è nullo ed il momento è costantemente $= \frac{P}{2} a$; quindi la freccia d'incurvamento f per il tratto l abbracciato dal flessimetro viene semplicemente espressa da (*)

$$f = \frac{l^2}{8r}$$

se r è il raggio della curva elastica, ovvero essendo:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad \text{ed} \quad M = \frac{1}{2} Pa,$$

si ha anche:

$$f = \frac{Pal^2}{16EI}. \tag{8}$$

Dal confronto dei valori di E ricavati per un medesimo solido coll'un metodo o coll'altro, cioè per mezzo della (2) ovvero colla (8), si può avere una verifica della teoria della elasticità e resistenza dei materiali, per quanto riguarda le deformazioni prodotte dallo sforzo di taglio, delle quali si tiene conto nella (2) per mezzo dell'ultimo termine in parentesi, mentre non hanno luogo nel secondo metodo.

Esempio: Barra di acciaio fuso da utensili marca *Sheffield*, di sezione rettangolare di cm. 4,0 × cm. 7,0.

1° caso. — La barra viene cimentata come nella fig. 2, disponendola di costa, cioè col lato maggiore della sezione pa-

---

(*) Cfr. C. Guidi, *Lezioni*, ecc.

rallelo al piano di sollecitazione, e facendo $l=50^{cm}$, $L=60^{cm}$. Cimentata la barra fino allo sforzo P di t. 4,50, andando di $^1/_2$ in $^1/_2$ tonnellata, si è riscontrata molto bene la legge di Hooke, ossia della proporzionalità delle deformazioni alle sollecitazioni, e precisamente si è avuto un incremento medio di freccia di mm. 0,071 per mezza tonn. Dalla (6) si deduce pertanto:

$$E=\frac{0,50\times50\times60^2}{8\times4\times7^3\times0,0071}\left[3\frac{5}{6}-\left(\frac{5}{6}\right)^2+6\left(\frac{7}{60}\right)^2\right]=2180\ {}^t/_{cm^2}.$$

2° caso. — La stessa barra nelle stesse condizioni di posa e di sollecitazione, ma facendo $l=80^{cm}$, $L=90^{cm}$, cimentata da 2 a 3 t. ha dato per ogni $^1/_2$ t. come incremento di freccia mm. 0,26; e quindi dalla (6) si deduce:

$$E=\frac{0,50\times80\times90^2}{8\times4\times7^3\times0,026}\left[3\frac{8}{9}-\left(\frac{8}{9}\right)^2+6\left(\frac{7}{90}\right)^2\right]=2172\ {}^t/_{cm^2}.$$

3° caso. — La stessa barra nelle stesse condizioni di posa e di sollecitazione, ma posta di piatto, cioè col lato minore della sezione parallelo al piano di sollecitazione, cimentata da 1^t a $2^t,50$ ha dato costantemente un incremento di mm. 0,21 di freccia per ogni mezza tonnellata. Dalla stessa (6) si deduce per questo caso:

$$E=\frac{0,50\times50\times60^2}{8\times7\times4^3\times0,021}\left[3\frac{5}{6}-\left(\frac{5}{6}\right)^2+6\left(\frac{4}{60}\right)^2\right]=2191\ {}^t/_{cm^2}.$$

4° caso. — La medesima barra nelle condizioni di carico e di posa indicate dalla fig. 4, posta di piatto, e facendo $a=20^{cm}$, ha dato per incremento medio di freccia, corrispondente a t. 0,50, desunto da due esperienze, mm. 0,192. La (8) fornisce in tal caso:

$$E=\frac{0,50\times20\times50^2}{16\times\frac{1}{12}7\times4^3\times0,0192}=2180\ {}^t/_{cm^2}.$$

La differenza relativamente piccola fra i valori di E ottenuti in questi quattro modi diversi, e la concordanza loro col noto valor medio di E per tal genere di materiale, è una prova dell'attendibilità delle indicazioni fornite dal flessimetro; d'altra

parte le piccole differenze sono spiegate dall'imperfetta isotropia della barra, dalla sua forma non esattamente prismatica (*), dal grado di sensibilità del sistema di leve che misura lo sforzo prodotto. La sensibilità dell'istrumento si rende manifesta durante l'esperienza, giacchè alle minime oscillazioni della stadera corrispondono oscillazioni isocrone dell'indice del flessimetro.

Sembra che un istrumento di questo tipo potrebbe con vantaggio, in grazia della sua semplicità, essere impiegato anche fuori di Laboratorio, là dove occorre rilevare l'inflessione di qualche parte di una costruzione finita, ed in special modo nel collaudo delle costruzioni metalliche, per la determinazione della freccia d'incurvamento di un'asta o trave inflessa, la quale determinazione è in generale meno delicata che la misura della dilatazione elastica della fibbra maggiormente tesa. Oltre di che, mentre risulta praticamente impossibile in molti casi applicare un misuratore d'allungamenti proprio lungo la fibbra maggiormente sollecitata, è semplicissimo applicare il mio flessimetro contro il lembo maggiormente cimentato. Ed anzi in molti casi potrebbesi applicare l'istrumento così modificato che le sue braccia funzionassero da elettrocalamite; con ciò le estremità delle braccia e la spina centrale si attaccherebbero come ventose contro il lembo dell'asta di cui si vuol determinare l'inflessione, e l'istrumento agirebbe senza più bisogno di molle interne, nè di morsetti d'attacco, e potrebbe inoltre essere applicato anche da una certa distanza senza bisogno di palchi di servizio. Naturalmente il meccanismo per la misura della freccia dovrebbe essere eseguito in materiale diamagnetico.

Una tale applicazione avrebbe, secondo me, speciale interesse per la ricerca degli *sforzi secondari* nelle barre di una costruzione metallica reticolare, i quali in tanto esistono in quanto che appunto le dette barre s'inflettono. Per determinare la tensione unitaria massima prodotta da uno sforzo secondario il mio flessimetro è in generale più conveniente di un misuratore d'allungamenti, anche indipendentemente dalla sua più facile applicazione, della quale si è già detto.

(*) La barra venne sperimentata come trovavasi in commercio, senza piallarne le faccie, le quali non erano esattamente piane.

Infatti, considerando la curva elastica come arco circolare, il che è in ogni caso permesso per il tratto di curva abbracciato dal flessimetro, si ha con tale istrumento ed adottando i simboli già usati:

$$\sigma' = \frac{8 E y' f}{l^2}, \tag{9}$$

mentre con un misuratore d'allungamenti, di lunghezza utile l_1, si deve ricavare σ' dalla:

$$\sigma' = E \frac{\Delta l_1}{l_1}; \tag{10}$$

ammesso anche $l_1 = l$, e supposto $\frac{l}{y'} = 24 \sim$, il che spesso si verificherà, si ottiene:

$$f = 3 \Delta l_1,$$

cioè le deformazioni da misurarsi col flessimetro sono tre volte quelle che converrebbe misurare coll'altro istrumento.

Come prova della praticità di tale applicazione ho voluto fare la seguente esperienza: Ho preso un ferro a [(fig. 5) delle dimensioni $\frac{80 \times 40}{10 \times 8}$ (fig. 6) e dopo avervi inchiodate alle estremità, contro la faccia esterna dell'anima, due linguette in ferro piatto, l'ho assoggettato ad uno sforzo di trazione N di 3^t. prendendo fra cunei le linguette suddette. Questo è un caso di sollecitazione eccentrica ben definito: lo sforzo di trazione agisce con una eccentricità di cm. 2 e provoca quindi al lembo delle ali del ferro a [una tensione unitaria massima la quale vien data notoriamente (fig. 6) da:

$$\sigma_{max} = N\left(\frac{1}{12,8} + \frac{2 \times 2,6}{18,6}\right) = (0,0781 + 0,2796)\, N = 0,3577 N \tag{11}$$

e per $N = 3^t$:

$$\sigma_{max} = 1,07 \ {}^t/_{cm^2}.$$

Riguardando la curva elastica secondo cui si dispone il lembo delle ali del ferro a [, per il tratto abbracciato dal flessimetro, che in tale esperienza era di cm. 45, come circolare, la tensione unitaria prodotta al lembo suddetto dal momento flettente è data secondo la (9) da

$$\sigma' = \frac{8 \times 2000 \times 2,6}{45^2} f = 20,54 f,$$

e quindi

$$\sigma_{max} = 0,0781 \mathrm{N} + 20,54 f$$

e per $N = 3^t$

$$\sigma_{max} = 0,23 + 20,54 f.$$

Ora in una prima prova, applicando il flessimetro prima contro il lembo di un'ala del [e poi contro quello dell'altra, ho ottenuto lo stesso risultato e cioè $f =$ mm. 0,40, e quindi:

$$\sigma_{max} = 0,23 + 20,54 \times 0,04 = 1,05 \ ^t/_{cm^2}.$$

Ripetendo una seconda volta l'esperienza ho ottenuto tanto per un'ala come per l'altra $f =$ mm. 0,42, e però:

$$\sigma_{max} = 0,23 + 20,54 \times 0,042 = 1,09 \ ^t/_{cm^2}.$$

La media fra questi due valori, i quali del resto differiscono fra loro di una quantità praticamente insignificante, coincide perfettamente col valore teorico ricavato dalla (11); il che dimostra la bontà di questo metodo sperimentale per determinare lo sforzo prodotto dall'eccentricità dell'attacco.

Torino, dicembre 1899.

Sugli integrali lineari dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti;

Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. — Nella mia Nota: *Sopra una classe di equazioni dinamiche* (*) ho esposto (§ 8) la riduzione che si può operare nelle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti di ordine ν allorchè esiste un certo numero di integrali lineari. Ora mi permetto di esporre un criterio onde riconoscere a priori dai valori dei coefficienti che compariscono nelle equazioni, la esistenza di $\nu - 3$ integrali lineari.

Mi varrò di questo resultato per completare un teorema che ho dato nell'altra mia Nota: *Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche* (**). Ivi dimostro (§ 5) che *se esiste un integrale quadratico la cui equazione caratteristica ha radici diseguali le* ν *caratteristiche si esprimono come funzioni ellittiche del tempo quando si possono trovare* $\nu - 3$ *integrali lineari indipendenti dal tempo.*

D'altra parte in virtù del teorema del § 11 della prima delle due Note citate basterebbe conoscere $\nu - 4$ integrali lineari indipendenti dal tempo, perchè il problema si potesse ridurre alle quadrature.

Questi due resultati si possono fondere insieme, osservando che se esistono $\nu - 4$ integrali lineari deve sempre esistere un nuovo integrale lineare, e perciò basta provare l'esistenza di $\nu - 4$ integrali lineari, perchè si sappia che la soluzione può ottenersi mediante funzioni ellittiche.

2. — Le equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti $p_1, p_2 \ldots p_\nu$, allorchè T è la forza viva e $F = \text{cost}$

(*) " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, Vol. XXXIII. Adunanza del 27 marzo 1898.

(**) Ibid. Adunanza del 27 marzo 1898.

rappresenta un integrale quadratico la cui equazione caratteristica ha radici diseguali possono scriversi (Vedi 1ª Nota citata § 9)

$$p'_s = \Sigma_{r,k}\, e_{s,r,k} \frac{d(T, F)}{d(p_r, p_k)} \tag{1}$$

in cui le $e_{s,r,k}$ sono coefficienti costanti che cambiano segno per una inversione degli indici.

Supponiamo ora che esistano $\nu - 3$ integrali lineari indipendenti

$$G_i = \sum_1^\nu {}_s\, a_{is} p_s = \text{cost} \qquad (i = 1, 2 \ldots, \nu - 3)$$

Dovremo avere

$$\sum_1^\nu {}_s\, a_{is} p'_s = 0$$

$$\sum_1^\nu {}_s \frac{\partial T}{\partial p_s} p'_s = 0$$

$$\sum_1^\nu {}_s \frac{\partial F}{\partial p_s} p'_s = 0,$$

quindi

$$p'_s = (-1)^{s-1}\, C \frac{d(G_1, G_2 \ldots G_{\nu-3}, T, F)}{d(p_1, p_2 \ldots p_{s-1}, p_{s+1} \ldots p_\nu)}$$

in cui C rappresenta un coefficiente di proporzionalità indipendente dall'indice s.

Potremo dunque scrivere le equazioni

$$(-1)^{s-1}\, C \frac{d(G_1, G_2 \ldots G_{\nu-3}, T, F)}{d(p_1, p_2 \ldots p_{s-1}, p_{s+1} \ldots p_\nu)} = \Sigma_{r,k}\, e_{s,r,k} \frac{d(T, F)}{d(p_r, p_k)}.$$

Poniamo ora

$$E_{i_1, i_2, i_3} = \frac{d(G_1, G_2 \ldots G_{\nu-3})}{d(p_{i_4}, p_{i_5}, \ldots p_{i_\nu})} = \begin{vmatrix} a_{1,i_4}, & a_{1,i_5} & \ldots & a_{1,\nu} \\ a_{2,i_4}, & a_{2,i_5} & \ldots & a_{2,\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu-3,i_4}, & a_{\nu-3,i_5} & \ldots & a_{\nu-3,\nu} \end{vmatrix};$$

ove $i_1, i_2 \ldots i_\nu$ rappresenta una permutazione pari dei numeri $1, 2 \ldots \nu$.

L'equazione precedente si scriverà

$$C \Sigma_{r,k} E_{s,r,k} \frac{d(T,F)}{d(p_r, p_k)} = \Sigma_{r,k} e_{s,r,k} \frac{d(T,F)}{d(p_r, p_k)}.$$

3. — Se le caratteristiche sono tali che si abbia

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_1^\nu {}_i p_i^2, \qquad F = \frac{1}{2} \Sigma_1^\nu {}_i \lambda_i p_i^2$$

in cui le λ_i sono diverse fra loro, le equazioni precedenti si scriveranno

$$(2) \qquad C \Sigma_{rk} E_{s,r,k} (\lambda_k - \lambda_r) p_r p_k = \Sigma_{rk} e_{s,r,k} (\lambda_k - \lambda_r) p_r p_k.$$

Riguardo al coefficiente di proporzionalità C noi sappiamo solo che esso è indipendente dall'indice s.

Dimostriamo ora che esso è costante ed indipendente dai valori iniziali delle $p_1, p_2 \ldots p_\nu$.

A tal fine osserviamo che se per $t=0$, prendiamo tutte le caratteristiche nulle eccettuate p_r e p_k, avremo dalla (2)

$$C E_{s,r,k} = e_{s,r,k}$$

ossia

$$C = \frac{e_{s,r,k}}{E_{s,r,k}}$$

e siccome C è indipendente da s, sarà

$$\frac{e_{s,r,k}}{E_{s,r,k}} = \frac{e_{s',r,k}}{E_{s',r,k}}, \quad (s' \gtrless s).$$

Ma invertendo gl'indici, tanto la $e_{s',r,k}$ quanto la $E_{s',r,k}$ cambiano segno, quindi

$$\frac{e_{s,r,k}}{E_{s,r,k}} = \frac{e_{s',r,k}}{E_{s',r,k}} = \frac{e_{r,s',k}}{E_{r,s',k}}$$

e poichè mutando il primo indice r nell'ultimo rapporto, esso non cambia, così sarà

$$\frac{e_{s,r,k}}{E_{s,r,k}} = \frac{e_{r',s',k}}{E_{r',s',k}}, \quad (r' \gtrless r).$$

In modo analogo si trova

$$\frac{e_{s,r,k}}{E_{s,r,k}} = \frac{e_{k',r',s'}}{E_{k',r',s'}} = \frac{e_{s',r',k'}}{E_{s',r',k'}}, \quad (k' \gtrless k)$$

il che mostra che le e e le E aventi gli stessi indici sono fra loro proporzionali, e siccome queste quantità sono costanti, così dalla (2) segue che anche C è una costante ed è indipendente dai valori iniziali delle caratteristiche.

4. — Osserviamo ora che moltiplicando una delle funzioni G_t per C si potrà sempre fare in modo che il rapporto di proporzionalità delle E e delle e si riduca eguale ad 1, onde potremo dire che queste sono eguali ai minori di ordine $\nu - 3$ di una matrice di ν linee e di $\nu - 3$ colonne, tali essendo le E. Ma (Vedi 1ª Nota citata § 9) eseguendo una sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle caratteristiche

$$q_i = \sum_1^{\nu}{}_s A_{s,i} p_s,$$

in modo da passare dalle caratteristiche p_s alle q_i, le $e_{s,r,k}$ si trasformano nelle

$$\sum_1^{\nu}{}_x \sum_1^{\nu}{}_y \sum_1^{\nu}{}_z \, e_{x,y,z} \, A_{x,s} \, A_{y,r} \, A_{z,k},$$

onde la proprietà di essere i minori d'ordine $\nu - 3$ di una matrice di ν linee e di $\nu - 3$ colonne si conserva nei coefficienti delle equazioni differenziali a cui soddisfano le caratteristiche, allorchè si eseguisce una sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle caratteristiche stesse.

Potremo dunque concludere che, quando esistono i $\nu - 3$ integrali lineari indipendenti, i coefficienti $e_{s,r,k}$ saranno i minori di ordine $\nu - 3$ di una matrice con ν linee e $\nu - 3$ colonne

qualunque sia la forma che hanno le funzioni quadratiche T ed F, purchè la equazione determinante abbia radici diseguali.

5. — Da un noto teorema sui minori delle matrici (*) possiamo dedurre che quando le $e_{s,r,k}$ sono i suddetti minori dovrà aversi

$$\sum_{1}^{\nu}{}_k \, e_{s,r,k} \, e_{s',r',k} = 0. \tag{3}$$

Le condizioni precedenti sono quindi necessarie per la esistenza dei $\nu - 3$ integrali lineari.

Dimostriamo che esse sono anche sufficienti.

Infatti se le (3) sono verificate, potremo sempre porre

$$e_{i_1,i_2,i_3} = \begin{vmatrix} a_{1,i_4}, & a_{1,i_5}, & \dots & a_{1,\nu} \\ a_{2,i_4}, & a_{2,i_5}, & \dots & a_{2,\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu-3,i_4}, & a_{\nu-3,i_5}, & \dots & a_{\nu-3,\nu} \end{vmatrix}$$

essendo $i_1, i_2, i_3 \dots i_\nu$ una permutazione pari dei numeri $1, 2 \dots \nu$, e le $a_{h,k}$ $(h = 1, 2 \dots \nu - 3;\ k = 1, 2 \dots \nu)$ quantità costanti.

Le (1) diverranno dunque

$$p'_s = (-1)^{s-1} \frac{d(G_1, G_2 \dots G_{\nu-3}\, T, F)}{d(p_1 \dots p_{s-1}, p_{s+1} \dots p_\nu)}$$

avendo posto

$$G_i = \sum_{1}^{\nu}{}_s \, a_{i,s} p_s \qquad (i = 1, 2 \dots \nu - 3)$$

ciò che prova che

$$G_1 = \text{cost},\ G_2 = \text{cost},\ \dots\ G_{\nu-3} = \text{cost}$$

sono integrali delle (1).

(*) D'Ovidio, *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari.* " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", Vol. XII. — *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante.* " Mem. della R. Acc. dei Lincei " (Classe Sc. fis. mat. nat.), Vol. 1°, Serie 3ª.

Possiamo per conseguenza enunciare il teorema seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè le equazioni differenziali

$$p'_s = \Sigma_{r,k}\, e_{s,r,k} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_r, p_k)}$$

ammettano $\nu - 3$ *integrali lineari è che i coefficienti soddisfino alle equazioni*

$$\Sigma_k e_{s,r,k} e_{s',r',k} = 0.$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, le equazioni s'integrano con funzioni ellittiche.

6. — Mediante la conoscenza di h integrali lineari delle (1), con un conveniente cambiamento di caratteristiche esse possono trasformarsi in $\nu' = \nu - h$ equazioni differenziali dello stesso tipo

$$(4) \qquad q'_i = \Sigma_{r,k}\, e_{i,r,k} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(q_r, q_k)}, \quad (i, r, k = 1, 2 \ldots \nu')$$

in cui F è sempre un polinomio di secondo grado nelle $q_1, q_2 \ldots q_{\nu'}$ ma non più omogeneo.

Ripetendo un analogo ragionamento a quello fatto precedentemente si prova che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè le* (4) *ammettano* $\nu' - 3$ *nuovi integrali lineari indipendenti è che le* $e_{i,r,k}$ *soddisfino le condizioni*

$$\sum_1^{\nu'} e_{i,r,k} e_{i',r',k} = 0.$$

7. — Supponiamo ora che le (1) abbiano $\nu - 4$ integrali lineari, allora esse si ridurranno alle quattro equazioni differenziali

$$q'_i = \Sigma_{rk}\, e_{i,r,k} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(q_r, q_k)} \quad (i, r, k = 1, 2, 3, 4).$$

Ma in questo caso saranno sempre soddisfatte le equazioni

$$\sum_{1}^{4}{}_k\, e_{i,r,k} e_{i',r',k} = 0$$

come si verifica facilmente. Ne segue che esisterà sempre un altro integrale lineare.

Questo integrale si trova immediatamente: esso sarà

$$e_{2,3,4}\, q_1 + e_{3,4,1}\, q_2 + e_{4,1,2}\, q_3 + e_{1,2,3}\, q_4 = \text{cost.},$$

onde avremo il teorema

Allorchè in un problema di moto spontaneo a caratteristiche indipendenti d'ordine ν, esistono ν — 4 integrali lineari indipendenti dal tempo ed un integrale quadratico, la cui equazione caratteristica ha radici diseguali ed è pure indipendente dal tempo, le ν caratteristiche si potranno esprimere come funzioni ellittiche del tempo.

ERRATA-CORRIGE ALLA NOTA:

Sopra una classe di equazioni dinamiche (" Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", Vol. XXXIII, 27 febbraio 1898).

Al principio del N° 4 del § 1 fino alle parole " ... Tenendo presente la (5) otterremo ", sostituire quanto segue:

4. Intenderemo con $\delta p_1, \delta p_2, \ldots \delta p_\nu$ le ν quantità definite dalle ν relazioni

$$\sum_1^{3n}{}_i\, m_i \xi_{is}\, \delta \xi'_i = \sum_1^{3n}{}_i\, m_i \xi_{is} \frac{d}{dt}\, \delta \xi_i \qquad (s = 1, 2 \ldots \nu)$$

che in virtù delle (1) e (2) si scriveranno

$$\sum_1^{3n}{}_i\, m_i \xi_{is} \left(\sum_1^{\nu} \xi_{is}\, \delta p_s + \sum_1^{\nu}{}_s\, p_s\, \delta \xi_{is} \right) = \sum_1^{\nu}{}_i\, m_i \xi_{is} \left(\sum_1^{\nu}{}_s\, \xi_{is} \frac{d\delta\omega_s}{dt} + \sum_1^{\nu}{}_s\, \delta\omega_s \frac{d\xi_{is}}{dt} \right).$$

Restando così giustificata la formula (B) che assumeremo nel § 3 per rappresentare il principio di Lagrange. Ma

$$\delta \xi_{is} = \sum_1^{3n}{}_h \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \sum_1^{\nu}{}_r\, \xi_{hr}\, \delta\omega_r, \qquad \frac{d\xi_{is}}{dt} = \sum_1^{3n}{}_h \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \sum_1^{\nu}{}_r\, \xi_{hr}\, p_r$$

quindi la equazione precedente diverrà

$$\sum_1^{3n} m_i \xi_{is} \sum_1^{\nu}{}_s\, \xi_{is} \left(\delta p_s - \frac{d\delta\omega_s}{dt} \right) = \sum_1^{3n}{}_i\, m_i \xi_{is} \sum_1^{3n}{}_h \sum_1{}_s \sum_1{}_r\, \xi_{hr} \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} (p_r\, \delta\omega_s - p_s\, \delta\omega_r).$$

Tenendo presente la (5) otterremo.....

Sulla metrica degli spazii a curvatura costante;

Nota di FRANCESCO GIUDICE.

La lettura della Memoria di KLEIN del 1871 sulla cosidetta geometria non euclidea m'indusse a stabilire chiaramente ed elementarmente alcuni principii, a dilucidazione della Memoria stessa. Parendomi che, pur tenendo conto delle successive Memorie di Klein del 1873 e del 1890, gli sviluppi da me dati a quei principii possano riuscir utili, per la loro semplicità, a chi voglia incominciare lo studio dell'accennata geometria, li espongo.

Considero specialmente il piano complesso: l'asse reale è così il luogo dei punti reali, e l'intero piano, dopo la separazione di quest'asse, è il luogo dei punti imaginari. In questo modo le considerazioni acquistano originalità ed ottengo qualche risultato, che può interessare anche chi è già iniziato nello studio della geometria generale e può suggerire ulteriori ricerche.

Mi limito a considerare la retta, per porre in chiaro quei principii fondamentali, che spesso si trovano appena accennati. Mi occupo però anche dell'interpretazione della teoria generale nel caso speciale della geometria ordinaria, affine di chiarire anche questo punto.

1. **Le tre geometrie.** — Se un punto si muove sopra una retta, nell'uno o nell'altro verso, devesi verificare uno di questi casi:

1° il punto, movendosi sempre nello stesso verso, finisce per riprendere la posizione di partenza;

2° il punto, sia che movasi sempre nell'uno e sia che si mova sempre nell'altro verso, tende ad uno stesso punto, che non può raggiungere, cosicchè questo è il solo punto inaccessibile della retta (punto all'infinito o *punto fondamentale* o *punto limite* o *confine*);

3° il punto tende ad uno o ad un altro punto, che non può raggiungere, secondo che movesi sempre nell'uno o sempre nell'altro verso, cosicchè questi due punti inaccessibili (punti all'infinito o punti fondamentali o punti limiti) separano i punti accessibili, dei quali quindi è riconosciuta l'esistenza, dagli altri punti della retta (*punti ideali*, che noi diremo *al transfinito*), che pur possono esistere, ma la cui esistenza non può essere riconosciuta.

Vediamo di chiarire questi tre casi mediante una linea chiusa.

Caso 1°. Supponiamo che un mobile, partendo da un punto qualunque, O, della linea e movendosi poi sempre nell'uno o sempre nell'altro verso, possa ritornare al punto O di partenza dopo d'aver percorsa l'intera linea. Per un tal mobile la linea è finita.

Caso 2°. Dividiamo la linea in due archi mediante i punti O e Q; sopra ciascuno dei due archi, partendo da O ed allontanandoci poi sempre da questo punto, segnamo una successione infinita di punti in modo che Q sia punto limite comune delle due successioni, in modo cioè che in ogni arco, che contenga Q nel suo interno, sianvi punti d'entrambe le successioni. I punti d'una successione siano

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad . \; . \; .$$

e quelli dell'altra siano

$$-1 \quad -2 \quad -3 \quad . \; . \; .$$

Supponiamo ora che un mobile parta da O e poi s'allontani sempre da questo punto; e supponiamo che i tempi, che il mobile impiegherà a percorrere successivamente i tratti in cui la linea è divisa dalle due successioni di punti non possano avere nè zero per limite inferiore nè infinito per limite superiore, cioè supponiamo che si possano fissare un tempo abbastanza piccolo t ed uno abbastanza grande τ perchè ogni tratto fra due punti successivi sia percorso in un tempo maggiore di t e minore di τ (*). Il mobile allora, qualunque sia il verso in

(*) V. F. Giudice, *Subfiniti e transfiniti dal punto di vista di* Cantor, " Rendic. Circ. Mat. "; Verbali, adunanze 26 giugno e 10 luglio 1892.

cui si muova sempre, tenderà a prendere la posizione limite Q; cioè non raggiungerà mai questo punto, ma sorpasserà ogni punto, che, nel verso del movimento, lo separava da Q quando ha principiato a muoversi. Per quel mobile la linea è infinita, e soltanto Q è all'infinito: è finito ogni arco, che non contenga Q e non abbia un estremo in questo punto; ed è invece infinito ogni arco, che o contenga il punto Q od abbia in esso un estremo.

Caso 3°. Dividiamo la linea in tre archi mediante i punti O, Q_1, Q_2. Sopra i due archi OQ_1, OQ_2 segnamo le due successioni infinite di punti

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad . \; . \; . \qquad -1 \quad -2 \quad -3 \quad . \; . \; .$$

in modo che Q_1 sia punto limite della prima e Q_2 sia punto limite della seconda. Supponiamo ora che un mobile parta da O e s'allontani poi sempre da questo punto; e, relativamente ai tempi nei quali saranno percorsi i singoli tratti di curva, ammettiamo quanto ammettemmo nel secondo caso. Il mobile allora tenderà alla posizione limite Q_1, sorpassando successivamente tutti i punti 1, 2, 3, . . ., oppure tenderà alla posizione limite Q_2, sorpassando successivamente tutti i punti — 1, — 2, — 3, . . . Per quel mobile la linea è infinita: sono all'infinito i punti Q_1, Q_2 e sono al di là di questi punti, al transfinito, tutti i punti interni a quell'arco $Q_1 Q_2$, che non passa per O. Il mobile però, non potendo raggiungere nè Q_1 nè Q_2, ed essendo anzi sempre separato da essi per archi infiniti, non può constatare se la linea sia aperta o chiusa; come pure, se chiusa, non può constatare se sianvi due od un solo punto limite del suo moto possibile; nè, quando sian due i punti all'infinito, se questi punti sian termini della linea oppure questa abbia altri punti, al transfinito. Le stesse cose si potevan dire nel 2° caso.

Quando sopra una linea sia sempre praticamente possibile il movimento nei due sensi e non si possa ritornare al punto di partenza senza mutar verso almeno una volta, sono quindi ugualmente logiche le ipotesi che la linea sia aperta o chiusa, che non abbia punti all'infinito o n'abbia uno o due, che abbia o non abbia transfinito.

Dall'osservazione pratica, che s'estende solo ai segmenti

della retta e ad intervalli finiti di tempo, non può dunque scaturire come necessità logica l'essenza della retta completa.

2. Birapporti. — Supponiamo che esista corrispondenza biunivoca continua tra un insieme di punti ed uno di numeri. Per quanto diremo non abbiamo affatto bisogno di sapere come siasi stabilita quella corrispondenza; ci basta di ammetterla, e l'ammettiamo: non abbiamo neppur bisogno di sapere come sia costituito l'insieme dei punti, nè se l'esistenza di questi sia concreta od ideale.

Diremo *precoordinata* d'un punto qualunque il numero corrispondente: e, se a, b, c, d sono le precoordinate dei punti A, B, C, D, diremo che

$$\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}$$

è il *rapporto anarmonico*, o birapporto, dei quattro numeri a, b, c, d nell'ordine in cui ora furon nominati, o dei quattro punti A, B, C, D nel sistema di precoordinate adottato; e, seguendo l'uso, l'indicheremo con (A, B, C, D), o con (a, b, c, d). Si riconosce immediatamente che i birapporti sono invarianti per le trasformazioni lineari, cioè che:

$$(abcd) = \left(\frac{ma+n}{pa+q}\ \frac{mb+n}{pb+q}\ \frac{mc+n}{pc+q}\ \frac{md+n}{pd+q}\right).$$

Se x è precoordinata di X ed $x = x_1 : x_2$, diremo che x_1 ed x_2, o meglio ρx_1 e ρx_2 con ρ arbitraria, son *precoordinate omogenee* di X.

Siano ora U e V due punti distinti, cioè di precoordinate u e v differenti, cosicchè, se $u = u_1 : u_2$ e $v = v_1 : v_2$, $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$. Se A è un altro punto dell'insieme ed a è la sua precoordinata ed

$$a = a_1 : a_2 \qquad \begin{matrix} a_1 = u_1\alpha_1 + v_1\alpha_2 \\ a_2 = u_2\alpha_1 + v_2\alpha_2 \end{matrix} \qquad \alpha = \alpha_1 : \alpha_2\,,$$

il punto A è determinato dal valore di α come da quello di a, perchè essendo conosciuti u_1, u_2, v_1 e v_2, s'ottiene subito, e linearmente, α, se è dato a, e viceversa. Diremo quindi che α è

coordinata e α_1, α_2 sono *coordinate omogenee* di A, relativamente ai *punti base* U, V ed all'assunto sistema di precoordinate. Le coordinate dei punti base U, V son quindi ∞, O.

Dalle precedenti equazioni si rileva immediatamente che, se u_1, u_2, v_1, v_2 sono reali, a ed α sono od entrambi reali od imaginarii entrambi; ed, in questo caso, la coordinata α, se non diviene imaginaria, muta segno allora e solo allora che A passa da un lato all'altro d'uno dei due punti U e V, perchè

$$\alpha = \frac{v_2}{u_2} \frac{a - v}{u - a}.$$

E, perchè la relazione tra precoordinata e coordinata è lineare, si ha che: *Il rapporto anarmonico delle coordinate di quattro punti è uguale a quello delle precoordinate, per cui è indipendente dai punti base.*

Per maggior chiarezza abbiamo distinte le precoordinate dalle coordinate; ma un sistema di coordinate può, a sua volta, prendersi per sistema di precoordinate, e le precoordinate possono rendersi coordinate, mutando il sistema di precoordinate: perciò, nel seguito, conserveremo l'accennata distinzione solamente quando potrà ancora giovare alla chiarezza.

Se si considera uno spazio ad $n - 1$ dimensioni e

$$z_1 = x_1 + \lambda y_1, \quad z_2 = x_2 + \lambda y_2, \quad \ldots, \quad z_n = x_n + \lambda y_n,$$

allora per birapporto di quattro punti (Z) della retta (xy) si potrà intendere quello dei quattro corrispondenti valori del parametro λ.

Le precedenti formule di trasformazione si possono ancora considerare come quelle d'un movimento dell'insieme di punti, convenendo per es. che α sia precoordinata del punto dove deve andare quello di precoordinata a.

3. Misurazioni. — Consideriamo il piano ed a sistema di precoordinate adottiamo quello di Gauss; avremo così corrispondenza biunivoca tra i punti del piano ed i numeri complessi. Una trasformazione, che rimetta il piano su sè stesso, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano, la quale consiste nella sovrapposizione dei punti corrispondenti; perciò

la trasformazione (se è algebrica, come supporremo) è lineare, per cui non altera i birapporti.

Supponiamo che, nel piano, sian dati due punti P ed M, cioè che ne sian date le precoordinate p ed m. Una relazione, che dipenda soltanto dalle posizioni relative di P ed M e quindi soltanto da quella di M dopo che sia fissata quella di P, cioè soltanto da m dopo che p sia data, sarà una funzione di m, dopo che sia data p; ma, se sono fissati ancora i punti Q ed R, cioè sono date le loro precoordinate q ed r, ed

$$(m\,q\,p\,r) = k,$$

allora è indifferente dare m o k, perchè questi due numeri esprimonsi linearmente l'uno per mezzo dell'altro, per cui è ancora indifferente considerare le funzioni di m o quelle di k. Si ha dunque che: *Una relazione, che dipenda soltanto dalle posizioni relative di M e P, è funzione del birapporto della coppia M, P con una di punti fissi.* E da quanto precede segue che, inversamente, siffatte funzioni non sono alterate dalle trasformazioni, che rimettono il piano su sè stesso, cioè che *sono invarianti per le traslazioni, rotazioni e riflessioni del piano in sè.*

Le funzioni invarianti per le trasformazioni lineari, che non spostino i punti fondamentali (punti all'infinito), se sian relative ai punti P ed M, le diremo misurazioni della coppia di punti P, M, o semplicemente di PM.

Noi, ora, ci occuperemo delle misurazioni, che soddisfano la proprietà addittiva, di quelle cioè per le quali

$$\text{misuraz. LM} + \text{misuraz. MN} = \text{misuraz. LN},$$

da cui segue che

$$\text{misuraz. LN} - \text{misuraz. LM} = \text{misuraz. MN}.$$

Quelle misurazioni, continue, che soddisfano la proprietà additiva, le diremo brevemente *misure*. Una misura di MN la indicheremo, generalmente, con (MN).

4. Misure paraboliche, o speciali. — Si ha che

$$(mqnr) = \frac{(m-n)(q-r)}{(q-n)(m-r)}, \quad (mq\infty r) = \frac{q-r}{m-r}, \quad (\infty qnr) = \frac{q-r}{q-n}.$$

Siano M, Q, N, R, W i punti di coordinate m, q, n, r, ∞; siano

fissi Q ed R; e si definisca una misurazione per mezzo dell'equazione

$$\text{misuraz. MN} = f\left(\frac{1}{q-r}(mqnr)\right),$$

che debba valere per qualsiasi coppia di punti MN. Si ha, allora che

$$\text{misuraz. MN} = f\left(\frac{m-n}{(q-n)(m-r)}\right)$$

$$\text{misuraz. MW} = f\left(\frac{1}{m-r}\right) \qquad \text{misuraz. WN} = f\left(\frac{1}{q-n}\right).$$

Facciamo coincidere i punti fondamentali Q ed R; e vediamo, poi, se sia possibile fissare la funzione f in modo d'avere una misura. Se

$$(\text{MN}) = f\left(\frac{n-m}{(m-r)(n-r)}\right),$$

per la proprietà addittiva delle misure, per cui $(\text{MW}) + (\text{WN}) = (\text{MN})$, si ha che

$$f\left(\frac{1}{m-r}\right) + f\left(\frac{1}{r-n}\right) = f\left(\frac{n-m}{(m-r)(n-r)}\right).$$

La funzione f deve dunque soddisfare l'equazione funzionale

$$f(x) + f(y) = f(x+y).$$

Supponendo nullo y, si trova che

$$f(0) = 0, \qquad \text{cioè} \qquad (\text{MM}) = 0.$$

Ponendo prima x e poi $(m-1)x$ in luogo di y, trovasi, per induzione, che

$$f(mx) = mf(x),$$

per cui

$$nf\left(\frac{m}{n}x\right) = f(mx) = mf(x),$$

da cui deducesi che

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x).$$

Se α è un numero irrazionale, si può formare una successione di numeri razionali, $a_1 a_2 \ldots a_n, \ldots$, che tenda ad α. Per ogni n

$$f(a_n x) = a_n f(x),$$

epperò, per la continuità di $f(x)$,

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Questa relazione sussiste dunque per ogni valor reale di α. Dividendo per αx e ponendo poi y per αx, trovasi che

$$\frac{f(y)}{y} = \frac{f(x)}{x} = \text{cost},$$

per cui

$$f(x) = ax.$$

La definizione generale dei sistemi di misura ad unico punto fondamentale è dunque data dall'equazione seguente:

$$(\mathrm{MN}) = a \frac{n-m}{(n-r)(m-r)} = a\left(\frac{1}{m-r} - \frac{1}{n-r}\right),$$

dove r è coordinata del punto fondamentale ed a è costante arbitraria.

È facile riconoscere che $\frac{1}{m-r} - \frac{1}{n-r}$ è effettivamente invariante per le trasformazioni lineari, che non spostano il punto fondamentale r, ciò che può già desumersi dal modo in cui si pervenne a quest'espressione e da quanto fu detto relativamente ai birapporti.

Se la trasformazione lineare, oppure movimento, ha per equazione

$$x' = \frac{dx+b}{cx+g},$$

allora

$$m' - r' = \frac{dm+b}{cm+g} - \frac{dr+b}{cr+g} = \frac{(dg-bc)(m-r)}{(cr+g)(cm+g)}, \; n' - r' = \ldots,$$

per cui

$$\frac{1}{m'-r'} - \frac{1}{n'-r'} = \frac{(cr+g)^2}{(dg-bc)} \frac{n-m}{(m-r)(n-r)}.$$

Ora, per la coincidenza ed invarianza dei punti fondamentali,

$$r' = r = \frac{dr+b}{cr+g}, \; (d-g)^2 + 4bc = 0,$$

onde

$$r = \frac{d-g}{2c}, \quad \frac{(cr+g)^2}{dg-bc} = 1.$$

Resta così provato che

$$\frac{1}{m'-r'} - \frac{1}{n'-r'} = \frac{1}{m-r} - \frac{1}{n-r}.$$

Se la precedente espressione di misura fosse scomoda, per es. se $r=\infty$, si potrebbe rimediare facilmente mediante una trasformazione di coordinate. Si può anche ridurre l'espressione ad altra forma:

Fissando r_2, la qual cosa si può fare perchè il punto fondamentale non dev'essere spostato ed anche perchè una delle due coordinate omogenee si può fissare arbitrariamente, ed indicando con k la costante ar_2^2, si ha che:

$$(\mathrm{MN}) = k \frac{n_1m_2 - n_2m_1}{(n_1r_2 - n_2r_1)(m_1r_2 - m_2r_1)},$$

per cui, se

$$r_x = r_2x_1 - r_1x_2 \qquad s_x = s_2x_1 - s_1x_2$$

e le costanti s_1, s_2 sono fissate in modo che

$$r_2s_1 - r_1s_2 = 1,$$

allora

$$(\mathrm{MN}) = k\left(\frac{s_n}{r_n} - \frac{s_m}{r_m}\right).$$

Con procedimento già usato, si può vedere ancora che le trasformazioni lineari, che non spostano il punto fondamentale $r_x=0$, non alterano la precedente espressione di (MN), perchè, se trasformano r_x in ρr_x, trasformano s_x in $\rho s_x + \sigma r_x$.

Si riconosce subito che

$$\frac{s_n}{r_n} = \left(\frac{n_1}{n_2}, \frac{s_1-r_1}{s_2-r_2}, \frac{s_1}{s_2}, \frac{r_1}{r_2}\right)$$

cioè che: La misura dal punto $s_x=0$ al punto n, cioè dal punto di coordinata soddisfacente l'equazione $s_x=0$ a quello di coordinata n, è il prodotto della costante k per il birapporto dei quattro punti n, $s_x=r_x$, $s_x=0$, $r_x=0$.

5. Misure ellittiche ed iperboliche, o generali. — Se

$$(MN) = f(mnrs),$$

si faccia una trasformazione lineare, che porti r ed s in ∞ e 0. Se μ, ν sono le coordinate prese da M ed N,

$$(MN) = f(\mu\nu\infty 0) = f\left(\frac{\nu}{\mu}\right),$$

e, per la proprietà additiva, per cui $(MN) + (NL) = (ML)$,

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) + f\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) = f\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

La funzione f soddisfa dunque l'equazione funzionale

$$f(x) + f(y) = f(xy).$$

Ponendo 1 per y, si trova che

$$f(1) = 0, \text{ cioè che } (MM) = 0.$$

Ponendo prima x e poi x^{m-1} per y, trovasi con induzione, che

$$f(x^m) = mf(x),$$

per cui

$$nf\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = f\left(x^{n\frac{m}{n}}\right) = f(x^m) = mf(x)$$

onde

$$f\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n} f(x).$$

Se α è un numero irrazionale ed $a_1\, a_2 \dots a_n \dots$ è una successione tendente ad α, per la continuità $f(\lim x^{a_n}) = \lim f(x^{a_n}) = \lim a_n f(x)$, cioè

$$f(x^\alpha) = \alpha f(x).$$

Questa relazione sussiste dunque per ogni valor reale di x, onde

$$x^{f(x^\alpha)} = x^{\alpha f(x)}.$$

Ponendo y per x^α, si deduce che

$$x^{\frac{1}{f(x)}} = y^{\frac{1}{f(y)}} = \text{cost}$$

epperò

$$f(x) = {}^a\log x = k \log x.$$

La definizione generale dei sistemi di misura a due punti fondamentali è dunque data dall'equazione

$$(MN) = k \log (MNRS) = k \log \frac{(m-r)(n-s)}{(n-r)(m-s)};$$

dove k è costante arbitraria ed R, S sono i punti fondamentali: se questi hanno per coordinate ∞ e 0 quando le coordinate di M ed N sono μ e ν, allora (v. num. 2)

$$(MN) = k \log \frac{\nu}{\mu}\cdot$$

Se

$$\Omega xx = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = x_2^2\Omega(x),$$

e le coordinate dei punti fondamentali sono date dall'equazione

$$\Omega xx = 0,$$

allora, se si prendono per punti base M ed N, le coordinate dei punti fondamentali vengono ad esser radici dell'equazione

$$a(u_1m_1+u_2n_1)^2 + 2b(u_1m_1+u_2n_1)(u_1m_2+u_2n_2)+c(u_1m_2+u_2n_2)^2=0,$$

cioè di

$$\Omega_{mm}u^2 + 2\Omega_{mn}u + \Omega_{nn} = 0$$

dove

$$\Omega_{mn} = am_1n_1 + b(m_1n_2 + m_2n_1) + cm_2n_2.$$

Indicando dette radici con u' ed u'', si ha così (v. num. 2)

$$(MN) = k \log(\infty 0 u'u'') = k \log \frac{u''}{u'},$$

per cui, potendo fissar liberamente il segno del radicale, nelle radici, possiam porre che

$$(MN) = k \log \frac{\Omega_{mn} + \sqrt{\Omega^2_{mn} - \Omega_{mm}\Omega_{nn}}}{\Omega_{mn} - \sqrt{\Omega^2_{mn} - \Omega_{mm}\Omega_{nn}}}.$$

Se

$$\log a = 2\,i \arccos b,$$

allora

$$a = e^{2i\arccos b} = e^{i\arccos b} : e^{-i\arccos b} = \frac{b + i\sqrt{1-b^2}}{b - i\sqrt{1-b^2}},$$

per cui

$$b = (a+1) : 2\sqrt{a}.$$

Se $a = (\alpha + \beta) : (\alpha - \beta)$, si riconosce così che

$$\log \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = 2 i \arccos \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}.$$

Si ha per ciò che

$$(MN) = 2 k i \arccos \frac{\Omega_{mn}}{\sqrt{\Omega_{mm} \Omega_{nn}}} = 2 k i \operatorname{arc tg} \frac{\sqrt{\Omega_{mm} \Omega_{nn} - \Omega^2_{mn}}}{\Omega_{mn}} (*).$$

Si riconosce subito che la precedente espressione di (MN) è effettivamente invariante per le trasformazioni lineari, che non spostino i punti fondamentali. Se infatti una trasformazione lineare muta m, n, Ω_{xx} in $m', n', \rho \Omega_{x'x'}$, dove ρ sia una costante, allora (v. num. 2, 3)

$$(MN)' = k \log \frac{\Omega_{m'n'} + \sqrt{\Omega^2_{m'n'} - \Omega_{m'm'} \Omega_{n'n'}}}{\Omega_{m'n'} - \sqrt{\Omega^2_{m'n'} - \Omega_{m'm'} \Omega_{n'n'}}} = (MNRS) = (MN).$$

6. Metrica parabolica. — Definiamo la misura con la formula del num. 4

$$(MN) = k \frac{n_1 m_2 - n_2 m_1}{(n_1 r_2 - n_2 r_1)(m_1 r_2 - m_2 r_1)}.$$

Se $r \neq \infty$, facendo $r_2 = 1$, si ha che

$$(MN) = k \frac{n - m}{(n - r)(m - r)} = k \left(\frac{1}{m - r} - \frac{1}{n - r} \right):$$

se ρ e σ sono le lunghezze ordinarie dei segmenti RM, RN ed α, β sono gli angoli, che i raggi RM, RN formano con la direzione positiva dell'asse delle x, allora

$$(MN) = k \left(\frac{1}{\rho} e^{-i\alpha} - \frac{1}{\sigma} e^{-i\beta} \right) = k \left[\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} - \frac{\cos\beta}{\sigma} \right) - i \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\beta}{\sigma} \right) \right].$$

Se la *costante metrica* k è reale, perchè sia reale (MN) è dunque necessario e sufficiente che sia nulla $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\beta}{\sigma}$, cioè che M ed N siano sopra una circonferenza tangente all'asse delle x nel punto fondamentale R.

Se $r = \infty$, cioè se $r_2 = 0$, si possono fare uguali ad 1 r_1, m_2 ed n_2, e s'ha così

$$(MN) = k(m - n),$$

(*) Klein deduce di qui la formula per la misura parabolica, ottenuta da noi direttamente al num. 4.

cosicchè, perchè (MN) sia reale, è necessario e sufficiente che sian uguali i termini imaginarii di m ed n, cioè che la retta MN sia parallela, nel senso euclideo, all'asse reale, ossia che lo tocchi in R. Il caso di r infinito si poteva trascurare, perchè, mediante trasformazione lineare, si può sempre fare in modo che il punto fondamentale abbia coordinata finita.

Abbiamo così che: *La misura parabolica d'una coppia di punti è reale quando e solo quando i due punti sono sopra una circonferenza tangente all'asse delle x nel punto fondamentale,* ciò, ben inteso, nel caso che la metrica parabolica sia interpretata nel piano e come fu fatto qui.

7. Metrica iperbolica. — Se a, b, c sono reali e

$$b^2 - ac > 0,$$

e si definisce la misura con la formula del num. 5.

$$(MN) = k \log \frac{\Omega_{mn} + \sqrt{\Omega^2_{mn} - \Omega_{mm}\,\Omega_{nn}}}{\Omega_{mn} - \sqrt{\Omega^2_{mn} - \Omega_{mm}\,\Omega_{nn}}},$$

i due punti fondamentali son reali e la metrica si dice iperbolica. E, per quanto s'è detto al num. 5,

$$(MN) = k \log (MNRS) = k \log \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_{r,s} = k \log \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)_{m,n},$$

dove $\left(\frac{\nu}{\mu}\right)_{r,s}$ indica il rapporto delle coordinate, che hanno N ed M quando son punti base R ed S, ed analogo significato ha $\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)_{m,n}$.

Affinchè sian reali le misure delle coppie di punti reali accessibili, bisogna (v. num. 2) che *la costante metrica sia reale:* indichiamo dunque con c una costante reale e poniamo c per k.

Indicando con $\rho, \sigma, \rho', \sigma'$ le lunghezze ordinarie dei segmenti RM, RN, SM, SN e con $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ gli angoli, che i raggi RM, RN, SM, SN formano con la direzione positiva dell'asse reale, si ha che:

$$(MNRS) = \frac{\rho e^{i\alpha}}{\sigma e^{i\beta}} : \frac{\rho' e^{i\alpha'}}{\sigma' e^{i\beta'}},$$

per cui

$$(MN) = c \log \frac{\rho\sigma'}{\rho'\sigma}\, e^{i[(\alpha-\alpha')-(\beta-\beta')]}.$$

Perchè (MN) *sia reale è quindi necessario e sufficiente* che siano uguali gli angoli RMS ed RNS, cioè *che M ed N siano sopra un circolo passante pei punti fondamentali* R, S *e*, su tal circolo, *non sian separati da questi punti.*

8. Metrica ellittica. — Se a, b, c sono reali e

$$b^2 - ac < 0,$$

e si definisce la misura con la formula del num. 5 richiamata nel num. precedente, *i punti fondamentali son numeri complessi coniugati*, e la metrica dicesi ellittica. Affinchè sian reali le misure delle coppie di punti reali, bisogna che *la costante metrica* k *sia imaginaria pura*: Se c_1 è costante reale e $k = c_1 i$, dalla formula (v. num. 7)

$$(\mathrm{MN}) = c_1 i \log \frac{\rho\sigma'}{\rho'\sigma} e^{i(\alpha+\beta'-\alpha'-\beta)}$$

si riconosce che: *La misura ellittica d'una coppia di punti è reale quando e solo quando i due punti si trovano sopra uno stesso circolo d'*Apollonio *dei due punti fondamentali.*

I circoli d'Apollonio dei punti fondamentali, ed uno d'essi è l'asse reale, hanno tutti la stessa lunghezza finita $2\pi c_1$, nella considerata metrica ellittica, perchè (*)

$$(\mathrm{MM}) = c_1 i \log 1 \equiv 0 \pmod{2\pi c_1}.$$

9. Curvatura. — Si dice che due sistemi di misura, o sistemi metrici o metriche, hanno un contatto, od una tangenza, in M, se le misure della coppia MN di punti nelle due metriche tendono ad essere uguali col tendere di N ad M. Se due sistemi metrici sono fra loro tangenti in un punto ed uno è parabolico, seguendo sostanzialmente Klein, diremo misura della curvatura dell'altro sistema in tal punto il risultato, che s'ottiene, se si

(*) La misura d'una coppia di punti è puramente imaginaria se i due punti, per metrica parabolica, sian su circolo tangente nel punto fondamentale a parallela all'asse imaginario; e sian su circolo d'Apollonio dei punti fondamentali per metrica iperbolica, e su arco circolare congiungente i punti fondamentali per metrica ellittica. Si può così dire che la moltiplicazione per i della costante scambia le metriche iperbolica ed ellittica, mentre lascia quale è la metrica parabolica.

calcolano le misure d'un segmento infinitesimo uscente dal punto di contatto, così nel sistema metrico parabolico come nell'altro sistema e dividesi il triplo della differenza delle due misure pel cubo della misura parabolica.

Con le precedenti notazioni, se $\Delta = b^2 - ac$, allora

$$\Omega^2_{mn} - \Omega_{mm}\Omega_{nn} = \Delta(m_1 n_2 - m_2 n_1),$$

per cui

$$((\mathrm{MN})) = k \log \left[\left(1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega(m,n)}(m-n)\right) : \left(1 - \frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega(m,n)}(m-n)\right)\right] =$$

$$= k\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega(m,n)}(m-n) + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega(m,n)}(m-n)\right)^3 + \ldots\right]$$

dove

$$\Omega(m,n) = amn + b(m+n) + c.$$

Si vede immediatamente che, se

$$(\mathrm{MN}) = k\frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega(m)}(m-n),$$

la misura iperbolica od ellittica, ((MN)) e la parabolica (MN) si riferiscono a metriche tangenti fra loro in M. Ora,

$$\lim_{\mathrm{N}\sim\mathrm{M}} 3\,\frac{(\mathrm{MN}) - ((\mathrm{MN}))}{(\mathrm{MN})^3} = -\frac{1}{k^2}:$$

le curvature delle metriche iperboliche ed ellittiche son quindi, rispettivamente, $-\frac{1}{c^2}$ ed $\frac{1}{c_1^{\,2}}$: e la curvatura della metrica parabolica è nulla, per la definizione data di curvatura (*).

I sistemi metrici iperbolico, parabolico ed ellittico sono dunque a curvatura costante: e la curvatura è negativa, nulla o positiva secondo che il sistema metrico è iperbolico, parabolico od ellittico.

Se r ed s sono radici dell'equazione $\Omega(x) = 0$, $r - s = 2\sqrt{\Delta} : a$, per cui

$$(\mathrm{RS}) = \frac{2k\Delta}{a\Omega(m)}.$$

(*) Klein, dopo d'aver estese al piano le tre specie di metriche, dimostra la coincidenza della sua definizione di curvatura con quella di Gauss (e quindi con quella di Riemann: V. p. es. Beltrami, "Ann. di Mat.", S. II, t. II, 1868-69, pag. 244).

Si ha quindi che

$$4k^2 = (\mathrm{RS})^2,$$

se $\Omega(m) + \frac{\Delta}{a} = 0$, cioè se

$$am^2 + 2bm + \frac{b^2}{a} = 0.$$

Di qui si ricava

$$m = -\frac{b}{a} = \frac{r+s}{2}.$$

In questo caso, il punto di contatto, $\frac{1}{2}(r+s)$, ed il punto fondamentale, ∞, della metrica parabolica sono coniugati armonicamente rispetto ai punti fondamentali, r ed s, dell'altra metrica; e, quando ciò si verifichi, diremo che il contatto è centrale. Perciò, e perchè (v. num. 2) i birapporti sono invarianti per le trasformazioni lineari, si ha quindi che: Il prodotto di -1 per la curvatura di un sistema metrico è inverso del quadrato della metà della distanza (misura) parabolica dei due punti fondamentali, quando il contatto è centrale. KLEIN non dà vera definizione della tangenza; considera caso speciale, tuttavia osserva che il punto di contatto forma (sempre) una divisione armonica coi punti fondamentali delle due metriche (v. traduz. francese della mem. del 1871, num. VII, pag. 26).

Da quanto fu detto qui si rileva che: quando sia stabilita una metrica iperbolica od ellittica, si può fissare un punto e stabilire una metrica parabolica in modo che in quel punto, su ogni retta, siavi contatto centrale delle due metriche. L'assoluto della metrica generale è allora una sfera della metrica speciale, con centro nel punto di contatto e la curvatura totale, cambiata di segno, di questa sfera è curvatura della metrica generale: ciò giustifica la denominazione di spazii di curvatura costante data alle tre specie di metriche considerate.

10. Notizie e considerazioni. — Con quanto precede ho inteso soltanto di chiarire alcuni punti fondamentali, che non sono svolti nè con sufficiente chiarezza nè completamente neppure nelle pubblicazioni di maggior mole o pregio; perciò credo opportune le seguenti indicazioni; i lavori indicati completeranno le notizie bibliografiche per coloro che volessero consul-

tare le memorie e le opere più importanti sulla geometria generale. Nella geometria elementare, *l'angolo di due rette è uguale al logaritmo moltiplicato per* $\frac{i}{2}$ *del rapporto anarmonico che queste rette formano con le due, che dal punto d'intersezione delle due prime vanno ai punti ciclici imaginarii* (*): e *la distanza di due punti* A, B (presa in un senso conveniente) *è uguale al rapporto anarmonico che formano, con questi punti, il punto all'infinito ed il punto distante 1 da* B (**).

Le specie di geometrie a curvatura costante, o ad *infinito quadratico* come le disse D'Ovidio (***), cioè le geometrie parabolica, ellittica ed iperbolica diconsi anche *geometria piana,* od a curvatura nulla, *geometria sferica,* od a curvatura positiva, e geometria *pseudosferica,* od a curvatura negativa. Il primo ad osservare che la geometria iperbolica ha una interpretazione elementare sulla pseudosfera fu Beltrami (****). La geometria iperbolica può interpretarsi elementarmente anche su altre superficie, oltre che sulla pseudosfera (*****). Parimenti la geometria ellittica può avere diverse interpretazioni elementari: secondo Klein (******) per es. la stella di raggi e piani ne è la più semplice interpretazione.

La somma degli angoli d'un triangolo geodetico è maggiore, uguale o minore di due retti, secondo che la geometria è sferica, piana o pseudosferica (*******).

Per le formule trigonometriche, oltre delle considerazioni di Klein (traduz. francese della memoria del 1871, num. XII,

---

(*) Clebsch-Lindemann, *Leçons sur la géométrie*, Paris 1879 (traduites par Benoist), pag. 185, tome premier.

(**) Clebsch-Lindemann, l. c., pag. 187.

(***) D'Ovidio, *Le funzioni metriche fondamentali negli spazii di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante,* " Atti R. Acc. Lincei „, Vol. I, serie 3ª, 1877, pag. 950.

(****) Beltrami, *Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea,* " Giornale di Battaglini „, VI, 1868: V. anche " Ann. di Mat. „, 2ª, II pag. 253.

(*****) V. Bianchi, *Geom. diff.*, pag. 184. — Cesàro, *Geom. int.*, pag. 178.

(******) Klein, " Math. Ann. „, VI, 1873, pag. 125 *(Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie).*

(*******) V. Bianchi, *Geom. diff.*, pag. 170. — Cesàro, *Geom. int.*, pag. 169. — V. ancora Bianchi, *Geom. diff.,* pag. 407. — Gauss's Werke, IV Bd., pag. 246.

pag. 45), si può vedere per es. ROUCHÉ e COMBEROUSSE: *Traité de Géométrie*, II, 1891, pagg. 583-593.

Il prof. BELTRAMI dimostrò, la prima volta, nel 1866 (*Ann. di Mat.*, VII) che le superficie a geodetiche rappresentabili con equazioni lineari, mediante convenienti variabili, sono quelle a curvatura costante: più tardi (*) giunse ad analogo risultato per spazii ad un qualsiasi numero di dimensioni.

Da quanto fu detto nel precedente numero s'intuisce già che la flessione non può modificare la curvatura: e sono, in vero, applicabili l'una sull'altra due superficie di curvatura uguale (**).

Per l'intuizione geometrica è molto utile la considerazione dei movimenti (***), che condusse a notevoli risultati per es. CLIFFORD e LIE.

Per la trattazione analitica della geometria proiettiva degli spazii di curvatura costante si può vedere, oltre dell'originale memoria di CAYLEY, la memoria del D'OVIDIO del 1877, già citata.

Per la trattazione differenziale, oltre della citata *Teoria fondamentale* del BELTRAMI, si possono vedere: GAUSS, *Disquisitiones generales circa superficias curvas,* Werke, IV, pag. 219-258; RIEMANN, *Ueber die hypothesen, welche der Geometrie zu grunde liegen,* Werke, pag. 272-286.

Per altre indicazioni bibliografiche si possono consultare le note pubblicazioni storico-bibliografiche ed i lavori speciali (****).

(*) BELTRAMI, *Teoria fondam. degli spazii di curvatura costante,* " Ann. di Mat. ", serie II, tomo II, 1868-69, pag. 234.

(**) V. p. es. BIANCHI, *Geom. diff.*, pag. 179; e " R. Acc. dei Lincei ", 1898, CESÀRO, *Geom. intrinseca,* pag. 170 e 179. — GAUSS's Wercke, IV, pag. 237.

(***) V. p. es. KLEIN, *Consideraz. comparative intorno a ricerche geom. moderne: programma...,* " Ann. di Mat. ", II, XVII, 1889-90; traduzione di G. Fano.

(****) V. p. es. VERONESE, *Fondamenti di geometria,* e specialmente l'Appendice, pag. 565-625. Padova, Tip. del Sem., 1891. — LAUGEL, *Aggiunte alla traduz. del " The Evanston Colloquium " di Klein,* Paris, edit. A. Hermann, 1898, pag. 121. — E. BONOLA, *Bibl. sui fondam. della geom. in relaz. alla geom. non euclidea,* " Boll. di Bibliografia e storia delle scienze mat. ", pubblicato per cura di G. LORIA, edit. C. Clausen, gennaio-marzo 1899 (pag. 2 a 10). Vi è pure una recensione di G. FANO dell'*Einführung in die grundlagen der geometrie* di KILLING; in quest'opera sono presi in considerazione tutti i più importanti lavori comparsi, anche recentemente, sulla geometria non euclidea.

La curvatura d'una varietà dipende dal concetto d'assoluto, cosicchè, idealmente, un qualsiasi spazio non è nè parabolico, nè ellittico, nè iperbolico: diverrà uno di questi spazii solo dopo l'attribuzione di precoordinate ai punti presi in considerazione e la fissazione d'assoluto quadratico, il quale limiterà la parte presa in considerazione, per cui la varietà intera potrà anche aver transfinito. Se per esempio si considerano un piano, una sfera ed una pseudosfera (o se ne considerano tre pezzi), si potranno stabilire corrispondenze biunivoche tra i punti di ognuna di tali superficie e quelli d'un medesimo pezzo di piano, il quale quindi potrà considerarsi come imagine del piano o della sfera o della pseudosfera, cosicchè potrà acquistarne le relative geometrie.

Generalmente, se S è uno spazio di n dimensioni, la sua geometria consiste nello studio di relazioni, che sono espresse da corrispondenti relazioni tra coordinate: essa geometria riducesi quindi allo studio d'un insieme di numeri n-arii, ogni punto essendo rappresentato dal complesso delle sue n coordinate; cosicchè se ne potrebbe fare una trattazione puramente analitica. Se, possibilmente, non si fa astrazione dello spazio, è per non rinunciare alla intuizione geometrica, che può riuscire di grande aiuto anche per lo sviluppo dei procedimenti analitici. Lo spazio S può quindi anche venir sostituito, astrattamente, da un altro spazio T qualsiasi, purchè questo e quello abbiano lo stesso numero di dimensioni: in questo caso infatti, come è noto per Cantor e Netto, si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti di S e quelli di T, la quale sia pure continua; per cui, attribuendo uguali coordinate ai punti corrispondenti, si potrà ottenere, che le geometrie di S e di T abbiano una comune trattazione analitica, consistente in un'unica geometria astratta, dove il punto non è che un complesso numerico. Le diversità si presentano però, e possono esser gravi, quando si passa dall'astratto al concreto, perchè i risultati analitici hanno un significato diverso per i due spazii concreti, cosicchè l'interpretazione dei medesimi può presentare per uno delle difficoltà molto maggiori, che non ne presenti per l'altro; ed appunto per questo la geometria d'uno spazio può talvolta semplificarsi mediante rappresentazione su d'un altro spazio, che sia di più facile intuizione.

Ed ora che abbiamo date le indicazioni, che ci parvero più adatte ad agevolare la via a chi voglia conoscere quanto si è fatto relativamente agli spazii di costante curvatura, passiamo a collegare le formule generali con quelle, che abbiamo date, in altri lavori, per la trattazione analitica della geometria ordinaria (*).

11. Misura di spazii generali. — Consideriamo uno spazio di $n-1$ dimensioni ed indichiamo con $x_1, \ldots, x_n$ le coordinate del suo punto X, che indicheremo pure con $(x_1, \ldots, x_n)$ e, più semplicemente, con (x). Se

$$\begin{vmatrix} x'_1 & \ldots & x'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

si dice piano, determinato dagli $n-1$ punti $(x'), \ldots, (x^{(n-1)})$ il luogo dei punti di coordinate soddisfacenti l'equazione

$$\begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ x'_1 & \ldots & x'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

E se, sviluppando il determinante primo membro secondo gli elementi della prima orizzontale, quest'equazione diviene

$$v_1 x_1 + \ldots + v_n x_n = 0,$$

allora si dice che $v_1, \ldots, v_n$ sono le coordinate omogenee del piano, che indicheremo con $(v_1, \ldots, v_n)$ o con (v) o con V.

Se $f(x_1, \ldots, x_n)$ ed $F(v_1, \ldots, v_n)$ sono due forme quadratiche reciproche,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad \text{ed} \qquad F(v_1, \ldots, v_n) = 0$$

(*) V. *Introduzione alle coordinate triangolari e tetraedriche,* " Rend. Circ. Mat. di Palermo, 1898 (nel seguito sarà richiamata con l'indicazione I). — *Perpendicolarità e parallelismo in coordinate omogenee,* " R. Acc. delle Scienze di Torino ", 1899 (nel seguito sarà richiamata con l'indicazione II).

sono equazioni della stessa quadrica, come luogo di punti e come inviluppo di piani. Prendiamo questa quadrica per assoluto. Per estendere le considerazioni precedenti, prendendo per punti (elementi) una volta i punti X ed una volta i piani V, convien porre queste definizioni: *Si dice distanza di due punti X, Y il prodotto d'una costante per il logaritmo del rapporto anarmonico della coppia di punti X, Y con quella dei punti comuni all'assoluto,* $f(x)=0$, *ed al bipunto* $(x)+\lambda(y)$, o retta XY. *Si dice distanza di due piani U, V il prodotto d'una costante per il logaritmo del rapporto anarmonico della coppia di piani U, V con quella dei piani comuni all'assoluto,* $F(v)=0$, *ed al bipiano* $(u)+\lambda(v)$, o fascio UV.

S'ottengono così, per il caso generale, le stesse formule, che s'ottennero per la retta. Affine di darle subito nella forma conveniente per il seguito, delle espressioni del num. 5 adotteremo le due contenenti *arc tg* ed *arc cos* per le due specie di distanze: avremo così che

$$XY = c \arccos \frac{\sqrt{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}}}{f_{xy}}$$

$$\cos UV = c' \frac{F_{uv}}{\sqrt{F_{uu}F_{vv}}}$$

dove c, c' sono costanti ed

$$f_{xx} = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \Sigma x_r \frac{\partial f(x)}{\partial x_r},$$

$$f_{xy} = \frac{1}{2} \Sigma x_r \frac{\partial f(y)}{\partial y_r} = \frac{1}{2} \Sigma y_r \frac{\partial f(x)}{\partial x_r}, \text{ ecc.}$$

Se D_{rs} è il complemento algebrico dell'elemento comune all'orizzontale r^{ma} ed alla verticale s^{ma} del discriminante D di $F(r)$; allora, quando D ha la caratteristica $n-1$,

$$f(x) = (\sqrt{D_{11}}\,x_1 + \ldots + \sqrt{D_{nn}}\,x_n)^2.$$

12. L'assoluto ordinario. — Per la planimetria elementare si possono considerare come coordinate omogenee di punti e di piani (precisamente rette), le triangolari $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e le tripunte v_1, v_2, v_3 (V. I, num. 24) (*), e l'equazione dell'assoluto, inviluppo (V. I, num. 17) è

$$\rho(v) = 0.$$

(*) V. in fine del num. 10, a piè di pagina.

Si può quindi porre che

$$F(v) = 2\rho(v)$$

ed allora

$$D = \begin{vmatrix} 2a_1^2 & -a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & -a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \\ -a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & 2a_2^2 & a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \\ -a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2a_3^2 \end{vmatrix}.$$

La caratteristica di questo determinante è 2 ed i suoi minori principali son tutti uguali a $16\delta^2$; perciò

$$f(\sigma) = 4\delta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

L'assoluto dei punti, per la planimetria ordinaria, riducesi dunque alla retta all'infinito (V. II, num. 1) (*) contata due volte.

L'assoluto $\rho(v_1, v_2, v_3) = 0$ è coppia di punti; e da formule, che abbiamo date in altro lavoro (V. I, num. 26), si rileva immediatamente che questa coppia di punti è comune intersezione di tutte le circonferenze con la retta $v_1 = v_2 = v_3$, cioè con la retta all'infinito $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. *L'assoluto,* ordinario, *del piano è dunque la coppia dei punti d'intersezione d'una qualsiasi circonferenza con la retta all'infinito* (punti ciclici imaginari all'infinito). La sua equazione (V. II, num. 4) si può anche scrivere così

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos A_3 & \frac{u_3 - u_1}{a_2} \\ \cos A_3 & 1 & \frac{u_3 - u_2}{a_1} \\ \frac{u_3 - u_1}{a_2} & \frac{u_3 - u_2}{a_1} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Per la stereometria elementare si possono considerare come coordinate di punti e di piani le tetraedriche T_1, T_2, T_3, T_4, e le quadripunte v_1, v_2, v_3, v_4 (V. I, num. 24); e l'equazione dell'assoluto, inviluppo (V. I, num. 19), è

$$P(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0.$$

(*) V. come sopra.

Si può quindi porre che

$$F(v) = \frac{1}{16} P(v).$$

Se $\frac{1}{2}\beta_{12}$ è il parallelogrammo, che ha per vertici i punti di mezzo dei quattro spigoli $d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}$, un *triangolo notevole* è quello di lati $\beta_{12}, \alpha_1, \alpha_2$; ha gli angoli uguali a quelli che le facce α_1, α_2 formano tra loro e con la giacitura determinata dagli spigoli opposti d_{12}, d_{34}; ha le altezze uguali ai prodotti di $\frac{1}{2}d_{34}$ per la minima distanza di questi spigoli opposti e per le altezze del tetraedro corrispondenti alle facce α_1 ed α_2; e la sua area è $\frac{3}{4}$ del prodotto di d_{34} per il volume del tetraedro. Mediante questo triangolo si riconosce facilmente che (V. I, num. 19 e 8)

$$\frac{1}{16} P(v) = \sum \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_{12}^2}{2} (v_1 - v_2)^2 = \Sigma\, \alpha_1\alpha_2 \cos d_{34} (v_1 - v_2)^2 =$$

$$= \alpha_1^2 v_1^2 + \alpha_2^2 v_2^2 + \alpha_3^2 v_3^2 + \alpha_4^2 v_4^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \cos d_{34} \,.\, v_1 v_2 -$$

$$- 2\alpha_2\alpha_3 \cos d_{41} \,.\, v_2 v_3 - 2\alpha_3\alpha_1 \cos d_{24} \,.\, v_3 v_1 -$$

$$- 2\alpha_1\alpha_4 \cos d_{23} \,.\, v_1 v_4 - 2\alpha_2\alpha_4 \cos d_{13} \,.\, v_2 v_4 - 2\alpha_3\alpha_4 \cos d_{12} \,.\, v_3 v_4,$$

per cui:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & -\alpha_1\alpha_2 \cos d_{34} & -\alpha_1\alpha_3 \cos d_{24} & -\alpha_1\alpha_4 \cos d_{23} \\ -\alpha_1\alpha_2 \cos d_{34} & \alpha_2^2 & -\alpha_2\alpha_3 \cos d_{14} & -\alpha_2\alpha_4 \cos d_{13} \\ -\alpha_1\alpha_3 \cos d_{24} & -\alpha_2\alpha_3 \cos d_{14} & \alpha_3^2 & -\alpha_3\alpha_4 \cos d_{12} \\ -\alpha_1\alpha_4 \cos d_{23} & -\alpha_2\alpha_4 \cos d_{13} & -\alpha_3\alpha_4 \cos d_{12} & \alpha_4^2 \end{vmatrix}.$$

La caratteristica di questo determinante è 3 ed i suoi minori principali sono tutti uguali ad $\frac{81}{4}\Lambda^4$; per ciò

$$f(T) = \frac{9}{2}\Lambda^2 \,.\, (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)^2.$$

L'assoluto dei punti, per la stereometria ordinaria, riducesi dunque al piano all'infinito contato due volte (V. II, num. 1). L'assoluto $P(v) = 0$ è un circolo e, dalle formule date nell'in-

troduzione alle coordinate triangolari e tetraedriche (V. I, n. 26), rilevasi immediatamente che questo circolo è comune intersezione di tutte le sfere col piano $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$, cioè col piano all'infinito $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 0$. *L'assoluto*, ordinario, *dello spazio è dunque la circonferenza intersezione di una qualsiasi sfera col piano all'infinito* (circolo imaginario all'infinito).

Se

$$v_4 - v_1 = x, \quad v_4 - v_2 = y, \quad v_4 - v_3 = z,$$

allora

$$\frac{1}{16} \mathsf{P}(v) = \alpha_1^2 x^2 + \alpha_2^2 y^2 + \alpha_3^2 z^2 - 2\,\alpha_1\alpha_2 xy \cos d_{34} -$$

$$- 2\,\alpha_2\alpha_3 yz \cos d_{14} - 2\,\alpha_3\alpha_1 zx \cos d_{24}.$$

13. Misure ordinarie. — Per la misura degli angoli non v'è nulla da dire. Basta infatti guardare le formule, che abbiamo date per il calcolo dell'angolo di due rette o di due piani (V. II, num. 3, formule (6) e (7)) per vedere che

$$\cos UV = c' \frac{F(u,v)}{\pm\sqrt{F_{uu} F_{vv}}}.$$

V'è solo da osservare che, nella geometria ordinaria, $c' = 1$. Si riconosce pure subito (V. II, num. 4, formule (9) e (10)) che, perchè due rette o due piani, siano perpendicolari fra loro è necessario e sufficiente che siano coniugati rispetto all'assoluto.

Per la distanza di due punti nel piano, si ha che

$$XY = c \operatorname{arc tg} \frac{\sqrt{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}}}{f_{xy}}.$$

L'equazione

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy} = 0$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè la retta XY sia tangente all'assoluto. Osserviamo però che, quando la caratteristica del discriminante D della forma $F(u)$ è $n - 1$, allora, essendo un quadrato f_{xx}, $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}$ è identicamente nulla. Dei coefficienti di $F(u)$, coi quali esprimonsi anche quelli di f_{xx}, esprimiamone uno per mezzo dei rimanenti e del discriminante D: dopo ciò, perchè $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}$ è infinitesimo con D, s'avrà che

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy} = D^h P_{xy}$$

dove h è una costante e P_{xy}, che non s'annulla più con D, è tale che il suo annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè la retta XY sia tangente all'assoluto. Quando D sia infinitesimo potremo sostituire la tangente all'arco, cosicchè, incorporando $\sqrt{D^h}$ con la costante, avremo allora che

$$XY = c\,\frac{\sqrt{P_{xy}}}{f_{xy}}.$$

Per la planimetria ordinaria, potendosi incorporare i fattori costanti con c, si ha quindi che

$$MN = c\,\frac{\sqrt{P_{\sigma\omega}}}{\sigma\omega}.$$

dove con M ed N si sono indicati i punti (σ), (ω), *e* $P_{\sigma\omega}$ *è tale espressione che il suo annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè la retta MN sia tangente all'assoluto.* Si potrà quindi ottenere $P_{\sigma\omega}$ ponendo in $\rho(v)$, per v_1, v_2, v_3, le coordinate tripunte della retta MN, che sono

$$\sigma_2\omega_3 - \sigma_3\omega_2,\qquad \sigma_3\omega_1 - \sigma_1\omega_3,\qquad \sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1.$$

Determinando poi la costante c, in modo per es. che la lunghezza di A_2A_3 sia a_1, si giunge precisamente a formula, che abbiamo data per il calcolo della distanza di due punti (V. I, num. 27, formula (32)).

Si giunge alla stessa formula anche in questo modo. Le coordinate del punto all'infinito della retta MN (V. II, num. 5) sono

$$\sigma_1\omega - \sigma\omega_1,\qquad \sigma_2\omega - \sigma\omega_2,\qquad \sigma_3\omega - \sigma\omega_3:$$

perchè essa retta sia tangente all'assoluto è necessario e sufficiente che questo sia punto comune ad una circonferenza ed alla retta all'infinito, cioè che sia su d'una circonferenza, appartenendo già alla retta all'infinito. Ora, l'equazione per es. della circonferenza circoscritta al triangolo base (V. II, num. 8) è

$$a_1^2\sigma_2\sigma_3 + a_2^2\sigma_3\sigma_1 + a_3^2\sigma_1\sigma_2 = 0,$$

epperò si può porre che

$$P_{\sigma\omega} = a_1^2(\sigma_2\omega - \sigma\omega_2)(\sigma\omega_3 - \sigma_3\omega) + \ldots$$

per cui

$$\overline{MN}^2 = c^2\left[a_1^2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}-\frac{\omega_2}{\omega}\right)\left(\frac{\omega_3}{\omega}-\frac{\sigma_3}{\sigma}\right)+a_2^2\left(\frac{\sigma_3}{\sigma}-\frac{\omega_3}{\omega}\right)\left(\frac{\omega_1}{\omega}-\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)+\right.$$
$$\left.+a_3^2\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}-\frac{\omega_1}{\omega}\right)\left(\frac{\omega_2}{\omega}-\frac{\sigma_2}{\sigma}\right)\right].$$

Ne segue che

$$A_2A_3^2 = c^2a_1^2, \text{ quindi che } c^2 = 1.$$

Similmente per la stereometria ordinaria,

$$MN = c\frac{\sqrt{P_{T\Omega}}}{T\Omega},$$

dove con M ed N si sono indicati i punti (T) ed (Ω), *e* $P_{T\Omega}$ *è tale espressione che il suo annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinchè la retta MN sia tangente all'assoluto*, cioè, nel caso attuale, incontri il piano all'infinito in un punto del circolo comune a tutte le sfere. Se s'osserva che il punto all'infinito della retta MN (V. II, num. 5) ha le coordinate

$$T_1\Omega - T\Omega_1,\ T_2\Omega - T\Omega_2,\ T_3\Omega - T\Omega_3,\ T_4\Omega - T\Omega_4$$

e che l'equazione della sfera circoscritta al tetraedro base (V. II, Num, 8) è

$$\Sigma d_{rs}^2 T_r T_s = 0,$$

per cui si può porre che

$$P_{T\Omega} = \Sigma d_{rs}^2 (T_r\Omega - T\Omega_r)(T\Omega_s - T_s\Omega),$$

si giunge così a formula, che abbiamo già data (V. I, Num. 28, formula (35)) per il calcolo della distanza ordinaria di due punti dello spazio.

Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane

Nota del Dott. TOMMASO BOGGIO.

I.

1. — In questa Nota studio la deformazione di una membrana isotropa, piana, elastica, sollecitata al contorno da forze agenti nel piano della membrana, supponendo di conoscere, per ogni punto del contorno, le componenti dello spostamento (*).

Il metodo che esporrò permette di esprimere mediante *integrali definiti* le componenti dello spostamento di ogni punto della membrana, purchè di questa si possa fare la rappresentazione conforme su un cerchio mediante polinomi; tale metodo è analogo a quello seguito dal Dott. Almansi (**) per integrare, nella medesima classe di aree, l'equazione differenziale $\Delta^2\Delta^2 = 0$ quando al contorno si conosca il valore della funzione e della sua derivata rispetto alla normale interna.

2. — Premettiamo il seguente lemma, che ci permetterà di risolvere la questione proposta.

Se $v(x,y)$ è una funzione armonica, e $p(x,y)$ è un polinomio armonico di grado m, si può sempre porre

$$\left\{\begin{aligned} p\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \mathrm{P} + (r^2 - 1)\,\mathrm{W} \\ p\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \mathrm{P}_1 + (r^2 - 1)\,\mathrm{W}_1 \end{aligned}\right. \qquad (r^2 = x^2 + y^2)$$

ove w è una funzione armonica, P, P_1 sono polinomi armonici

(*) Nel caso del contorno circolare la questione è stata trattata dal Prof. G. Lauricella, " Nuovo Cimento ", serie IV, tomo I.

(**) Almansi, *Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche in un'area piana*, ecc. (" Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ", a. 1899).

di grado m, e W, W_1 sono due funzioni regolari in tutto il campo in cui sono tali $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Infatti osserviamo intanto che le espressioni $p\frac{\partial v}{\partial x}$, $p\frac{\partial v}{\partial y}$ sono funzioni $(m+1)$-armoniche; poi introduciamo un nuovo polinomio armonico q_0 legato al polinomio p dalla formola

$$2\frac{\partial q_0}{\partial x}=p;$$

allora il polinomio q_0, che risulterà di grado $m+1$, sarà noto a meno di una funzione armonica della sola variabile y, ossia di una funzione lineare della y; attribuiremo alle due costanti che vi compariscono valori arbitrari in modo che il polinomio q_0 risulti completamente determinato.

Si potrà scrivere allora

$$\left\{\begin{aligned} p\frac{\partial v}{\partial x}&=2\frac{\partial q_0}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial q_0}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial q_0}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\left\{\frac{\partial q_0}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial q_0}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\}\\ p\frac{\partial v}{\partial y}&=2\frac{\partial q_0}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial q_0}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial q_0}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\left\{\frac{\partial q_0}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial q_0}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Ora osserviamo che le quantità fra le parentesi $\}\ldots\{$ sono le derivate parziali di una stessa funzione armonica (*) che chiameremo f; e se inoltre, per abbreviare, poniamo in generale

$$\left\{\begin{aligned}(q_i, v_i)&=\frac{\partial q_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial q_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial y}\\ [q_i, v_i]&=-\frac{\partial q_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial q_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial y}\end{aligned}\right.$$

(*) Infatti chiamando rispettivamente u_1, u_2 quelle quantità fra parentesi $\}\ldots\{$ si hanno, come è facile verificare, le equazioni

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u_1}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial x}=0,$$

ciò che permette di porre

$$u_1=\frac{\partial f}{\partial x},\qquad u_2=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

si avrà ancora

$$(\alpha)\quad \begin{cases} p\dfrac{\partial v}{\partial x}=(q_0,v)+\dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2mm] p\dfrac{\partial v}{\partial y}=[q_0,v]+\dfrac{\partial f}{\partial y}\,. \end{cases}$$

Le quantità (q_0, v), $[q_0, v]$ sono funzioni $(m+1)$-armoniche che si tratta di trasformare; perciò osserviamo che è sempre possibile trovare una funzione armonica v_1 ed un polinomio armonico q_1, che risulterà di grado m, in modo che si abbia (*)

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}=x\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+y\dfrac{\partial v_1}{\partial y}+h'_0 \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}=-y\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+x\dfrac{\partial v_1}{\partial y}+h''_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q_0}{\partial x}=x\dfrac{\partial q_1}{\partial x}+y\dfrac{\partial q_1}{\partial y}+c'_0 \\[2mm] \dfrac{\partial q_0}{\partial y}=-y\dfrac{\partial q_1}{\partial x}+x\dfrac{\partial q_1}{\partial y}+c''_0 \end{cases}$$

ove h'_0, h''_0, c'_0, c''_0 sono delle costanti; e allora si avrà, come è facile vedere

$$\begin{cases} (q_0,v)=(r^2-1)\,(q_1,v_1)+(q_1,v_1)+ \\ \qquad +\left\{(c'_0x-c''_0y)\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+(c'_0y+c''_0x)\dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right\}+h'_0\dfrac{\partial q_0}{\partial x}+h''_0\dfrac{\partial q_0}{\partial y} \\ [q_0,v]=(r^2-1)\,[q_1,v_1]+[q_1,v_1]+ \\ \qquad +\left\{-(c'_0y+c''_0x)\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+(c'_0x-c''_0y)\dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right\}+h''_0\dfrac{\partial q_0}{\partial x}-h'_0\dfrac{\partial q_0}{\partial y} \end{cases}$$

anche qui le quantità fra le parentesi $\}\ldots\{$ sono le derivate rispetto ad x ed y di una stessa funzione armonica, se la chiamiamo f_1 potremo scrivere

$$(\beta)\quad \begin{cases} (q_0,v)=(r^2-1)(q_1,v_1)+(q_1,v_1)+\dfrac{\partial f_1}{\partial x}+h'_0\dfrac{\partial q_0}{\partial x}+h''_0\dfrac{\partial q_0}{\partial y} \\[2mm] [q_0,v]=(r^2-1)[q_1,v_1]+[q_1,v_1]+\dfrac{\partial f_1}{\partial y}+h''_0\dfrac{\partial q_0}{\partial x}-h'_0\dfrac{\partial q_0}{\partial y}\,. \end{cases}$$

(*) Almansi, Memoria citata.

Le espressioni (q_1, v_1), $[q_1, v_1]$ sono funzioni m-armoniche; possiamo trasformarle analogamente a quanto si è fatto per le espressioni (q_0, v), $[q_0, v]$; applicheremo perciò le formole seguenti, analoghe alle (1)

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = x\dfrac{\partial v_2}{\partial x} + y\dfrac{\partial v_2}{\partial y} + h'_1 \\[2mm] \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = -y\dfrac{\partial v_1}{\partial x} + x\dfrac{\partial v_1}{\partial y} + h''_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial x} = x\dfrac{\partial q_2}{\partial x} + y\dfrac{\partial q_2}{\partial y} + c'_1 \\[2mm] \dfrac{\partial q_2}{\partial y} = -y\dfrac{\partial q_2}{\partial x} + x\dfrac{\partial q_2}{\partial y} + c''_1 \end{cases}$$

ove v_2 è una nuova funzione armonica, q_2 un polinomio armonico, che risulterà di grado $m-1$, ed h'_1, h''_1, c'_1, c''_1 sono costanti, ed otterremo le formole seguenti, analoghe alle (β),

$$(\gamma)\quad \begin{cases} (q_1,v_1) = (r^2-1)(q_2,v_2) + (q_2,v_2) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + h'_1\dfrac{\partial q_1}{\partial x} + h''_1\dfrac{\partial q_1}{\partial y} \\[2mm] [q_1,v_1] = (r^2-1)[q_2,v_2] + [q_2,v_2] + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + h''_1\dfrac{\partial q_1}{\partial x} - h'_1\dfrac{\partial q_1}{\partial y} \end{cases}$$

ove f_2 è una funzione armonica.

Le quantità (q_2, v_2), $[q_2, v_2]$ sono funzioni $(m-1)$-armoniche e potremo operare su esse come già si fece per le quantità (q_1, v_1), $[q_1, v_1]$, e così di seguito finchè arriveremo alle formole

$$\begin{cases} (q_{m-1}, v_{m-1}) = (r^2-1)(q_m, v_m) + (q_m, v_m) + \\ \qquad + \dfrac{\partial f_m}{\partial x} + h'_{m-1}\dfrac{\partial q_{m-1}}{\partial x} + h''_{m-1}\dfrac{\partial q_{m-1}}{\partial y} \\[2mm] [q_{m-1}, v_{m-1}] = (r^2-1)[q_m, v_m] + [q_m, v_m] + \\ \qquad + \dfrac{\partial f_m}{\partial y} + h''_{m-1}\dfrac{\partial q_{m-1}}{\partial x} - h'_{m-1}\dfrac{\partial q_{m-1}}{\partial y} \end{cases}$$

in cui q_m rappresenta un polinomio di 1° grado in x, y, e v_m una funzione armonica; ne segue che le espressioni (q_m, v_m), $[q_m, v_m]$ sono funzioni armoniche; anzi sono le derivate rispetto ad x, y di una stessa funzione armonica che indicheremo con f_0, quindi le due formole precedenti diventano

$$(\lambda)\quad \begin{cases} (q_{m-1},v_{m-1}) = (r^2-1)(q_m,v_m) + \dfrac{\partial(f_0+f_m)}{\partial x} + h'_{m-1}\dfrac{\partial q_{m-1}}{\partial x} + h''_{m-1}\dfrac{\partial q_{m-1}}{\partial y} \\[2mm] [q_{m-1},v_{m-1}] = (r^2-1)[q_m,v_m] + \dfrac{\partial(f_0+f_m)}{\partial y} + h''_{m-1}\dfrac{\partial q_{m-1}}{\partial x} - h'_{m-1}\dfrac{\partial q_{m-1}}{\partial y}. \end{cases}$$

Sommiamo ora le prime equazioni dei sistemi (α), (β), (γ) ... (λ), e lo stesso facciamo per le seconde equazioni, e poniamo inoltre

$$f + f_0 + f_1 + \ldots + f_m = w.$$

Si otterranno allora espressioni della forma

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} p\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \sum_0^{m-1}\left\{h'_i\frac{\partial q_i}{\partial x} + h''_i\frac{\partial q_i}{\partial y}\right\} + (r^2-1)\,W \\ p\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \sum_0^{m-1}\left\{h''_i\frac{\partial q_i}{\partial x} - h'_i\frac{\partial q_i}{\partial y}\right\} + (r^2-1)\,W_1 \end{aligned}\right.$$

che è quanto volevasi dimostrare.

3. — Cerchiamo ora il valore delle costanti h'_0, h''_0, h'_1, h''_1, ... h'_{m-1}, h''_{m-1}.

Le (1) mostrano che h'_0, h''_0 sono rispettivamente i valori di $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ nell'origine delle coordinate; se li indichiamo con $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0$ si avrà

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} h'_0 &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 \\ h''_0 &= \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0. \end{aligned}\right.$$

Le (2) dànno analogamente

$$\left\{\begin{aligned} h'_1 &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)_0 \\ h''_1 &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)_0 \end{aligned}\right.$$

od ancora, tenendo presente le (1),

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} h'_1 &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0 \\ h''_1 &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)_0. \end{aligned}\right.$$

Analogamente si avrà:

$$(c)\qquad \begin{cases} h'_2 = \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_0 \\[2ex] h''_2 = \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\right)_0, \end{cases}$$

e così via; infine

$$(z)\qquad \begin{cases} h'_{m-1} = \dfrac{1}{(m-1)!}\left(\dfrac{\partial^m v}{\partial x^m}\right)_0 \\[2ex] h''_{m-1} = \dfrac{1}{(m-1)!}\left(\dfrac{\partial^m v}{\partial x^{m-1} \partial y}\right)_0 . \end{cases}$$

II.

4\. — Consideriamo un'area piana σ' semplicemente connessa, i cui punti siano riferiti a un sistema di coordinate ortogonali x', y'. Supponiamo che di essa si possa fare la rappresentazione conforme su un cerchio σ di raggio 1, appartenente al piano xy, mediante le formole

$$(4)\qquad \begin{cases} x' = p(x, y) \\ y' = q(x, y) \end{cases}$$

ove p, q sono polinomi (armonici) di grado m, i quali verificheranno le equazioni

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial q}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y} = -\dfrac{\partial q}{\partial x} . \end{cases}$$

Dovremo poi ancora supporre che il determinante funzionale

$$D' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial x} & \dfrac{\partial x'}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial y'}{\partial x} & \dfrac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2$$

sia diverso da zero anche sul contorno di σ'.

5. — Si voglia ora determinare la deformazione della membrana elastica isotropa σ'.

Chiamiamo ξ', η' le componenti dello spostamento di un punto dell'area σ', componenti che si tratta di determinare sapendo che in ogni punto di σ' verificano le equazioni.

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta^2\xi' = k\dfrac{\partial\theta'}{\partial x'} \\ \Delta^2\eta' = k\dfrac{\partial\theta'}{\partial y'} \end{cases}, \qquad (7)\ \theta' = \frac{\partial\xi'}{\partial x'} + \frac{\partial\eta'}{\partial y'}, \qquad \left(k = \frac{-1}{1-2m}\right)$$

(m = coefficiente di contrazione = costante)

e sapendo inoltre che sul contorno di σ' le funzioni ξ', η' assumono valori dati.

Faremo vedere come le funzioni ξ', η' possano sempre esprimersi mediante integrali definiti. Osserviamo perciò che si può porre

$$(8)\quad \begin{cases} \xi' = x'\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x'} + \lambda' \\ \eta' = x'\dfrac{\partial\varphi'}{\partial y'} + \mu' \end{cases}$$

ove φ', λ', μ' sono funzioni armoniche legate dalle equazioni

$$\begin{cases} (9)\quad c\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x'} = \dfrac{\partial\lambda'}{\partial x'} + \dfrac{\partial\mu'}{\partial y'} \\ (10)\quad c\dfrac{\partial\varphi'}{\partial y'} = \dfrac{\partial\lambda'}{\partial y'} - \dfrac{\partial\mu'}{\partial x'}, \end{cases} \qquad \left(c = \frac{2-k}{k}\right).$$

Sia infatti φ' una funzione armonica, legata alla θ' dalla formola

$$(11)\qquad 2\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} = k\theta';$$

prendendo il Δ^2 dalle (8) si ha

$$\begin{cases} \Delta^2\xi' = \dfrac{\partial}{\partial x'}\left(2\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right) + \Delta^2\lambda' \\ \Delta^2\eta' = \dfrac{\partial}{\partial y'}\left(2\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right) + \Delta^2\mu' \end{cases}$$

e confrontando colle (6) e colla (11) si deduce

$$\Delta^2\lambda' = 0\,, \qquad \Delta^2\mu' = 0;$$

così intanto vediamo che anche le funzioni λ', μ' devono essere armoniche.

Se ora nella formola (11) a θ' si sostituisce il suo valore ricavato dalle (7) ed (8) si ha senz'altro la (9).

Per ottenere la (10) poniamo

$$c\,\frac{\partial\varphi'}{\partial y'} = \frac{\partial\lambda'}{\partial y'} - \frac{\partial\mu'}{\partial x'} + \alpha \tag{11'}$$

ove α è una funzione da determinarsi. Derivando la (9) rispetto ad y' e la (11') rispetto ad x' e sottraendo membro a membro si ricava $\frac{\partial\alpha}{\partial x'} = 0$. Derivando invece la (9) rispetto ad x' e la (11') rispetto a y' e sommando si ha $\frac{\partial\alpha}{\partial y'} = 0$. La α è dunque una costante. Ma questa costante possiamo prenderla eguale a 0. Se infatti poniamo

$$\varphi' = \varphi_1 - \frac{\alpha}{1-c}\,y'$$

$$\mu' = \mu_1 + \frac{\alpha}{1-c}\,x'$$

ove φ_1 e μ_1 sono nuove funzioni, anch'esse evidentemente armoniche, si vede subito che le equazioni (8), (9) ed (11) non mutano forma, mentre la (11') viene ad assumere la forma (10). Ciò equivale a supporre nella (11') $\alpha = 0$; l'equazione (10) resta così verificata.

6. — Eseguiamo ora la trasformazione dell'area σ' sul cerchio σ, ciò che si fa mediante le (4); chiamiamo ξ, η, λ, μ le funzioni $\xi', \eta', \lambda', \mu'$ espresse mediante le variabili x, y ed osserviamo che le funzioni $\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}, \frac{\partial\varphi'}{\partial y'}$ possiamo considerarle come le

derivate rispetto ad x ed y di una stessa funzione armonica v (*). Allora le (8) diventeranno

$$\begin{cases} \xi = p(x, y) \dfrac{\partial v}{\partial x} + \lambda \\ \eta = p(x, y) \dfrac{\partial v}{\partial y} + \mu . \end{cases}$$

Applicando le (3) avremo ancora

$$\begin{cases} \xi = \lambda + \dfrac{\partial w}{\partial x} + \sum_0^{m-1} \left\{ h'_i \dfrac{\partial q_i}{\partial x} + h''_i \dfrac{\partial q_i}{\partial y} \right\} + (r^2 - 1) W \\ \eta = \mu + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \sum_0^{m-1} \left\{ h''_i \dfrac{\partial q_i}{\partial x} - h'_i \dfrac{\partial q_i}{\partial y} \right\} + (r^2 - 1) W_1 . \end{cases}$$

Le funzioni λ, μ sono ancora armoniche; la funzione w è armonica, le quantità h'_i, h''_i sono costanti incognite e q_i è un polinomio armonico (noto).

Supponiamo, per un istante, di aver già determinato le costanti h'_i, h''_i.

Osserviamo che sul contorno di σ, cioè per $r = 1$, si conoscono i valori di ξ, η, quindi le formole precedenti ci permettono di calcolare in ogni punto dell'area σ i valori delle funzioni armoniche

$$\lambda + \frac{\partial w}{\partial x} + \sum_0^{m-1} \left\{ h'_i \frac{\partial q_i}{\partial x} + h''_i \frac{\partial q_i}{\partial y} \right\},$$

$$\mu + \frac{\partial w}{\partial y} + \sum_0^{m-1} \left\{ h''_i \frac{\partial q_i}{\partial x} - h'_i \frac{\partial q_i}{\partial y} \right\};$$

(*) Infatti per mostrare che si può porre

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

ove v è una funzione armonica, basta far vedere che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} \left(\dfrac{\partial \varphi'}{\partial x'} \right) + \dfrac{\partial}{\partial y} \left(\dfrac{\partial \varphi'}{\partial y'} \right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \left(\dfrac{\partial \varphi'}{\partial x'} \right) - \dfrac{\partial}{\partial x} \left(\dfrac{\partial \varphi'}{\partial y'} \right) = 0 \end{cases}$$

la qual cosa si verifica senza difficoltà tenendo presente le (4) e le (5).

perciò se chiamiamo F, G le funzioni armoniche (note) che sul contorno di σ assumono gli stessi valori che ξ, η si potrà scrivere

$$\begin{cases} \lambda + \frac{\partial w}{\partial x} + \sum_0^{m-1} \left\{ h'_i \frac{\partial q_i}{\partial x} + h''_i \frac{\partial q_i}{\partial y} \right\} = F \\ \mu + \frac{\partial w}{\partial y} + \sum_0^{m-1} \left\{ h''_i \frac{\partial q_i}{\partial x} - h'_i \frac{\partial q_i}{\partial y} \right\} = G. \end{cases}$$

Ritorniamo ora alle variabili primitive x', y'.

Le funzioni λ, μ diventano λ', μ'; chiamiamo F′, G′ ciò che diventano F, G e osserviamo, come sopra, che $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ diventeranno le derivate rispetto ad x', y' di una stessa funzione armonica u' e che $\frac{\partial q_i}{\partial x}, \frac{\partial q_i}{\partial y}$ diventeranno a loro volta le derivate parziali di una stessa funzione armonica (nota) Q'_i; allora potremo scrivere

$$\begin{cases} \lambda' + \frac{\partial u'}{\partial x'} + \sum_0^{m-1} \left\{ h'_i \frac{\partial Q'_i}{\partial x'} + h''_i \frac{\partial Q'_i}{\partial y'} \right\} = F' \\ \mu' + \frac{\partial u'}{\partial y'} + \sum_0^{m-1} \left\{ h''_i \frac{\partial Q'_i}{\partial x'} - h'_i \frac{\partial Q'_i}{\partial y'} \right\} = G'. \end{cases}$$

Se da queste equazioni si ricavano i valori di λ', μ' e si sostituiscono nelle (9), (10) si ottengono, come è facile vedere, le equazioni

$$(12) \quad \begin{cases} c \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} = \frac{\partial F'}{\partial x'} + \frac{\partial G'}{\partial y'} - 2 \sum_0^{m-1} \frac{\partial}{\partial x'} \left(h'_i \frac{\partial Q'_i}{\partial x'} + h''_i \frac{\partial Q'_i}{\partial y'} \right) \\ c \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = \frac{\partial F'}{\partial y'} - \frac{\partial G'}{\partial x'} - 2 \sum_0^{m-1} \frac{\partial}{\partial y'} \left(h'_i \frac{\partial Q'_i}{\partial x'} + h''_i \frac{\partial Q'_i}{\partial y'} \right) \end{cases},$$

le quali dànno $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}, \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}$. Infine nelle (8) che possiamo scrivere

$$\begin{cases} \lambda' = \xi' - x' \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \\ \mu' = \eta' - x' \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} \end{cases}$$

i secondi membri sono noti sul contorno di σ': quindi da esse possiamo ricavare le funzioni λ', μ' che sono armoniche nell'area σ'.

Così sono determinate le funzioni $\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}, \frac{\partial\varphi'}{\partial y'}, \lambda', \mu'$ che compaiono nelle (8), e il problema è risoluto.

7. — Rimangono però ancora a determinare le costanti h che compaiono nell'espressione

$$\sum_0^{m-1}\left(h'_i\frac{\partial Q'_i}{\partial x'}+h''_i\frac{\partial Q'_i}{\partial y'}\right),$$

e che sono $2m$ in tutto.

Perciò riprendiamo le (12), che si possono anche scrivere così,

$$\begin{cases} c\,\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial F'}{\partial x'}+\dfrac{\partial G'}{\partial y'}-2\displaystyle\sum_0^{m-1}\frac{\partial}{\partial x'}\left(h'_i\frac{\partial Q'_i}{\partial x'}+h''_i\frac{\partial Q'_i}{\partial y'}\right)\\ c\,\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial F'}{\partial y'}-\dfrac{\partial G'}{\partial x'}-2\displaystyle\sum_0^{m-1}\frac{\partial}{\partial y'}\left(h'_i\frac{\partial Q'_i}{\partial x'}+h''_i\frac{\partial Q'_i}{\partial y'}\right);\end{cases}$$

e sostituiamo questi valori di $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ nelle equazioni (a), (b), ...(z); allora si ottengono $2m$ equazioni lineari nelle $2m$ incognite $h'_0, h''_0, h'_1, h''_1, \ldots h'_{m-1}, h''_{m-1}$; ed è facile vedere che il determinante di queste equazioni, avendo la forma

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+c & \alpha_{12} & \dots\dots & \alpha_{1,2m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}+c & \dots\dots & \alpha_{2,2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{2m,1} & \alpha_{2m,2} & \dots\dots & \alpha_{2m,2m}+c \end{vmatrix}$$

è generalmente diverso da zero; perciò la risoluzione di quelle equazioni è generalmente possibile.

8. — Il procedimento esposto avanti per integrare le equazioni differenziali

$$\begin{cases} \Delta^2 \xi' = k \dfrac{\partial \theta'}{\partial x'} \\ \Delta^2 \eta' = k \dfrac{\partial \theta'}{\partial y'} \end{cases}$$

ove

$$\theta' = \frac{\partial \xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial y'} \, .$$

dati al contorno i valori degli spostamenti ξ', η', permette, come caso particolare, di determinare nell'area σ' una funzione bi-armonica U', conoscendosi al contorno i valori delle sue derivate parziali rispetto ad x', y'.

Poniamo infatti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U'}{\partial x'} = \xi' \\ \dfrac{\partial U'}{\partial y'} = \eta' \, , \end{cases}$$

ponendo poi ancora

$$\theta' = \Delta^2 U' = \frac{\partial \xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial y'}$$

sarà evidentemente

$$\begin{cases} \Delta^2 \xi' = \dfrac{\partial \theta'}{\partial x'} \\ \Delta^2 \eta' = \dfrac{\partial \theta'}{\partial y'} \, , \end{cases}$$

le quali equazioni non sono altro che le (6) ove si supponga

$$k = 1 .$$

La funzione U' risulta determinata a meno di una costante.

Se si aggiunge poi ancora la condizione che in un punto del contorno dell'area σ' la funzione U' assuma un valore dato,

allora la funzione U' risulta completamente determinata; e in questo caso il problema ora trattato equivale all'altro: Determinare la funzione U', bi-armonica nell'area σ', conoscendo al contorno il valore della funzione e della sua derivata normale interna.

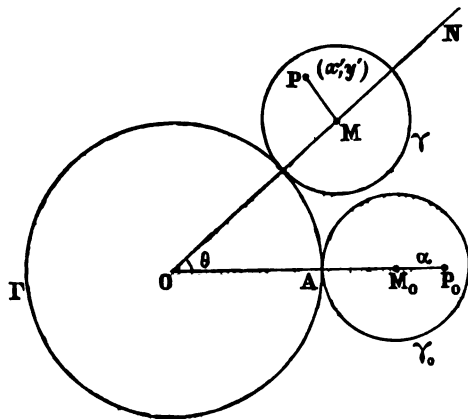
Infatti da queste condizioni al contorno si possono, in generale dedurre i valori delle derivate parziali della funzione U'.

III.

9. — Ora farò vedere che esiste una classe speciale di *Epicicloidi* le quali racchiudono delle aree σ' di cui si può fare la rappresentazione conforme sul cerchio σ mediante le (4).

Sia infatti Γ una circonferenza fissa e γ una circonferenza tangente esternamente a Γ e che si muove sviluppandosi (o rotolando) sulla circonferenza Γ. Sia poi P un punto entro la circonferenza γ e connesso rigidamente con γ; la curva descritta dal punto P mentre γ si muove nel modo detto è una *Epicicloide*.

Sia γ_0 la posizione iniziale della circonferenza mobile, γ una posizione qualunque della medesima, P_0 la posizione iniziale del punto mobile e P la posizione che P_0 assume quando γ_0 viene in γ.

Prendiamo per unità di lunghezza il segmento OM_0, cioè sia $OM_0 = 1$, poniamo inoltre

$$M_0\widehat{O}M = \theta, \quad AM_0 = R, \quad M_0P_0 = a;$$

supponiamo poi ancora:

$$OA = (n-1)\,R,$$

ove n è un numero intiero e positivo; allora è facile dedurne:

$$a < \frac{1}{n}.$$

Scelti per assi cartesiani OA e la perpendicolare ad essa in O, le componenti del segmento $\overline{OM}$ rispetto a questi assi sono $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$, e poichè è chiaro che $\widehat{NMP} = (n-1)\theta$, le componenti del segmento $\overline{MP}$ valgono $a \cos n\theta$, $a \operatorname{sen} n\theta$, quindi le componenti del segmento $\overline{OP}$, ossia le coordinate x', y' di P sono date dalle formole:

$$(13) \qquad \begin{cases} x' = \cos\theta + a\cos n\theta \\ y' = \operatorname{sen}\theta + a \operatorname{sen} n\theta. \end{cases}$$

Il contorno dell'area σ' limitata dalla linea descritta da P si otterrà facendo variare in queste formole il parametro θ fra 0 e 2π.

Per avere la rappresentazione conforme dell' area σ' sul cerchio σ di raggio 1 appartenente al piano xy e col centro nell'origine delle coordinate basta porre:

$$(14) \qquad \begin{cases} x' = x + a P_n \\ y' = y + a P'_n \end{cases}$$

ove P_n, P'_n sono i due polinomi armonici, coniugati, omogenei, di grado n, il primo dei quali contiene x^n.

Infatti se si riferiscono i punti del cerchio σ alle coordinate polari r, θ, assumendo come polo il centro del cerchio e come asse polare l'asse x, si avrà:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta$$

onde le (14) potremo scriverle,

$$\begin{cases} x' = r\cos\theta + ar^n \cos n\theta \\ y' = r\operatorname{sen}\theta + ar^n \operatorname{sen} n\theta. \end{cases}$$

Ponendo in queste formole $r = 1$ si hanno le (13) cioè alla circonferenza del cerchiò σ corrisponde il contorno dell'area σ'.

Sono poi verificate le equazioni, analoghe alle (5),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial x} - \dfrac{\partial y'}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial x'}{\partial y} + \dfrac{\partial y'}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Infine il determinante funzionale D' vale, come è facile vedere,

$$[1 + n a r^{n-1} \cos (n - 1) \theta]^2 + [n a r^{n-1} \operatorname{sen} (n - 1) \theta]^2.$$

Ora il valor minimo che può assumere il 1° termine è:

$$[1 - n a]^2,$$

quantità che non è 0 perchè vedemmo che $a < \frac{1}{n}$; così resta provato che D' non si annulla nel cerchio σ e neppure sul suo contorno.

Osserviamo infine che le epicicloidi date dalle (13) sono prive di nodi e di cuspidi.

IV.

10. — Per certe aree speciali, si può risolvere il problema trattato nel cap. II con un procedimento più semplice di quello esposto in generale; ciò si ottiene mediante un leggero cambiamento delle formole di partenza; come ora mostrerò per un'area particolare.

Consideriamo l'area σ' racchiusa dalla *Lumaca di Pascal* non passante pel suo polo; il contorno di quest'area, i cui punti supponiamo riferiti ad un sistema di coordinate ortogonali x', y', si può ottenere facendo variare fra 0 e 2π il parametro θ nelle due equazioni:

$$\begin{cases} x' = \cos\theta + a \cos 2\theta \\ y' = \operatorname{sen}\theta + a \operatorname{sen} 2\theta \end{cases}$$

ove a è una costante positiva minore di $\frac{1}{2}$. Tale contorno si ottiene quindi ponendo $n = 2$ nelle (13).

Per fare la rappresentazione conforme dell'area σ' sul cerchio σ di raggio 1, appartenente al piano $x\,y$ basta porre:

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = r\cos\theta + ar^2\cos 2\theta \\ y' = r\,\mathrm{sen}\,\theta + ar^2\mathrm{sen}\,2\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x} \end{cases}$$

come si verifica immediatamente.

Dati sul contorno di σ' i valori degli spostamenti, che chiameremo $\xi'\ \eta'$, si tratta di determinarli in ogni punto dell'area σ', sapendo che verificano le due equazioni:

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta^2\xi' = k\,\frac{\partial\Theta'}{\partial x'} \\ \Delta^2\eta' = k\,\frac{\partial\Theta'}{\partial y'}, \end{cases} \qquad \left(k = \frac{-1}{1-2m}\right)$$

ove

$$(3)\qquad \Theta' = \frac{\partial\xi'}{\partial x'} + \frac{\partial\eta'}{\partial y'}, \qquad (m = \text{coeff. di contraz.} = \text{costante}).$$

Osserviamo perciò che si può porre:

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi' = (r'^2 - a^2 - 1)\,\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} + \lambda' \\ \eta' = (r'^2 - a^2 - 1\,\frac{\partial\varphi'}{\partial y'} + \mu', \end{cases} \qquad (r'^2 = x'^2 + y'^2)$$

ove φ', λ', μ' sono funzioni armoniche legate dall'equazione:

$$(5)\qquad cr'\,\frac{\partial\varphi'}{\partial r'} = \frac{\partial\lambda'}{\partial x'} + \frac{\partial\mu'}{\partial y'} - \Theta'_0 \qquad (c = -6 + 8m),$$

essendo Θ'_0 la dilatazione nell'origine delle coordinate.

Sia infatti φ' una funzione armonica, legata alla Θ' dalla formola:

$$(6)\qquad 4r'\,\frac{\partial\varphi'}{\partial r'} = k(\Theta' - \Theta'_0).$$

Prendendo il Δ^2 dalle (4) si ha:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta^2\xi' &= 4\,\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} + 4x'\,\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'^2} + 4y'\,\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'\partial y'} + \Delta^2\lambda' = \\ &= \frac{\partial}{\partial x'}\left[4\left(x'\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} + y'\,\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\right)\right] + \Delta^2\lambda' \\ \Delta^2\eta' &= 4\,\frac{\partial\varphi'}{\partial y'} + 4x'\,\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'\partial y'} + 4y'\,\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y'^2} + \Delta^2\mu' = \\ &= \frac{\partial}{\partial y'}\left[4\left(x'\frac{\partial p'}{\partial x'} + y'\,\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\right)\right] + \Delta^2\mu' \end{aligned}\right.$$

e confrontando colle (2) e colla (6) si deduce:

$$\Delta^2\,\lambda' = 0, \qquad \Delta^2\mu' = 0.$$

Così intanto vediamo che anche le funzioni λ', μ' devono essere armoniche.

Se ora nella formola (6) a Θ' si sostituisce il suo valore ricavato dalle (3) e (4) si ha senz'altro la (5).

11. — Facciamo ora la rappresentazione conforme dell'area σ' sul cerchio σ; basta perciò ricorrere alle (1); osserviamo poi, al solito, che $\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}$, $\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}$ diventano con questa trasformazione le derivate rispetto ad x, y di una stessa funzione armonica che chiameremo v; e notiamo ancora che dalle (1) segue:

$$r'^2 = r^2 + a^2r^4 + 2\,a\,r^2x.$$

Ciò posto se diciamo ξ, η, λ, μ le funzioni $\xi', \eta', \lambda', \mu'$ espresse mediante le variabili x, y sarà:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= (r^2 + a^2r^4 + 2ar^2x - a^2 - 1)\,\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \\ \eta &= (r^2 + a^2r^4 + 2ar^2x - a^2 - 1)\,\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \end{aligned}\right.$$

od ancora

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= (r^2 - 1)\,\frac{\partial v}{\partial x} + a^2(r^4 - 1)\,\frac{\partial v}{\partial x} + 2ax(r^2 - 1)\,\frac{\partial v}{\partial x} + 2ax\,\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \\ \eta &= (r^2 - 1)\,\frac{\partial v}{y} + a^2(r^4 - 1)\,\frac{\partial v}{\partial y} + 2ax(r^2 - 1)\,\frac{\partial v}{\partial y} + 2ax\,\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \end{aligned}\right.$$

e le funzioni $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$ saranno ancora armoniche.

Riduciamo ora le quantità $2ax\frac{\partial v}{\partial x}$, $2ax\frac{\partial v}{\partial y}$ alla forma:

$$(8)\qquad (r^2-1)\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}+\mathrm{P},\quad (r^2-1)\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}+\mathrm{P}_1$$

ove v_1, w sono funzioni armoniche, e P, P_1 sono funzioni lineari di x, y. Basta perciò introdurre una nuova funzione armonica v_1 e due costanti h_1, h_2 in modo che sia:

$$(8')\qquad \begin{cases} a\frac{\partial v}{\partial x}=x\frac{\partial v_1}{\partial x}+y\frac{\partial v_1}{\partial y}+h_1 \\ a\frac{\partial v}{\partial y}=-y\frac{\partial v_1}{\partial x}+x\frac{\partial v_1}{\partial y}+h_2, \end{cases}$$

ciò che può sempre farsi. Si otterrà:

$$\begin{cases} 2ax\frac{\partial v}{\partial x}=a\left(x\frac{\partial v}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial y}\right)+a\left(x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}\right)= \\ \quad =(r^2-1)\frac{\partial v_1}{\partial x}+\left[\frac{\partial v_1}{\partial x}+ax\frac{\partial v}{\partial x}+ay\frac{\partial v}{\partial y}\right]+h_1x-h_2y \\ 2ax\frac{\partial v}{\partial y}=a\left(y\frac{\partial v}{\partial x}+x\frac{\partial v}{\partial y}\right)+a\left(-y\frac{\partial v}{\partial x}+x\frac{\partial v}{\partial y}\right)= \\ \quad =(r^2-1)\frac{\partial v_1}{\partial y}+\left[\frac{\partial v_1}{\partial y}-ay\frac{\partial v}{\partial x}+ax\frac{\partial v}{\partial y}\right]+h_2x+h_1y. \end{cases}$$

Le quantità fra le parentesi [...] sono (come è facile vedere) le derivate rispetto ad x, y di una stessa funzione armonica che diremo w; perciò gli ultimi membri hanno la forma (8) come si voleva.

In conseguenza le (7) potranno anche porsi sotto la forma:

$$\begin{cases} \xi=\lambda+\frac{\partial w}{\partial x}+h_1x-h_2y+(r^2-1)\mathrm{W} \\ \eta=\mu+\frac{\partial w}{\partial y}+h_2x+h_1y+(r^2-1)\mathrm{W}_1. \end{cases}$$

Supponiamo, per poco, di aver già determinate le costanti h_1, h_2.

Osserviamo che sul contorno di σ, cioè per $r=1$ si conoscono i valori di ξ, η, quindi le formole precedenti permettono di calcolare in ogni punto dell'area σ i valori delle funzioni armoniche:

$$\lambda+\frac{\partial w}{\partial x}+h_1 x-h_2 y\,,\qquad \mu+\frac{\partial w}{\partial y}+h_2 x+h_1 y\,;$$

potremo perciò porre

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda+\frac{\partial w}{\partial x}+h_1 x-h_2 y=\mathrm{F}\\&\mu+\frac{\partial w}{\partial y}+h_2 x+h_1 y=\mathrm{G}\end{aligned}\right.$$

ove F, G sono le funzioni armoniche che sul contorno di σ assumono gli stessi valori che ξ, η.

Ritorniamo ora alle variabili primitive x', y'. Le funzioni λ, μ diventano λ', μ'; chiamiamo poi F′, G′ ciò che diventano F, G e osserviamo, come dianzi, che $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ diventeranno le derivate rispetto ad x', y' di una stessa funzione armonica u'; si avrà:

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda'+\frac{\partial u'}{\partial x'}+h_1 x-h_2 y=\mathrm{F}'\\&\mu'+\frac{\partial u'}{\partial y'}+h_2 x+h_1 y=\mathrm{G}'.\end{aligned}\right.$$

Sostituendo nella (5) otterremo l'equazione:

$$cr'\,\frac{\partial\varphi'}{\partial r'}=\frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial x'}+\frac{\partial \mathrm{G}'}{\partial y'}-h_1\left(\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial y}{\partial y'}\right)-h_2\left(\frac{\partial x}{\partial y'}-\frac{\partial y}{\partial x'}\right)-\Theta'_0.$$

In questa formola, come si vede, non comparisce più la funzione incognita u'; così dunque conosciamo, a meno delle costanti h_1, h_2, Θ'_0 la quantità $r'\,\frac{\partial\varphi'}{\partial r'}$ e quindi per la formola (6) la dilatazione $\Theta'-\Theta'_0$.

Per avere le derivate $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$, $\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}$ che compariscono nelle formole (4) deriviamo rispetto ad x', y' l'equazione precedente; ricordando che si ha $r' \frac{\partial \varphi'}{\partial r'} = x' \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} + y' \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}$ otterremo:

$$
\begin{cases}
(9) \quad c\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} + r' \frac{\partial}{\partial r'} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}\right) = \frac{\partial^2 F'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 G'}{\partial x' \partial y} - \\
\qquad - h_1\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x' \partial y'}\right) - h_2\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial^2 y}{\partial x'^2}\right) \\
(10) \quad c\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} + r' \frac{\partial}{\partial r'} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}\right) = \frac{\partial^2 F'}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 G'}{\partial y'^2} - \\
\qquad - h_1\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 y}{\partial y'^2}\right) - h_2\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x' \partial y'}\right);
\end{cases}
$$

e se si chiamano, per brevità, Φ', Ψ' i secondi membri, da queste equazioni si ottiene:

$$
\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} = \frac{1}{cr'} \int_0^{r'} \Phi' dr', \qquad \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = \frac{1}{cr'} \int_0^{r'} \Psi' dr'
$$

e poichè l'origine delle coordinate è in σ' queste formole dànno le uniche funzioni armoniche nell'area σ' che verificano rispettivamente la (9) o la (10).

Infine nelle (4) che si possono scrivere così:

$$
\begin{cases}
\lambda' = \xi' - (r'^2 - a^2 - 1) \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \\
\mu' = \eta' - (r'^2 - a^2 - 1) \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}
\end{cases}
$$

i secondi membri sono noti sul contorno di σ', quindi da esse possiamo ricavare le funzioni λ', μ' che sono armoniche nell'area σ'.

Così son determinate le funzioni $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$, $\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}$, λ', μ' che compaiono nelle (4) e il problema è risoluto.

Rimangono però ancora a determinare le costanti h_1, h_2. Perciò osserviamo che le (8') mostrano che h_1, h_2 sono i valori di $a \frac{\partial v}{\partial x}$, $a \frac{\partial v}{\partial y}$ per $x = y = 0$; ne segue in virtù delle (1) che

h_1, h_2 saranno anche i valori di $a\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$, $a\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}$ per $x' = y' = 0$; ponendo quindi nella (9) $x' = y' = 0$, il 1° membro diventa cah_1, e nel secondo membro è facile vedere che il coefficiente di h_2 diventa eguale a 0 e il coefficiente di h_1 assume il valore $4a$; quindi quest'equazione fornisce h_1; in modo analogo dalla (10) si ottiene h_2.

L'Accademico Segretario
ANDREA NACCARI.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 24 Dicembre 1899.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: Claretta, Direttore della Classe, Peyron, Manno, Bollati di Saint-Pierre, Cognetti de Martiis, Cipolla, Brusa, Pizzi e Renier Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente.

Il Presidente notifica che con decreto del 7 dicembre 1899 il Socio Renier fu nominato Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche, fino al 20 luglio 1900, cioè per tutto il tempo che manca al compimento del triennio cominciato dal rimpianto Socio Nani.

Il Socio Cognetti de Martiis propone che anche l'Accademia nostra, come parecchie altre fra le principali italiane e straniere, pubblichi un suo *Annuario*, che contenga i nomi dei Soci, gli Statuti dei premî, gli elenchi degli Atti accademici che pervengono in cambio, ecc., ecc. — Il Presidente è lieto di poter informare che di siffatta pubblicazione fu già tenuta parola nel Consiglio di Amministrazione e che si è determinato

di farla, poichè ne è vivamente sentito il bisogno. — Il Socio Cognetti de Martiis si dichiara soddisfatto.

Il Segretario presenta:

1° Il vol. del Dr. Filippo De Filippi, *La spedizione di S. A. R. il Principe Luigi Amedeo di Savoia Duca degli Abruzzi al Monte Sant'Elia,* Milano, Hoepli, 1900. Di questo volume il Presidente annunciò già l'invio all'Accademia nella passata adunanza e furono spedite lettere di ringraziamento a S. A. R. il Duca degli Abruzzi e al Dr. De Filippi.

2° Da parte del Direttore dell'Imprimerie Nationale di Parigi, col consenso di S. E. il Ministro Guardasigilli della Repubblica Francese, il vol. V dell'opera: *Le Bhâgavata Purâṇa ou Histoire poétique de Krĭchṇa*, traduzione di Eugenio Burnouf, Parigi, 1898. — Si invieranno ringraziamenti.

3° *Pensieri inediti di Ruggero Bonghi con Ricordi biografici* per Francesco Crispi, Lucera, stamp. editrice, 1899. Invia il Sindaco di Lucera, che sarà ringraziato.

Il Socio Manno offre da parte di Monsignor De Cabrières, vescovo di Montpellier, due volumi di *Mélanges de littérature et d'histoire religieuses* (Paris, Picard, 1899) editi per commemorare il giubileo episcopale di quel Monsignore. Non ommette il Socio Manno di far notare l'importanza che hanno queste memorie per la storia religiosa e indica parecchi fra i nomi più illustri che figurano nella miscellanea. — Monsignor De Cabrières sarà ringraziato.

Il Socio Cipolla legge una sua memoria: *La " Bulla major " di Cuniberto vescovo di Torino in favore della prevostura di Oulx.* Egli ne chiede l'inserzione nelle *Memorie* accademiche. Il sunto è pubblicato negli *Atti.* Assentatosi momentaneamente il Socio Cipolla, si vota ad unanimità l'inserzione della sua Memoria.

Si presentano per la stampa negli *Atti*, approvante la Classe, le seguenti note:

Da parte del Socio Ferrero, rappresentato dal Segretario:

1°. Aristide Marre, *Coup d'œil sur les chants et poésies malgaches.*

2°. Antonio Taramelli, *Di una " mola asinaria " rinvenuta presso Rivoli.*

Da parte del Socio Cipolla:

Ferdinando Gabotto, *L'arte della lana in Ivrea nei secoli XIV e XV.*

Il Socio Brusa rende conto della recente pubblicazione di Achille Mestre, *Les personnes morales et le problème de leur responsabilité pénale.* Di quest'opera è fatta una breve esposizione con molti elogi ed alcune critiche. Il Socio Brusa si riserva di riassumere per gli *Atti* queste sue considerazioni.

LETTURE

Coup d'œil sur les chants et les poésies malgaches;

Nota del Socio corrispondente ARISTIDE MARRE.

Les Malgaches ont un goût inné pour le chant et pour la musique. Ils appellent la poésie: *Teny fiantsàna,* à la lettre: *paroles chantées.* Leur langue se prête naturellement aux inspirations poétiques et aux effets oratoires, et aussi à la musique vocale, grâce à l'abondance des voyelles dans la formation des mots et à l'absence absolue de consonnes finales. Malheureusement, il n'est guère possible de présenter des poèmes malgaches, anciens et authentiques, comme les poèmes malais et javanais; ici les monuments littéraires font défaut, et l'on peut dire qu'en dehors de ses contes, légendes, proverbes, pièces oratoires et chansons populaires, Madagascar n'a pas de littérature.

La langue malgache, par un phénomène des plus remarquables, a traversé les siècles en conservant ses règles grammaticales, ses lois euphoniques, la construction normale de ses phrases, ses figures et métaphores, tout cela par la tradition orale, sans l'emploi de l'écriture. Ce phénomène, si surprenant qu'il puisse paraître au premier abord, s'explique par l'isolement de Madagascar du reste du monde; les relations des habitants de certaines parties du littoral avec les navigateurs et commerçants arabes, persans et hindous, ont été trop rares et de trop peu d'importance pour influer sur la langue malgache d'origine malayo-polynésienne. D'autre part, ce n'est que dans le commencement du XIX[e] siècle que des missionnaires chrétiens, après avoir étudié la langue parlée par les indigènes, et spécialement par les *Hova,* se sont appliqués à lui donner une forme écrite, en se servant, pour la fixer, de notre alphabet latin; mais ils ont souvent établi des règles grammaticales imitées de celles de la grammaire latine, sans nul souci des origines ma-

layo-polynésiennes du malgache, et de ses nombreuses affinités grammaticales et lexicologiques avec le javanais, le malais et les autres idiomes répandus dans l'Océan Indien et dans l'Océan Pacifique. Depuis les temps reculés des premières immigrations malaises et javanaises dans l'île de Madagascar (temps non encore déterminés d'une manière précise, mais certainement antérieurs à l'introduction de l'hindouïsme dans Java), la grande île africaine est restée presque étrangère au reste du monde. Sa vaste étendue, supérieure à celle de la France, ses forêts, ses marécages, ses montagnes escarpées et coupées de précipices, l'absence de toute voie de communication et de tout moyen de transport à l'intérieur, ont été les causes principales de son isolement absolu.

Le roi hova *Radama Ier* disait qu'il comptait sur ses deux généraux *Hàzou* (forêt) et *Tàzou* (fièvre), pour repousser toute invasion ennemie; mais il ne pouvait prévoir par quels prodiges de bravoure, d'activité et d'endurance, nos soldats parviendraient à planter le drapeau de la France sur le palais royal de Tananarive. Nous espérons que toutes les tribus répandues sur le territoire malgache deviendront promptement un peuple homogène et civilisé sous le gouvernement éclairé, juste et ferme du général Gallieni. Mais revenons aux chants et aux poésies des Malgaches. On sait que leurs vers ne sont pas soumis à la rime comme nos vers français, ou comme les vers malais; ils sont chantés avec accompagnement d'instruments de musique, surtout du *valiha*, espèce de guitare dont le corps est fait d'un morceau de bambou, et dont les cordes sont des filets pris sur l'écorce, soulevés adroitement et raidis par des chevalets mobiles. Le sujet du chant est indiqué généralement par la première ligne qui se répète en chœur. L'alternance du récit entre le chant et le soliste est le trait caractéristique de toute chanson malgache.

Citons, avant tout autre chant, celui qui est connu sous le nom de *chant de la Reine*. Voici le texte, accompagné de la traduction littérale:

" *Rabôdon' Andrianampoïna!*
Atsimon' Ambatonafandrana,
Avaratr' Ambohimitsimbina,
Andrefan' Ambohimiandra,
Atsinánan Ambohijanahary.

Veloma Rabôdo!
Sy Ramboasalama,
Sy Rakoto-Sehenon'd Radama
Sy ny havana tontolo
Tsy tambo isaina!
Ny tokotany dia farantsa
Ny zoron'trano dia basy.
Manamba tsy mba miavona
Rova lefona, ka temitr' olon' indray
Rabôdon' Andrianampoïna!
Hazo tokana an'ony
Tsy firy no mandídy.
Ka tomponay any ao!
Volantsinana no avy andrefana
Fenomanana no avy atsínánana
Ny hazo any Ambohimanga
Mijokajoka faniry;
Mitsinjo zaza manjaka,
Manjaka any Rabôdo
Tomponay any hianao!
Ka ny kely manana ny azy,
Ny be manana ny azy
Ny tany ambaratonga
Tsy mahatafintohina
Isy mahasasa mandeha.
Veloma, Rabodon' Andrianampoïna
Tsy manan'olonkala
Ny kamboty dia dongadonga
Ny velon'dray dia botrabotra „.

TRADUCTION.

« Rabôdo Andrianampoïna!
Au sud d'Ambatonafandrana,
Au nord d'Ambohimitsimbina,
A l'ouest d'Ambohimiandra,
A l'est d'Ambohijanahary.
Salut à Vous Rabôdo!
Et à Ramboasalama,

Et à Rakoto-Sehenon'd Radama,
Et à tous les parents
Dont le nombre ne peut être compté!
Le sol est formé de piastres,
Les poteaux de la maison sont des fusils,
Vous possédez de grands biens et vous ne vous en orgueillissez point
Votre fort est défendu par un cercle de guerriers armés de lances.
Ô Rabôdo Andrianampoïna!
L'arbre qui se dresse isolé dans la rivière,
Personne n'a le pouvoir de le couper,
Personne autre que Vous, notre Souveraine.
La nouvelle lune vient de l'ouest,
La pleine lune vient de l'est,
L'arbre d'Ambohimanga
A de superbes rejetons,
L'enfant royal les regarde,
C'est Vous, Rabôdo, qui régnez!
C'est Vous, notre Souveraine.
Les petits jouissent de leurs biens,
Les grands jouissent de leurs biens,
Le pays est comme un plain-pied dans la montée,
On ne peut pas y broncher,
On y marche sans fatigue.
Salut à Rabôdo Andrianampoïna!
Elle n'a de haine pour personne,
Par Elle les orphelins sont rassasiés,
Et les enfants qui ont leur père vivent dans l'abondance „.

Observations sur ce chant de la Reine.

1° Ce chant a été composé en l'honneur de la Reine hova, connue sous le nom de *Rabôdon' Andrianampoïna.*

Le conquérant de l'*Imerina*, le fondateur de la puissance hova, le père de Radama 1er, portait le nom ou plutôt le titre d'*Andrian-impoïn-Imerina.* James Sibree, l'auteur anglais d'un livre fort-intéressant, intitulé: " *Madagascar and its people* „ dit que ce nom malgache signifie: " *Prince du cœur de l'Imerina* „ et que *Rabôdon' Andrian-impoïn-Imerina* signifie " *la chérie* ou *la bien-aimée du Prince du Cœur de l'Imerina* „.

Bôdo et *Rabôdo* n'ont jamais signifié, que je sache, " *chérie, bien-aimée* „. Je crois que *impoïn* est un dérivé non pas du mot *fo* (cœur), mais de *tompo* (maître, seigneur), et qu'en conséquence *Andrianampoïna* signifie

" Prince-Maître, Prince-Seigneur „, et *Andrianimpoïn-Imerina* (Prince-Maître de l'Imérina) tout simplement.

Le malgache *tompo* (maître) n'est autre que le javanais *empou*, le malais *ampou*, le battak *ompo*, le dayak *tempou*, le tagalog *ampou*, le mangkasar *opou*, etc.

2° *Tananarive* est entouré vers les quatre points cardinaux des quatre collines mentionnées au commencement de ce chant. Le nom de l'une d'elles, *Ambohijanahary* est traduit par James Sibree: *Montagne* créée. Ce nom signifie à la lettre *colline de Dieu*, ou *colline sacrée.*

3° *Ramboasalama* était le cousin du prince *Rakoto-Sehenond Radama.* Ce dernier monta sur le trône sous le nom de Radama II, à la mort de la reine *Ranavalona,* le 15 août 1861; il périt assassiné en avril 1863.

4° Dans le vers " *Hazo tokana an'ony* „, ce dernier mot, *ony*, s'écrit ainsi dans le dialecte hova, mais il s'écrit plus généralement: *oñy* (prononcez *oñgai*) à cause de sa provenance du malais *soñgai.* Il ne signifie pas *lac*, mais *rivière.*

5° James Sibree a traduit le vers: " *Fenomanana no avy atsinanana* „ par " La pleine lune possédant l'est „. Le mot *fenomanana* signifie *pleine lune*, le verbe *manana* (posséder) est introduit ici mal à propos par Sibree.

6° *Ambohimanga* (colline bleue) est l'ancienne capitale hova, la ville sacrée des ancêtres, le lieu de sépulture d'*Andrian'impoïna.* Elle est située à environ quatre lieues de Tananarive; chaque année la dernière reine s'y rendait en grande cérémonie, conformément à la coutume des ancêtres.

7° Les trois vers,

> " *Ny tany ambaratonga*
> *Tsy mahatafintohina*
> *Tsy mahasasa mandeha* „

ont été traduits par James Sibree, comme ci-dessous:

> " Le royaume est une *échelle* (en raison de la hiérarchie)
> Qui ne fait pas broncher,
> Et qui ne fatigue pas celui qui la monte „.

Nous ferons observer que *ambaratonga* ne signifie point une *échelle*, mais un " plain-pied au milieu d'une montée „, et cela s'applique tout naturellement au plateau central de l'Ankova, qui est plaine d'un côté et montagne de l'autre, le sol s'élevant graduellement par plateaux, depuis la mer jusqu'à l'altitude de la grande forêt.

Ces observations une fois faites sur la traduction du chant de la Reine, dont certains passages ne nous paraissent pas encore très clairs, nous allons aborder un terrain moins élevé et plus accessible, la chanson populaire ou chansonnette. En voici quelques spécimens:

N° 1.

" ***Veloma, razoky!***

Veloma, razoky!
Fa maty noho ny fitiávana anao
Izandrinao!

*

Veloma, razoky!
Fa ho any amy ny varo-tsy-mifody
Izandrinao!

*

Veloma, razoky!
Fa matin' java tsinahy
Izandrinao!

*

Veloma, razoky!
Fa' ny fitaka nataonao no nahafaty
Izandrinao!

*

Veloma, razoky!
Fa tongotr' ombi andákana
Izandrinao!

*

Veloma, razoky!
Fa tafik' efa nivoaka izao
Izandrinao!

*

Veloma, razoky!
Fa tandro-boahihy izao,
Izandrinao! "

Traduction.

" ***Adieu, frère aîné!***

Adieu, frère aîné!
Il meurt à cause de son amitié pour toi,
Ton frère cadet.

*

Adieu, frère aîné!
Il meurt de mort involontaire,
Ton frère cadet.

*

Adieu, frère aîné!
C'est la tromperie qui a tué
Ton frère cadet.

*

Adieu, frère aîné!
Il a mis le pied dans la pirogue,
Ton frère cadet.

*

Adieu, frère aîné!
Il a fini de transplanter son riz,
Ton frère cadet.

*

Adieu, frère aîné!
Il est parti pour sa dernière expédition
Ton frère cadet.

*

Adieu, frère aîné!
Il a gratté la corne [1],
Ton frère cadet. „

[1] Il *a gratté la corne (Tándro boahihy izao)* est une locution employeé familièrement, pour dire qu'une affaire est arrêtée, conclue, terminée, sans possibilité d'y rien changer.

N° 2.

" ***Ny tiana tokana hiany!***

Maro no tiana,
Be no heverin' ny saina,
Fa ny tiana tokana hiany,
Ny tiana sarotr' avela,
Ny tiana sarotr' afoy
Fa ny tiana tokana hiany,
Veloma hianao fa tiana,
Masina indriako fa tiana
Sady tiana tokana hiany!

*

Izy re no malala,
Izy re no tsy foy,
Sady tiana tokana hiany
Ny tiana sarotr' avela
Ny tiana anie tsy roa,
Ny tiana anie tsy telo,
Fa ny tiana tokana hiany
Ny tiana sarotr'avela.
Na lavitra aza ny tany,
Na tondraka aza ny rano,
Ny tiana tokana hiany!
Ny tiana sarotr'avela!

*

Ny anaovako azy veloma,
Ny anaovako azy masina,
Sady tiana tokana hiany,
Ho vangiako raha malahelo,
Hodiako raha tsy támbana
Sady tiana tokana hiany
Veloma hianao fa tiana
Masina hianao fa tiana
Sady tiana tokana hiany! "

TRADUCTION.

“ ***La seule bien-aimée.***

Beaucoup sont aimées,
Plusieurs occupent ma pensée,
Mais il n'y en a qu'une seule la bien-aimée.
Il est difficile de laisser celle qu'on aime,
Il est difficile de quitter celle qu'on aime,
Mais il n'y en a qu'une seule la bien-aimée!
Salut à toi que j'aime!
Salut à toi que j'aime!
A toi qui, seule, es ma bien-aimée!

*

Oui, c'est elle la bien chérie,
Oui, c'est elle qu'on ne peut quitter,
C'est elle seule qui est la bien-aimée,
Celle qu'il est difficile de laisser.
De bien-aimées, il n'y en a pas deux,
De bien-aimées, il n'y en a pas trois,
Il n'y en a qu'une seule, la bien-aimée,
Celle qu'il est difficile de quitter.
Si loin que soit le pays,
Si débordée que soit la rivière,
C'est elle seule qui est la bien-aimée,
Celle qu'il est difficile de quitter.

*

Je lui fais mes adieux,
Je lui dis: au revoir!
C'est elle seule la bien-aimée!
J'irai la visiter quand je serai triste,
J'irai la voir quand je serai sans empêchement;
C'est elle seule qui est la bien-aimée.
Adieu, à toi, mon aimée,
Au revoir, à toi, mon aimée!
A toi ma seule bien-aimée! ”

N° 3.

« ***Iroy a! Nankaiza izy teto?***

Niandry azy teto anie aho,
Ka tsy mba nitranga re;
Lasa nivily izy,
Iroy a! Nankaiza izy teto?

*

Ny lala-nodiaviny,
Tsinjoko hiany re,
Nefa tsy fantatro.
Iroy a! Nankaiza izy teto?

*

Fitiavako azy re,
Dia mbola betsaka;
Fa ny azy no tsy fantatro
Iroy a! Nankaiza izy teto?

*

Ela niandrasana,
Ela nandaozana,
Mila hafoikò re!
Iroy a! Nankaiza izy teto?

*

Fitia mifamaly
Mahazo mihanta,
Ka miveréna re!
Iroy a! Nankaiza izy teto?

*

Efa nandaozana,
Ka tsy ho aiza intsony?
Ny lasa aza neniko!
Iroy a! Nankaiza izy teto? »

TRADUCTION.

" ***Ah! où est-il allé?***

Je l'ai attendu ici,
Mais il n'a pas paru.
Il est parti d'un autre côté,
Ah! où est-il allé?

*

Le chemin qu'il devait suivre,
Pourtant je l'ai bien regardé;
Je n'y puis rien comprendre.
Ah! où est-il allé?

*

J'ai de l'amour pour lui,
Et beaucoup encore;
Mais de son amour... à lui, je ne sais rien.
Ah! où est-il allé?

*

Longtemps je l'ai attendu!
Depuis longtemps il est parti.
Tâchons de l'oublier!
Ah! où est-il allé?

*

L'amour, quand il est réciproque,
Obtient ce qu'il demande;
Reviens donc à moi!
Ah! où est-il allé?

*

Depuis longtemps il est parti!
Ne viendra-t-il donc plus jamais?
Il est parti! ne le regrettons pas!
Ah! où est-il allé? "

A Madagascar les chansons d'amour abondent, mais les pieux cantiques y sont aussi fort en honneur, et se font entendre dans toutes les cérémonies religieuses. On chante encore aujourd'hui à Tananarive les strophes que les martyrs de *Faravohitra* entonnaient en gravissant la colline du supplice. On a publié plusieurs volumes de ces cantiques composés en langue malgache, et mis en musique par les missionnaires établis dans Madagascar; mais ce ne sont pas des produits de la muse indigène. Dans le petit volume imprimé, en 1852, à l'île Bourbon, sous le titre: *Ny fandaisiny ny tsaiky Malagasy* (Le Manuel du jeune Malgache), on trouve un grand nombre de ces cantiques, avec leur traduction en français par les Pères Jésuites. Nous en extrayons les suivants:

Valin-katia amy ny fo ny Jeso.

1.

Hatsihi' nao hôrofan' aho
Fa reñy ko ny antso nao,
Izaho va mba hahasaky
Halaiña ny hamorá'nao?

Fanarahana.

O Jeso, maimay hatiávan'
Aláo fôño ny fo nao,
Vahá izy, sokáfo izy,
Fa tia ko hidira' ko.

2.

Izaho va handla maso
Amy ny lálan' natao nao?
Hitady ny haréna masin'
Aty an-tany ratsy ty?

3.

Anao, o Jeso Tompo manitra
Tolora'ko ny tena ko;
Tania'ko ny taona maro
Tsy nanompóa'ko anao.

4.

Nankadalain' ny ángatr'aho,
Naronjy ny tam-pahotán';
Fa ny fañilo nao nanáva
Ny izin'ny fanihy ko.

5.

Handaisi' ko an-tany aby
Ny laza ny añara' nao;
Ny halemíam-be ny fo nao,
Hatóro ko ny ráza' ko.

6.

Vahá ny gádra be ny ain'ko,
Hombá'ko ny Anjely nao,
Hiôsik'anao isan'andro,
Hañetsak' aiñ' an-dria' nao.

7.

Hisento aho isan'alin'
Ampara-fifatésa'ko;
Ny féo ko tsy mba ho voly
Zao fañarahan'antsa zao:

Fanarahana.

O Jeso, maimay hatiávan'
Aláo fóño ny fo nao,
Vahá izy, sokáfo izy,
Fa tia ko hidira'ko ».

TRADUCTION.

« *Amour au cœur de Jésus.*

1.

Oui, je l'entends, ta voix m'appelle,
L'aimable voix de tes bienfaits;
Pourrai-je encor être rebelle
A sa douceur, à ses attraits?

Refrain.

O Jésus, tu veux que je t'aime,
Découvre-moi ton divin Cœur,
Et dans le mien, beauté suprême,
Naîtra l'amour et le bonheur.

2.

Eh quoi! de ta loi salutaire
L'éclat fatiguerait mes yeux!
Et je chercherais sur la terre,
Des biens qu'on ne trouve qu'aux cieux.

3.

Auteur souverain de mon être,
A toi je veux le consacrer;
Trop tard j'appris à te connaître,
Trop tard j'appris à t'adorer.

4.

Jouet d'une folle sagesse,
Je courais d'erreur en erreur;
Mais aujourd'hui de mon ivresse
Ta grâce a dissipé l'horreur.

5.

Ton nom, par ma reconnaissance,
En tous climats sera porté;
Et l'on verra que ta puissance
Le cède encor à ta bonté.

6.

Ah! quand pourrai-je avec les Anges,
Débarrassé de tous mes liens,
Et toujours chantant tes louanges,
Boire à la source des vrais biens!

7.

Jusqu'à cette heure fortunée,
Sans fin mon cœur soupirera,
Et mille fois, dans la journée,
Ma bouche te répétera:

Refrain.

O Jésus, tu veux que je t'aime,
Découvre-moi ton divin Cœur,
Et dans le mien, beauté suprême,
Naîtra l'amour et le bonheur „.

2.

" *Ny nania miherina.*

Miravo be anao, Mary, mahita
Ny zanak'ao miverin'amy nao,
Manamboho ny tany nania'ny,
Miantôrak' amy ny tana' nao
Mifaly be anao afaka tañy,
Vao havy fo, vao hiaiñaiñ'anao;
Ka ny fanenty nao koa latsa-drano,
Rano ny haravóa'nao.

Fanarahana.

O Mary, zaho milafik'
Amy ny fandia'nao;
Malahélo fatatr'aho,
Tomáñy ny haratsy ko.
Malilo aho, Reny,
Malilo aho zanak'ao „.

TRADUCTION.

" *Retour du pécheur.*

Ah! qu'il est doux pour le cœur d'une mère,
L'instant heureux où, vainqueur du trépas,
Son fils revient de la rive étrangère
Avec transport se jeter en ses bras!

Pour elle enfin ont cessé les alarmes;
Elle respire après tant de douleur;
Si de ses yeux coulent encor des larmes,
Ce sont des larmes de bonheur!

Refrain.

A tes pieds, Vierge Marie,
Reconnais-tu ton enfant?
Il déplore sa folie,
Il pleure son égarement.
Pardon, Mère chérie,
Pardon, pardon à ton enfant!! „

Dans les temples protestants de Madagascar, on chante aussi des cantiques. Voici celui qui a été composé pour célébrer le saint jour du dimanche.

Andro alahady.

Mandrenesa, Zanahary,
Ny saotr'atao ny olonao;
Aok'ho sitrakao ny feony
Mivávaka ka nihira.

*

Tianay ny andro sabata
Zay anay ety an-tany;
Fa ny tsara ao an-danitra
Izan no antenaïn indrindra.

*

Tsy hahita ny mahory
Fáfa-tsasatra, afa doza,
Afak'ota, afa-jaly,
Tsy hisy alahelo'ntsóny.

*

Tsy handrahona ny andro,
Alina tsy hisy'ntsótry;
Andro mahafinaritra
Haharitra mandrakizay.

*

Sabat' tsar' indrindr' izany
Endra ka hiseho faingana!
Sasatr' isikia rah'aty
Sambatr' isikia rah'any! „

Traduction.

“ ***Jour du dimanche.***

Prête l'oreille, ô Créateur,
Aux actions de grâces de ton peuple!
Puissent leurs voix te plaire
Dans la prière et dans la louange!

*

Nous aimons le jour du sabbat,
Notre jour ici sur terre;
Mais ce beau jour dans le Ciel
Est notre suprême espérance.

*

A jamais exempts de trouble,
Libres du péché, libres du mal,
De la fatigue et de la douleur,
Nous n'aurons plus de sujet de larmes.

*

Sans nuages sera le jour,
La nuit ne sera plus;
Jour de paix et de joie,
Qui ne finira jamais!

*

Oh! qu'il luise bientôt,
Le meilleur de tous les sabbats!
Si nous sommes accablés ici-bas,
Combien bénis serons-nous là haut! „

Enfin, en terminant cette notice, nous donnerons une petite romance *(Antsa kely)*, traduite du français en malgache, et dont les paroles françaises ont été mises en musique par Pasquale Goldberg, un de mes vieux amis.

“ ***Heureux son sort!***

L'hirondelle,
A la tourelle,
Ferme son aile
Et puis s'endort.
Heureux son sort! *(bis)*

*

Dans la rose,
A peine éclose,
Le ver se pose;
Il ronge et dort.
Heureux son sort! *(bis)*

*

Sous les eaux,
Dans les roseaux
Des longs canaux,
Le poisson dort.
Heureux son sort! *(bis)*

*

Dans l'herbette,
La pâquerette,
Douce fleurette,
S'incline et dort.
Heureux son sort! *(bis)*

*

Triste et las,
Seul, ici bas,
Je ne dors pas:
C'est qu'Elle dort,
Oui, dans la mort...!
Heureux son sort! *(bis)* „

IMITATION EN MALGACHE.

“ ***Tsara tokoa zany!***

Antety ny rantsana
Ny voro-madinika
Ny ela'ny mirindrina
Izy matory boneka.
Tsara tokoa zany! (indroa)

*

Anaty voa manga
Mahadaika ny olitra
Ary ao mikikitra
Izy matory boneka.
Tsara tokoa zany! (indroa)

*

Anaty ranomasina
Miritra ny filaoka
Mikatsaka fahanina
Izy matory boneka.
Tsara tokoa zany! (indroa)

*

An'ála ny ahitra
Malemilemy ketsika
Amy ny tafiotra;
Izy matory boneka.
Tsara tokoa zany! (indroa)

*

Endre! Zaho mitokana,
Malahelo sy tofoka,
Lasan'aiña ny tiana,
Izy matory boneka.
Tsara tokoa zany! (indroa) „

Di una mola asinaria rinvenuta presso Rivoli (Torino);

Nota del Dott. ANTONIO TARAMELLI.

Per la gentilezza del signor prof. Dr. Piolti, del Gabinetto mineralogico dell'Università di Torino, si potè recuperare per il locale Museo d'Antichità una frammentaria macina da granaglie, d'età romana, che da lungo tempo giaceva abbandonata in un fondo situato a poca distanza da Rivoli.

Quello che è conservato è poco più che la parte centrale del *catillus*, coi due imbuti comunicanti fra loro, uno all'altro opposto, dalla superficie interna molto levigata, esternamente con una fascia in rilievo, posta a segnare il punto del maggiore restringimento e, alle estremità del diametro, coi due fori rettangolari per l'applicazione delle *mobilia*, o stanghe, per mettere in moto la macina, le quali *mobilia* erano poi trattenute nel loro incavo da cunei, o caviglie, che passavano in appositi fori circolari. Alle stanghe veniva attaccato l'*asellus*, che cogli occhi bendati faceva girare la macina sopra la base, o *meta*, che nell'esemplare di Rivoli non è conservata, come disparve anche il pernio che sosteneva il *catillus* e la lamina di ferro coi fori che dava passaggio al grano nel vano tra la *mola* e la *meta*.

Pur essendo così frammentario, tuttavia l'esemplare di Rivoli si riconduce a quegli usuali tipi di mole romane che ci sono note e che si vedono ancora conservate a Pompei, nella *Casa del Labirinto* (1), nella *Casa di Sallustio* (2) o rappresentate nei monumenti, come in quello sepolcrale di Eurysaces (3), o nel sar-

---

(1) Blümner, *Technologie und Terminologie der Gewerbe und Künste*, I, pag. 41; Gell, *Pompejana*, I, pag. 189, fig. 37.

(2) Overbeck, *Pompei*, 4ª ediz., pag. 393.

(3) *Monum. dell'Inst. di Corrisp. Archeolog.*, II, 58; Blümner, op. cit., fig. 5.

cofago di Villa Medici (1) o nel rilievo pompeiano (2) e in quello del Museo Chiaramonti (3), i quali tutti sono molto conosciuti, anche per i legami tra l'umile professione del *molendinarius* ed alcuno dei più illustri spiriti dell'antichità.

Ad accrescere il tenue valore di questo modesto rinvenimento archeologico concorre specialmente l'esame mineralogico, a cui il signor prof. Piolti ha sottoposto il materiale di cui è fatta la macina, dal quale esame risultano alcuni dati che giudicai non privi d'interesse per lo studio della storia, purtroppo assai povera di fatti, dell'agro Taurino in età romana. L'esame microscopico della pietra della macina rivolese ha precisato quanto appariva già dall' esame litologico, come dimostrò ampiamente il signor Piolti, in una nota presentata a questa stessa Accademia (4), che cioè si tratta di roccia lavica leucitica e più precisamente di una varietà indicata col nome di *leucotefrite*, roccia che manca assolutamente in tutta la regione subalpina, e che si trova nelle regioni dei vulcani spenti dell'Italia centrale; anzi il D^r^ Piolti, accennando a confronti diligentissimi fatti colle roccie vulcaniche dei varii gruppi Laziale, Vesuviano, Vulsinio, Ciminio, viene alla conclusione che è con quelle della regione Ciminia che ha, non solo affinità, ma assoluta identità la pietra della macina da lui rinvenuta.

La presenza di materiale vulcanico di tanto lontana provenienza, impiegato in strumenti da macina o anche ad altro uso più modesto in età romana, non è un fatto isolato nella regione Taurina, poichè alcuni mesi or sono il D^r^ Colomba, dello stesso Museo mineralogico di Torino, richiamava l'attenzione sopra il rinvenimento di un blocco di leucotefrite, murato nel rivestimento di un pozzo d'età romana, che venne in luce mentre si scavavano le fondazioni della civica scuola Pacchiotti, presso via S. Tommaso; e fu appunto in seguito a questa scoperta, di cui il Colomba mise in luce tutta l'importanza, che il D^r^ Piolti ed io, per due criterii diversi, ma collimanti allo scopo medesimo,

---

(1) Jahn, nei *Berichte der Sachs. Gesells. der Wissen.* XII, pag. 342.

(2) Overbeck, *Pompei*, II, pag. 205.

(3) Jahn, l. c., pag. 343.

(4) Vedi negli " Atti della R. Accad. delle Scienze „ (Clas. sc. fisiche), ad. 3 dicembre 1899.

fummo tratti a prendere in esame il materiale litico dei manufatti romani del museo di Torino e quello larghissimo portato in luce dagli scavi ora in corso al Palazzo Reale, dai quali vennero a conoscenza fatti di grande importanza per la storia di Torino (1). Ma mentre nessun'altra scoperta ci veniva esibita dagli scavi ora accennati, il Dr Piolti scopriva, a pochi chilometri da Torino, presso Rivoli, la frammentaria macina di cui è parola in questo scritto, che è di roccia perfettamente identica, anzi di stessi caratteri di cava, che quella analizzata dal Colomba del sottosuolo torinese. Ma oltre a questi due fatti, si veniva ad aggiungere un'altra osservazione, pure per parte del Dr Piolti, la quale viene a corroborare i risultati delle precedenti osservazioni.

Nel museo di antichità di Torino esiste una macina da grano, indicata come romana e proveniente dagli scavi fatti in Roma per la costruzione del palazzo del Ministero delle Finanze; orbene, la roccia di quella macina è perfettamente consimile a quella dei due esemplari di Torino e di Rivoli, dal che nascerebbe naturale la conseguenza che da una stessa cava della regione Ciminia venissero le macine di Rivoli e quella romana del Museo d'Antichità, nonchè il blocco torinese che servì a rivestire il pozzo di via S. Tommaso; la quale conseguenza, se è piana e ammissibilissima per la macina trovata in Roma, che è a non grande distanza dai monti Cimini, è più sorprendente per i due altri reperti rivolese e torinese.

Però, in base alle notizie tramandate dagli antichi scrittori ed alle conoscenze archeologiche si può benissimo dare spiegazione di questo fatto, che è pur sempre degno d'interesse.

Infatti nelle opere degli scrittori di storia naturale e degli architetti antichi noi troviamo alcune notizie, non solo di carattere generale, ma che direttamente possono interessare pel nostro studio. Poichè non solo troviamo detto che le pietre vulcaniche in genere, per essere scabre e grossolane, erano preferibili alle altre per l'uso di macine (2), ma vediamo anche con-

(1) Colomba, *Su alcuni materiali da costruzione in leucotefrite del sottosuolo di Torino* ("Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino", vol. XXXIV, ad. 14 maggio 1899).

(2) Ovid., *Fast.*, VI, 318: *et quae pumiceas versat asella molas;* cfr. Teophrast., *De lapid.*, 9; Arist., *Meteor.*, IV, 6; cfr. la *mola scabra* di Ovidio, in

cordemente asserito che le migliori cave di pietra da macina dell'Italia erano quelle dette *Anicianae*, nelle terre dei Tarquiniensi, a poca distanza dal lago di Bolsena; è la notizia che troviamo in Vitruvio (1), come anche in Plinio (2), che però la riporta da Varrone, accennando non solo a quelle superstiziose fole che troviamo tanto frequenti nell'opera pliniana, ma altresì a qualità che anche lo scienziato moderno riconosce proprie delle roccie laviche e che le rendono apprezzatissime per gli usi della edilizia e della vita pratica. Non possiamo veramente precisare il luogo ove si aprivano le cave *Anicianae*, forse nei terreni di qualche famiglia Anicia; la indicazione però degli autori ci porta verso il lago di Bolsena.

Le roccie del gruppo vulcanico vulsinio, esaminate dal signor Colonnello Verri, non sono perfettamente simili a quelle dei materiali del sottosuolo torinese e delle macine descritte, che invece, come fu detto, hanno tutte le qualità delle lave dei Ciminii, ancora oggi usate per pietre da macine (Salmoiraghi, *Materiali da costruzione*, p. 412). Si può però ammettere, data la brevissima distanza tra i Cimini ed i Vulsinii, che l'espressione di Plinio e di Vitruvio si debba intendere in senso lato, estesa anche alle roccie dei monti Cimini, che sono pure nel territorio di Tarquinia, non lungi da Bolsena.

Non è così improbabile che in questa indicazione si possa scorgere una testimonianza dell'uso delle cave di leucotefriti Ciminie, che, ancora oggi in uso, lo erano anche in antico, come lo prova la macina di Roma, quella del museo Torinese non meno che i due rinvenimenti di Torino e Rivoli (3).

Ars Amandi, III, 290; *Medicamina fac.*, v. 58, e l'ὀκριόεις λίθος dei Greci, di cui il migliore era quello di Nisyros (Strab., X, 488).

(1) Vitruvio, II, 7, 3: *lapicidinae in finibus Tarquiniensium quae dicuntur Anicianae, colore quemadmodum albanae, quarum officinae maxime sunt circa lacum Vulsiniensem.*

(2) Plinio, *Hist. Nat.*, XXXVI, 135: *mola versatilis Vulsiniis inventas;* ivi, 136: *nusquam hic utilior quam in Italia gignitur;* e ivi, 168, ricorda le mole bianche *in Tarquiniensi Anicianis lapicidinis, circa lacum Vulsiniensem.* Cfr. Blümner, op. cit., pag. 27 e seg.

(3) Può anche sorprendere come a Torino, a' piedi delle Alpi, dove era tanta varietà di roccie scabre e dure, si avesse bisogno di ricorrere alle leucotefriti Ciminie; si osservi però che vi sono centri di fabbricazione che possono produrre materiale, anche di scarso valore intrinseco, ma in quan-

Ci rimane ora da risolvere un'altra difficoltà, quella della presenza di leucotefriti Ciminie nell'agro Taurino.

Data la distanza che intercorre tra il centro di produzione e di fabbricazione di questi materiali e l'agro Taurinense, non parmi si possa pensare a trasporti diretti per via di terra, lungo quella via stradale tirrena che troviamo complessivamente chiamata nell'itinerario di Antonino, col nome di Aurelia, colla indicazione " *Via Aurelia, per Tusciam et Alpes Maritimas Arelatum usque m. p.* DCCXCVII " (1). Col trasporto per via terrestre le macine sarebbero arrivate a Torino con un prezzo di costo considerevolmente superiore al valore della merce; è invece probabile che dai Cimini esse fossero trasportate al porto di Centumcellae,

---

tità tale da far concorrenza anche a prodotti locali di regioni lontane. Inoltre può anche darsi che la confidenza nelle macine ciminie fosse diffusa nell'agro Taurino dai primi coloni stanziati da Augusto nella colonia, giacchè può benissimo ammettersi che i veterani in congedo, che formarono il nucleo della popolazione cittadina e rustica, essendo di origine in gran parte o latina o della Italia centrale, abbiano portato abitudini e tradizioni agricole della regione nativa, colla quale essi ed i loro discendenti mantennero le relazioni, facilitate dalla civiltà dell'impero romano.

(1) Gli studiosi della rete stradale dell'impero romano, cominciando dal Bergier nel suo grande lavoro *Les grands Chemins de l'Empire Romain*, venendo sino al Mommsen nel *Corpus Inscriptionum latinarum*, vol. V, part. I, pag. 885; cfr. vol. V, part. II, pag. 828, e all'Hirschfeld, ivi, vol. II, pag. 634, hanno variamente discusso intorno all'estensione del nome di *via Aurelia*. Parmi però conclusiva la dimostrazione proposta recentemente dallo Hall, *The Roman on the Riviera and the Rhone* (London, Macmillan, 1898), pp. 162-185, che nell'età imperiale, quando da tempo erano state aperte le grandi vie e vi s erano avviate le relazioni di ogni specie, si fossero semplificate le indicazioni: a quelle relative; e così il nome di Via Aurelia, dato prima al solo tronco costrutto da C. Aurelius Cotta nel 241 a C. da *Roma* a *Vada Volaterrana*, abbia compreso i seguenti tronchi, prima distinti con indicazioni speciali, andate più tardi in disuso, e cioè l'*Aemilia Scauri* di M. Aemilius Scaurus, del 109 a. C., da *Vada Volaterrana* a *Vada Sabatia;* la *Iulia Augusta* di Augusto, del 12 a. C., da *Vada Sabatia* al Varo; la *Massiliensis*, del 154 a. C., dal Varo a *Forum Iulii*, ed infine la *Domitia* di Cn. Domitius Ahenobarbus, del 121 a. C., da *Forum Iulii* ad Arelate. Tutti questi tronchi ebbero nell'itinerario Antoniniano la designazione ufficiale complessiva di Via Aurelia, che sembra quasi contraddire le altre sopraccennate, come ad un dipresso ora si indica nei documenti e negli orarii ufficiali col nome di linea Torino-Roma quella che effettivamente ed anche finanziariamente è costituita dai tronchi Torino-Alessandria, Alessandria-Genova, Genova-Pisa, ecc.

che anche oggi, col nome di Civitavecchia, è lo scalo naturale di tutta la regione Cimina Vulsinia, e che da quel porto fossero largamente diffuse ai paesi anche lontani per la facile e poco costosa via marittima, anche oggi la più usata per il trasporto delle pietre e dei marmi.

Sbarcate a Genua o a Vada Sabatia, queste macine, insieme a tanto altro materiale da costruzione, come i marmi lunensi, i greci ed i finissimi marmi orientali, che non mancano nelle costruzioni romane di Libarna, di Industria, di Bene Vagienna, di Torino, etc., erano avviate attraverso l'Apennino a Dertona, o per la via Postumia o per l'Aemilia Scauri, e di lì poi per Hasta a Torino.

Non ho creduto inopportuno, a proposito di questa nuova scoperta di Rivoli, indagare per quali vie, si potessero avere nella regione subalpina materiali d'uso di tanto lontana provenienza, anche per mettere in maggiore evidenza sia l'alta cultura della regione stessa, sia l'altezza a cui erano giunti i traffici e la frequenza dei rapporti commerciali tra le varie contrade della nostra penisola, in un epoca nella quale con tanto senno e con tanta opportunità si provvedeva ai bisogni della vita pratica, non meno che a quelli dello spirito e della educazione.

Nota. — La presente notizia era già data alle stampe quando io ebbi l'opportunità di esaminare le rovine della città ligure di Libarna, presso Serravalle di Scrivia e di studiare gli scavi e le raccolte fatte in quell'interessante area dall'egregio avv. Gaetano Poggi. Fra i materiali da lui raccolti esiste una mola asinaria, che è spezzata in frammenti, ma pure conservata nelle sue varie parti, sia della *meta*, che ha figura di tronco di cono, a larga base, quanto del *catillus*, coi suoi due imbuti contrapposti e comunicanti. Questa mola libarnese ha figura e dimensioni presso a poco identiche a quelle di Rivoli e di Torino, come sono identici i particolari delle due ali diametrali per l'incavo rettangolare destinato ad accogliere le *mobilia* ed i fori per le caviglie. Recai al prof. Piolti un frammento della roccia di cui la macina era composta, ed egli ebbe a dichiararmi che essa è assolutamente identica a quella del blocco torinese e delle due macine descritte.

Con quest'ultima osservazione si estende l'ambito della ricerca e si corroborano le ipotesi fatte in base ai dati dell'agro taurino e del museo torinese, come anche si ha un sostegno all'ipotesi che le macine di materiale ciminio dal porto di Genua attraversassero l'Apennino per la Postumia, sulla quale era anche Libarna.

Voglio augurarmi che si possano fare maggiori ricerche per provare questo interessante fatto del commercio interregionale dell'Italia antica e sarei perciò grato se i miei colleghi della direzione dei musei e degli scavi mi volessero far tenere i saggi delle pietre di macine conservate negli Istituti da loro diretti, perchè io possa sottoporli all'esame scientifico del Dr. Piolti.

L'arte della lana in Ivrea nei secoli XIV e XV;

Nota di FERDINANDO GABOTTO.

La storia dell'arte della lana, ossia della fabbricazione dei panni, che costituisce oggi e costituì già in passato una delle più notevoli e fiorenti industrie del Piemonte, è, come tanti altri aspetti della storia nostra, ancora in gran parte da fare. Non si hanno che alcuni lavori speciali, inserti in opere maggiori, o publicati a parte, per alcuni luoghi determinati, come Biella (1), Pinerolo (2), Chieri (3), Savona (4); ai quali io mi propongo di aggiunger qui quanto mi venne fatto di trovare per Ivrea nei secoli XIV e XV.

L'esistenza di libri statutari eporediesi fin dalla prima metà del secolo XIII, almeno, è attestata da molti documenti (5); ma essi non sono fino a noi pervenuti, nè tra i rari statuti che isolatamente si conservarono, di quell'età più antica, alcuno v'è

(1) MASSERANO, *Biella e i Dalpozzo*, Biella, 1867; POZZO, *Biella*, 40 segg., 164 segg., 202 segg., Biella, 1881. Il Masserano dà il testo degli *Statuti dell'arte della lana* di Mosso; il Pozzo quelli di Biella relativi al " collegio dei drappieri ".

(2) A. CAFFARO, *L'arte del lanificio in Pinerolo e gli Statuti di essa*, Torino, 1893 (estr. dalla *Misc. st. ital.*, t. XXX). Altre notizie aggiunsi ne' miei lavori *Pinerolo e i suoi recenti storici*, 27 segg., Pinerolo, 1893, e *Gli ultimi princ. di Ac.*, 598 segg., Pinerolo, 1397. Cfr. anche CARUTTI, *Storia di Pinerolo*, 312 segg., 2ª ed., Pinerolo, 1897, e DEMO, *Il rio Moirano*, in *Bibl. della Soc. stor. subalp.*, I, 286 segg., Pinerolo, 1899.

(3) L. GIORDANO, *L'Università dell'arte del fustagno in Chieri*, Torino, 1895, colla mia recensione in *Riv. stor. ital.*, XIII, 48, Torino, 1896.

(4) G. FILIPPI, *Dell'arte della lana in Savona nei secoli XIV e XV*, Genova, 1896 (estr. *Giorn. ligust.*, XXI).

(5) Tali documenti saranno editi da me prossimamente fra *Le Carte dell'Archivio vescovile d'Ivrea*, nella *Bibl. della Soc. stor. subalp.* Per quanto concerne le più antiche notizie di Statuti eporediesi, mi astengo dal riferirle qui perchè ne discorrerà di proposito in un suo lavoro l'amico avv. Edoardo Durando.

che riguardi l'arte della lana, o l'industria dei panni che dir si voglia. Dobbiamo dunque discendere alla collezione del 1315, colle addizioni successive fino al 1329, in cui parecchi capitoli si riferiscono a tale oggetto, presentandoci " l'arte „ già in uno stato di sufficiente sviluppo (1).

Un primo " capitolo „ riflette più particolarmente i tessitori e le tessitrici, così di pannilini, come di pannilana: è detto che il podestà, od il vicario, entro i primi quindici giorni del suo reggimento, deve far venire in sua presenza " tutti i tessitori e le tessitrici della città d'Ivrea e del suo distretto, e tutti coloro che facciano essi, o facciano fare da altri, panni di lana, ed i loro discepoli „, e farli giurare di " serbare e tener fedelmente la tela, il filo, la sonza e la crusca che ricevano per lavoro, al maggior vantaggio dei proprietari di essa „. Si regola poi il prezzo della mano d'opera secondo il diverso lavoro; si fa obbligo di prendere il filo a peso, e rendere a peso la tela, quando così venga chiesto; s'impone l'osservanza della larghezza consueta del panno e della tela, senza che si possa restringere; si colpisce il rifiuto di esercizio del mestiere, e lo si vieta poi a chi sia incorso per ciò nella multa, finchè l'abbia pagata; si proibisce, infine, di mescolar pelo di bue, o borra di follatoio, colla lana senza farne espressa dichiarazione al compratore; e pur ingiungendosi a ciascuno di accusare il compagno contravventore, si pongono appositi " accusatori „, a cui si assegna la metà del banno riscotibile volta a volta (2).

---

(1) Edita in *M. h. p.*, *Leges munic.*, I, 1091-1344.

(2) Col. 1141: " Item statuerunt et ordinaverunt quod potestas sive vicarius infra xv dies principii sui regiminis faciat venire omnes testores et testrices civitatis Yporegie et districtus, et omnes facientes et fieri facientes pannos de lana, et eorum desentes (*l.*: discentes); ipsosque iuvare faciat quod salvabunt et gubernabunt fideliter telam, filum, axungiam et brenum quem ad laborandum receperint ad maiorem utilitatem eorum quorum fuerint supradicta, et quod non accipient de pariete tele de lino nisi imperiales xviii, et tele canabe subtilis imperiales xii, et tele de stupa imperiales viiii, et de pariete mantilorum et sacorum imperiales xiiii, et cortine imperiales xviii, et toagliarum imperiales xii, et panni de albaxio imperiales vii, et quod accipient filatum ad peysam et reddent telam ad peysam si inde fuerint requisiti, sub banno solidorum v pro quolibet et qualibet vice et pro quolibet capitulo non observato; et quod non restringent telam nec pannum, sed consuetam latitudinem observabunt, sub banno soli-

Di queste disposizioni più di una ha riscontro negli Statuti dell'arte della lana di altre terre subalpine, e vedremo meglio svolta e precisata in ulteriori Statuti d'Ivrea stessa. Così il divieto di mescolar materie diverse nella tessitura dei panni si trova pure a Biella nel 1348 (1), a Savona nel 1376 (2), a Pinerolo nel 1440 (3), a Cuneo nel 1535 (4), con pene molto

---

dorum xx pro quolibet et qualibet vice, et quod de predictis vel aliquo predictorum non recusabunt texere et eorum officium exercere sub banno solidorum x pro quolibet et qualibet vice, nec possit postea ulterius texere donec banna soluerit supradicta. Item quod non ponent nec miscebunt, nec poni seu misceri facient vel permittent, pilum bovinum, vel boram de paratoro, cum lana in panno, nisi ea emptoribus fecerint manifesta, sub banno solidorum v pro quolibet et qualibet vice. Et de predictis omnibus teneantur vicissim alter alterum accusare, et nichilominus ponantur super hiis accusatores, et quilibet possit accusare, et habeat accusator medietatem banni „.

(1) Pozzo, Op. cit., p. 44, n. 2: " Item quod nullus de dicto collegio ponat vel ponere faciat in aliquo panno pilum bovinum nec rixinum nec aliquem malum pilum nec malam lanam neque burram, neque lanam pelatam ad ferrum, et hoc in banno solidorum lx papiensium pro quolibet et qualibet vice „.

(2) Filippi, p. 27: " Et ne fraus aliqua comitti possit in dicta arte per aliquam personam dicte artis; sive sit mercator, sive sit laborator, quocumque nomine appelletur, statuerunt et ordinaverunt quod aliqua persona dicte artis non possit, valeat nec debeat aliqua causa vel ingenio facere vel fieri facere, laborare vel laborari facere, textere seu texti facere, batere seu bati facere, tingere seu tingi facere, pillum seu pillos trichi (*l.*: hirci) sive capre, nec etiam condelam aliquam peliparioram misclatos seu misclatam cum aliqua alia lana cuiuscumque generis seu conditionis existat. Et si quis contrafecerit in predictis, vel aliquo predictorum, condempnetur et condempnari debeat per rectores dicte artis a libris quinque usque in libris decem Ianue arbitrio rectorum et consiliorum dicte artis; et ultra, quod talis lana sive pannus factus ex ea comburatur de presenti in platea magna erbarum communis Saone in odium et preiuditium illius qui proinde delinquerit, tamquam rem falsatam, ad hoc ut delinquenti et ceteris redat in exemplum „.

(3) Caffaro, p. 41: " Item quelibet persona que in pannis suis faciendis posuerit seu poni fecerit, aut miscuerit seu miscui fecerit, aliquam garzaturam vel borram seu cimaturam aut lanam pelliciarum, incurrat ipso facto penam amissionis dictorum pannorum, qui aplicentur prefacto domino nostro „.

(4) *Statuta Cunei*, Torino, Cavalleri, 1590, f. 169: " Item statutum est quod aliqua persona de Cuneo et posse Cunei non debeat ponere vel poni facere in pannis aliquo ingenio pillos bovinos vel caprinos vel aseninos vel equinos, nec illos pannos vendere in Cuneo et poderio in quibus essent dicti pilli positi, sub pena solidorum 100, et pannus comburatur in platea „. Cfr. il

più gravi che una semplice multa: è però interessante rilevare che in Piemonte, finora, la disposizione eporediese è la più antica, sebbene anche la più rudimentale. Così parimenti a Biella, l'anno citato, è fatto obbligo a ciascun membro del " Collegio dei drappieri „ di accusare ai consoli i contravventori a qualcuno dei capitoli del medesimo (1). E per i tessitori in tela soltanto potrei far altri riavvicinamenti cogli Statuti di Vercelli (2), di Torino (3), di Cuneo (4) e di altri luoghi, come — per citare qualche testo inedito — Sanfront (5), Osasco (6), La Manta (7) e sopratutto Polonghera (8); ma sempre riferendomi ad epoca posteriore a quella del citato documento d'Ivrea.

---

mio lavoro *La vita in Cuneo alla fine del Medio Evo*, nel volume *Cuneo*, 209 seg., Torino, Roux e C.ia, 1898.

(1) Pozzo, p. 45, n. 5. Anche a Vercelli (1341) vi è uno Statuto " De non ponenda lana in pannis nisi de pecora „.

(2) *Statuta communis et alme civitatis Vercellarum*, Vercelli, Pellipari, 1541, f. 85 *v*. Gli *Statuti* vercellesi di quest'edizione furono raccolti ed ordinati nel 1341.

(3) *M. h. p.*, *Leges munic.*, I, 723, 743-764. Questi Statuti furono approvati nel 1360.

(4) *Statuta Cunei*, pp. 36-37. Sebbene stampati solo nel 1590, e riapprovati nel 1535, gli Statuti di Cuneo risalgono ad un'epoca anteriore, ma di poco, al 1380.

(5) *Arch. Com. di Sanfront.* Approvati nel 1369. Riguardano specialmente il prezzo della mano d'opera dei tessitori per i varî lavori.

(6) *Arch. del conte Cacherano d'Osasco, in Osasco.* Approvati nel 1467. La stessa avvertenza che per gli Statuti di Sanfront.

(7) *Arch. Com. della Manta.* Approvati nel 1479. Il capitolo sui tessitori è assai malconcio; tuttavia ne ho potuto trascriver tanto da poter ripetere l'osservazione fatta per gli Statuti di Sanfront e di Osasco.

(8) *Arch. Costa della Trinità, in Torino*, categ. Polonghera. Sec. XV. Di tutti è il più lungo e più importante per questo rispetto, onde credo bene riferire il testo del capitolo *De testoribus et testricibus*: " Item statutum est quod omnes testores et testatrices (*sic. l.*: testrices) facientes seu facere volentes tellas in loco Polungherie de cetero teneantur et debeant eorum offitium fideliter et legaliter in dicto loco exercere; et accipere debeant pro factura cuiuslibet rami lini de duodecim centinis grossos quinque. De tresdecim vero centinis et quatuordecim grossos sex. De quindecim vel sexdecim grossos septem. De decemseptem vel decemocto centinis grossos septem. Item pro quolibet ramo moleti grossos quatuor cum dimidio. Pro quolibet ramo riste de novem centinis, grossos tres. Pro quolibet ramo stupe de octo centinis grossos duos et quartos duos. Pro quolibet ramo telle grosse mesure carmagnolie grossum unum et quartos duos. Et non ultra acci-

Più ampio ed importante di questo è, del rimanente, un altro " capitolo „ della stessa redazione statutaria 1315-1329, che ha per titolo " *de laneriis et testoribus pannorum* „ ed è un vero e proprio Statuto dell'arte coi molti paragrafi ch'esso comprende. Il primo dei medesimi non fa che riprodurre una disposizione già ricordata, cioè l'obbligo del vicario, o podestà, di far giurare entro quindici giorni dall'inizio del suo ufficio tutti i tessitori e tutte le tessitrici d'Ivrea di non mescolar peli di bue o di capra, o borra di follatoio, alla lana. Si proibisce quindi di comprar filo filato od altra lana da qualsivoglia lavorante senz'avvertirne in precedenza due lanaiuoli, che siano cittadini

---

piant pro eorum mercede, nisi secundum taxam predictam et perpetualiter declaratam, sub pena solidorum quinque pro quolibet ramo et qualibet vice qua contrafecerint. Et teneantur dicti testores et testrices ad requisitionem cuiuscumque persone de Polungheria vel ibidem habitantis, volentis sibi facere fieri tellam, accipere filum suum infra octo dies postquam fuerint requisiti, sub eadem pena, et dictam tellam fecisse et factam restituere precio supradicto, aliis omnibus expensis inclusis, illi persone cuius fuerit tella infra unum mensem postquam acciperit, sub eadem pena, nisi hoc faceret de voluntate persone cuius esset filum seu tella, et dictum ramum sive tellam reddere ad longitudinem raxorum decem octo pro singulo ramo, ac latitudine sufficiente et consueta. Itaque latitudo intelligatur et sit de septem centinis, exceptis mediis tellis et fasis, que sint in dicta et extimatione ac cognitione duarum mulierum ad hoc elligendarum, si contentio esset de predictis inter eos; quibus mulieribus sic elligendis earum iuramento credatur. Et ipsa tella facta, teneantur et debeant illi testores seu testrices denuntiare persone cuius erit ipsa tella quod eam debeat reddimere infra octo dies; et dicto termino octo dierum transacto, possint eam pignorare pro dicto eorum premio seu mercede, et non ultra, expensis cuius erit ipsa tella, sub pena solidorum quinque. Et si aliquis testor vel textrix recusaverit dictas tellas modo et tempore predictis facere, solvat pro quolibet et qualibet vice solidos quinque. Et quod dicti testores seu testrices in principio eorum officii non requisiti, et postea omni anno, si requisiti fuerint per sindicos dicti loci, de mense marcii, teneantur in manibus castellani Polungherie, seu eius locumtenentis, iurare eorum offitium fideliter exercere in presentia dictorum sindicorum ac bona fide secundum formam presentis capituli; et quod castellanus dicti loci, sive eius locumtenens, teneatur et debeat, ad requisitionem vel querellam cuiuslibet persone de Polungheria vel ibidem habitantis cuius intereat, procedere contra predictos testores et testrices, et contrafacientes punire secundum formam presentis capituli. Et quelibet persona bone vocis et fame de premissis omnibus et singulis possit accusare, et suo iuramento credatur, et habeat terciam partem bampni „.

eporediesi, e gli eletti a tale uffizio, sotto pena di 10 soldi imperiali. È limitata la facoltà di far lavorar lana tinta ai panni di colore, sotto ugual pena. Si regolano poi la quantità di lana da impiegarsi in ogni pezza di panno secondo la qualità di questo, la lunghezza e larghezza di ogni pezza, e si pone l'obbligo di segnar ciascuna di dette pezze con un segno ben visibile, origine evidente delle " marche di fabbrica „ dei panni. A questo fine, devono eleggersi ogni anno dal vicario e dai procuratori del Comune due " buoni uomini „ dell'arte della lana (*de mi*[*ni*]*sterio lane*), ai quali spetti l'ufficio di visitare almeno una volta per settimana se vi siano contravventori alle disposizioni precedenti. Non s'intende bene se questi due " buoni uomini „ siano le stesse persone che più sotto sono chiamate " consoli „, ai quali si assegna un ufficio analogo: ad ogni modo, l'identità è probabile, ed il nome, e lo stesso paragrafo finale di questo " capitolo „ in cui esso appare, non sono probabilmente che un'aggiunta ai paragrafi primitivi in cui tale nome ancora non era. " Buoni uomini „ non era però il titolo antico di tali ufficiali dell'arte, poichè — almeno in Ivrea e nei dintorni — numerosi documenti, dal secolo XII al XIV, provano che tale nome indicava puramente e semplicemente le persone libere del tutto. Alle accuse di questi due ufficiali dell'arte si doveva credere sul semplice loro giuramento: invece all'accusa privata è necessario inoltre il suffragio di un teste. Potrebbe essere tuttavia che tale ultima disposizione abbia effetto solo nel caso speciale dell'accusa di aver comprato, fatto comprare o tener lana cattiva; il che era tassativamente proibito da un altro paragrafo del " capitolo „ che ora esaminiamo. Sopratutto grave pena troviamo imposta a chi ricusi di lasciar penetrare in casa gli ufficiali dell'arte; maggiore al padrone che al famiglio od all'apprendizzo (1). Due altri capitoli, poi, riguardano

(1) Coll. 1143-1145: " Item statuerunt et ordinaverunt quod potestas seu vicarius qui nunc est et pro temporibus fuerit infra quindecim dies principii sui regiminis faciat venire coram se omnes testores et testrices civitatis Yporegie operantes mi[ni]sterium lane et facientes seu fieri facientes pannum de lana, et ipsos et quemlibet ipsorum iurare et iurari facere quod in aliquo panno quod facient seu fieri facient, non ponent nec poni facient, aliquod pillum de bove seu de capra, nec boram de paratori, nec aliquod aliud pillum seu lanam, preterquam de oue, agno vel crastono, et qui con-

il contributo che i lanaiuoli devono dare alla taglia del cero e del pallio di Santa Maria secondo il lavoro eseguito, ed un altro

---

trafecerit, solvat pro quolibet et qualibet vice solidos lx imperiales. Item quod aliqua persona non possit nec debeat emere fillum filatum, nec aliquam aliam lanam ab aliquo laboratore, nec ab aliqua alia filleria operante dictum officium, nisi prius dicat duobus operantibus ad minus dictum officium lane, qui sint cives Yporegie, et illis qui super hoc fuerint electi; et qui contrafeceri(n)t, pro quolibet et qualibet vice qua contrafecerit solidos x solvat. Item quod aliqua persona non possit nec debeat operare seu operari facere in civitate Yporegie vel districtu aliqua[m] lana[m] tincta[m] in aliquo panno, salvo in panno de colore, sub banno solidorum x imperialium pro quolibet et qualibet vice. Item quod dicti exercentes dictum officium non possint nec debeant operare seu operari facere aliquod pannum de lana qui sit minus de octo centonariis pro qualibet pecia, et pannum de raso quelibet pecia sit VII centonaria ad minus, et qui panni sint signati quelibet pecia uno signo manifesto, non mutando signum de alna in signo de rasso, sed quelibet pecia habeat suum signum sub pena et banno pro quolibet et qualibet vice solidorum xx imperialium qua contrafecerit; et super hoc ponantur duo boni homines et fideles de mi[ni]sterio lane per procuratores et vicarium, qui iurent ad sancta Dei Evangelia bene et bona fide toto eorum posse inquirere, semel in ebdomada ad minus, contrafacientes in omni loco et parte ubi voluerint, ad eorum liberam voluntatem, et credatur eorum sacramento de contrafacientibus sine aliqua probatione facienda; et si aliqua persona recusaret dictos sic inquirentes ne intrarent eorum domum seu habitationem ad predicta inquirenda tam in panno, quam in lana, si fuerit dominus dicte domus solvat pro quolibet et qualibet vice solidos xx, et si fuerit persona famulus vel famula vel descentus solidos x pro quolibet et qualibet vice qua contrafecerit, et medietas omnium suprascriptorum bannorum perveniat in accusatoribus et officialibus electis, et alia medietas in dominos comitem et principem; et predicta intelligantur habere locum ad kalendas marcii proxime venientes. Item quod nullus debeat laborare nec laborari facere nullum peluchetum. Item quod nullus teneat in domo sua nullam lanam contra vetitam; et cridetur per civitatem Yporegie in locis consuetis omni anno. Item quod aliquis merchator seu laborator lane, qui emat vel emi faciat lanam, non debeat emere nec emi facere, nec tenere in domo eorum habitationis, nec in aliqua alia domo, aliquam malam lanam de suprascriptis et de infrascriptis prohibitis; et si repertum fuerit aliquem ipsorum habere vel tenere dictam lanam sic prohibitam, quod solvat pro pena et banno pro quolibet et qualibet vice solidos LX imperiales, et quilibet possit accusare, et habeat medietatem banni, et credatur sacramento cuiuslibet accusatoris cum teste ydoneo. Item quod aliquis lanarius seu factor pannorum non debeat facere seu fieri facere aliquam peciam panni que longa sit ultra parietes XIII, que parietes sint omnes equales super orditorem, qui sit de alnis v et quarta una pro qualibet pariete; et qui contrafecerit, solvat pro pena et banno solidos x imperiales, et quilibet possit

grosso cero che drappieri e sarti devono offrirle ogni anno (1): la loro importanza è però assai minore. Merita invece ancora un ricordo particolare un breve capitoletto sui " cimatori ", sulla loro mano d'opera e sul giuramento che da loro deve far prestare ogni nuovo vicario [o podestà] entro quindici giorni dal principio del suo ufficio (2).

---

accusare, et habeat medietatem banni. Item quod omnes peyse stami et trame sint ad unum pondus, videlicet peysa stami fillati librarum III, et trame fillate librarum IIII tantum, et non minus, nec plus; et qui contrafecerit solvat pro quolibet et qualibet vice solidos V imperiales; salvo quod pro una uncia que esset minus vel plus non possit quis dictum bannum incurrere. Item quod omni anno, in principio regiminis vicarii qui pro temporibus fuerit, eligantur duo consules boni et fideles de officio dicte lanarie, qui habeant curam et bayliam faciendi et inquirendi et vicario denunciandi eorum posse, videlicet una vice pro qualibet ebdomoda, omnia predicta et que in presenti statuto continentur. Qui consules iurent predictum eorum officium fideliter exercere, et eisdem consulibus eorum iuramento credatur de hiis qui denunciabunt vel accusabunt ".

(1) Coll. 1340 e 1342: " Item statuerunt et ordinaverunt quod de cetero, quando fiet talia cerei vel palii laneriorum offerendi pro reverencia beate Marie, quod quilibet qui facit pannum venale in civitate Yporegie, vel etiam parari vel sibilari, solvat pro qualibet pecia quam fieri fecerit, parari, vel sibilari, denarios duos imperiales ad opus ipsius cerei vel palii, et non ultra, et credatur de quantitate peciarum cuilibet suo sacramento. Teneatur enim quilibet lanerius civitatis Yporegie vel ibidem habitans, qui solvere tenetur taliam cerei sive palii supradicti, propriam taliam solvere pro rata peciarum panni quas fecerint, seu fieri fecerint, tantum ad rationem unius nigri seu papienses (*sic*, *l.*: papiensium) V pro qualibet pecia, et plus vel minus secundum quod constat ipsum cereum, sive pallium. Quelibet enim persona suburbii que emit et vendit lanam ad grossum, teneatur et debeat conferre cum laneriis civitatis Yporegie ad cereum faciendum, seu palium emendum, et solvere partem suam dicti cerei, sive palii, eis imponendam per eos qui ad dictam taliam faciendam fuerint deputati, exceptis illis qui lanam de eorum ovibus percipiunt ". " Item statuerunt et ordinaverunt ad honorem Dei et beatae Virginis Marie quod omnes draperii vendentes pannum ad menutum, et omnes sartores et cimatores civitatis Yporegie et suburbiorum, teneantur et debeant omni anno facere unum pulcrum et grossum cereum, et ipsum cereum offerre et dimittere ad ecclesiam beate Marie de Yporegia semper in quolibet festo sancte Marie de medio augusto, sicut alii paratici civitatis Yporegie; et quod vicarius, sive potestas, qui pro temporibus fuerit, teneatur ipsos omnes compellere sub certis penis et bannis ad predicta facienda ".

(2) Coll. 1148-1149: " Item statuerunt et ordinaverunt quod vicarius, qui pro temporibus fuerit, teneatur et debeat facere venire coram se et iudicibus

Chi paragoni ora questo complesso di disposizioni, e ciascuna di esse singolarmente, coi " capitoli " di altri Statuti piemontesi dell'arte della lana, troverà dei " consoli " dell'arte stessa a Biella nel 1348 (1), ed a Pinerolo nel 1440 (2); a Torino, invece, nel 1360, i due mercanti eletti annualmente dal giudice della città come ufficiali ad ispezionare ed accertare se siano osservate le norme statutarie dell'industria dei panni, e denunziare i contravventori, non portano ancora alcun nome (3); a Savona, sono chiamati " rettori " nel 1376, e " consoli " nel 1404 (4). Inoltre è a rilevare il diverso modo di elezione: a Biella sono i consoli scadenti che eleggono i nuovi; a Pinerolo è il " Consiglio " del Comune, di quattro in quattro mesi; a Savona, fin dal 1376, i mercanti, cardatori, tintori, cimatori e tutti gli altri lavoranti dell'arte, e gli eletti — un mercante ed un operaio — durano in carica sei mesi (5). Quanto all'ufficio di tali " rettori ", o " consoli ", o comechè altrimenti fossero chiamati, è certo che, sebbene più tardi molto si allargasse, come già a Biella nel 1348 ed a Savona nel 1376, dovettè in origine esser ristretto all'indagine dei contravventori agli Statuti mediante la visita degli opifizî e delle botteghe: visita che si trova pure stabilita a Biella, ma solo una volta al mese; a Torino, ugualmente; a Savona, senza termine fisso, ma a piacimento dei " rettori "; a Pinerolo, finalmente, almeno una volta per settimana, proprio come ad Ivrea. La sanzione penale contro

---

suis infra xv dies principii sui regiminis omnes cimatores et cimatrices pannorum, et ipsos facere iurare ad sancta Dei Evangelia bene et bona fide et legaliter cimare seu retondere omnes pannos qui dabuntur eis ad cimandum, et ipsos cimare pro ianuino uno pro raso prime cimature, et imperiali uno pro raso secunde cimature, et non ultra, et pro garsatura, cimatura et cotonatura cuiuslibet brachii imperialibus vi, et pro auna imperialibus viiii, et non ultra; et qui contrafecerit, solvat pro pena et banno pro quolibet et qualibet vice solidos v imperiales, et quilibet possit accusare, et habeat medietatem banni, et credatur sacramento cuiuslibet sic dantis pannum, vel eius nuncii ".

(1) Pozzo, 43 segg.

(2) Caffaro, 40.

(3) *M. h. p.*, *Leges mun.*, I, 742.

(4) Filippi, 24-25, 34-35.

(5) Nel 1404, però, tale elezione si trova deferita agli " anziani " della città.

chi ricusi di sottomettersi a tali visite è pure negli Statuti torinesi e savonesi, manca invece altrove. Dovunque, per contro, tranne a Biella, è regolata, sebbene in vario modo, la lunghezza e larghezza delle pezze di panno, secondo la diversa qualità dei medesimi (1). Press'a poco generali sono il giuramento dei lanaiuoli e drappieri, le disposizioni sui cimatori ed alcune men notevoli: altre disposizioni, invece, sembrano peculiari ad Ivrea, od almeno non appaiono altrove che molto più tardi. Tale, ad esempio, quella della " marca di fabbrica ", che non trovo nè a Biella, nè a Torino, nè a Cuneo, nè a Savona nel 1376, ma solo a Pinerolo nel 1440 (2). Del resto, disposizioni che non si trovano negli Statuti d'Ivrea riferiti qui addietro, ma s'incontrano in altri di altri luoghi, appaiono poi ad Ivrea stessa in Statuti posteriori; mentre si comprende che alcuni ordinamenti proprii della redazione statutaria eporediese 1315-1329 non trovino riscontro, ovvero siano molto più sviluppati, altrove, dove e quando l' " arte " è meglio e più completamente costituita in forma collegiale, come già a Biella nel 1348 ed a Savona nel 1376 e sopratutto poi nel 1404.

Venendo dunque allo sviluppo ulteriore dell'industria dei panni in Ivrea, dobbiamo anzitutto osservare come le disposizioni statutarie al riguardo non rimanessero, come troppo spesso, lettera morta; ma ricevevano efficacia di pratica applicazione (3). Nondimeno, in mezzo alle guerre continue, alle congiure, ai mutamenti di signoria, ai disastri delle perenni incursioni delle compagnie di ventura, onde furono travagliate in tutto il Trecento le regioni subalpine, e principalmente Ivrea ed il Canavese, l'arte della lana, qui come in tutto il resto del Piemonte, non potè certo fiorire gran fatto. Solamente nel 1422, ristabilita

---

(1) *M. h. p.*, *Leges*, I, 741; Filippi, 28, 38; Caffaro, 44.

(2) Caffaro, 43. A Savona, nel 1404, si stabilì che non si dovessero esportare panni, " nisi prius dictus pannus vel dicti panni revisi fuerint per dictos deputatos ad revidendum pannos predictos, et per eos bullatos (*sic. l.*: bullatus) sive bullati una seu cum una bulla plumbea cum marcho comunis Saone in ea fixo "; il che non è precisamente la stessa cosa (cfr. Filippi, 44).

(3) *Arch. Camer. di Tor.*, *Conti Castell. d'Ivrea*, *passim*, sopratutto Prot. XIII: " Recepit [clavarius Ypporegie] de Jacobo de Cellis, quia operabat lanam non bonam contra statuta, solidos v; etc. ".

la pace, riunito l'intero paese sabaudo sotto il prudente e fermo reggimento di Amedeo VIII, si ripensò dal Governo a far risorgere l'industria decaduta. Il 16 marzo pertanto, Enrico di Colombier, capitano generale di Piemonte, indiceva da Pinerolo una congrega di rappresentanti comunali a Torino, pel 24, a fine di trattar l'importante questione (1). Rimangono, prezioso documento finora inedito, le istruzioni date a tal fine dalla città d'Ivrea ai suoi deputati. Ne è cardine la proposta di concedere le maggiori " libertà ", ossia franchigie, compatibili coll'interesse dello Stato e dei Comuni, agli " artisti " forestieri e paesani, affinchè i nuovi abitanti si diano volentieri ad apprender l'arte; ma, accanto a questa, non manca un'altra proposta — nettamente " protezionista ", diremmo noi —, che ne è come un indispensabile complemento, cioè che si renda obbligatorio l'acquisto dei panni fabbricati nello Stato, con divieto assoluto di comprar panni esteri per gli abiti, appena bastino al bisogno i paesani. Si raccomanda poi ancora il corretto esercizio dell'arte, come pure la concessione di speciali privilegi a chi impieghi in questa i suoi capitali (2). Ma sebbene ancora l'8 maggio

---

(1) *Arch. Com. d'Ivrea, Ordin.*, Vol. XIII, f. 41 *r*: " Henricus de Columberio, capitaneus etc. — Nobiles amici carissimi. Pro evidendi (*sic. l.*: evidenti) utilitate tocius reipublice et augumento huius patrie fuit tractata aloqutio quod in locis habilioribus teritorij citramontanj Jll.mi domini nostri Sabaudie ducis fierent pannj, et copiosse, ut pecunie que jnde vacuantur, in subditorum usus prospere remaneant. Verum, quia hec fieri debent cum solerti cura et tractatu, et per eos ad quos dignoscitur pertinere, decrevi vobis jntimare ut vellitis duos ex magis expertis in dicta certe die xxiiij huius mensis mittere apud Thaurinum, ubi et alij plures tunc erunt convocati, ut super predictis laudabilis possit capi conclusio; in quibus aliqualiter non deficiatis. Valete. Scriptum Pinerolij, die xvj marcij [MCCCCXXII] ". Nei *M. h. p.*, *Comit.*, I, 149-150, è una lettera simile, di cui si valse anche il Capparo, 16-17, ricordando l'invio dei rappresentanti di Pinerolo.

(2) *Arch. Com. d'Ivrea*, *l. c.*, ff. 41 *v* - 42 *r*: " Ad providendum quod ars draperie fiat in patria Domini citramontes viderentur necessaria infrascripta. Primo, quod insequendo privillegia alias per dominum concessa, concederentur artistis foresterijs, et eciam illis de patria, libertates que bono modo concedi poterint absque nimio dapno Domini et comunitatum patrie, per modum quod foresterij libenter veniant habitatum in patria [et] animentur ad addiscendum artem draparie. — Item quod illi de patria astringantur ad emendum pannos qui fient in patria, prout ordinabit dominus Capitaneus cum conscilio Comunitatum. — Item provideatur quod

si tenesse in proposito un'altra assemblea, non sembra essersi per allora conchiuso nulla, od almeno a noi non è giunta notizia (1). E così ignoriamo che si facesse circa dieci anni più tardi, quando il 5 febbraio 1431, Amedeo, principe di Piemonte, indisse pel 28 di quel mese un'altra riunione di rappresentanti comunali a Pinerolo per provvedere all' " ampliamento " dell'arte della lana, con lettere dirette da Fossano a Moncalieri, Chieri, Torino, Avigliana, Susa, Lanzo, Ciriè, Biella, Vercelli ed Ivrea, invitata separatamente Pinerolo, come sede prescelta dell'assemblea (2). Di questa si parlò effettivamente nella Credenza eporediese (3); ma le nostre notizie in proposito si arrestano qui.

Dobbiamo pertanto passare alla redazione statutaria eporediese del 1438, nella quale sono inserti parecchi " capitoli " sull'industria dei panni. Alcuni di essi, per vero, non fanno che riprodurre, appena con varianti di espressione, altri della redazione più antica; tali quelli che concernono il giuramento dei lanaiuoli; il divieto di mescolar lane cattive, o materie eterogenee, alle lane di pecora, agnello o castrato; la proibizione di comprar filo filato, o qualunque sorta di lana, da lavoranti e filatrici senza previa notificazione ai due " sovrastanti " eletti sopra di ciò; l'obbligo della marca di fabbrica; la visita dei consoli, ora però portata da una volta per settimana ad una volta al mese; il regolamento della mano d'opera dei cimatori, benchè quest'ultimo in modo diverso e, sotto un certo aspetto, naturalmente più largo. Ma altre disposizioni sono affatto nuove, o rappresentano uno svolgimento notevole dell'arte, come tutte

---

ars draparie fiat legaliter, prout Dominus per suas literas ordinavit ultramontes. — Item quod nulla prohibicio fiat de extraneis pannis emendis donec facta fuerit sufficiens quantitas pannorum in patria pro vestiendo illos de patria; et tunc fiat debita et utilis jnhibicio cum consilio et consensu Communitatum patrie. — Item viderentur concedende alique libertates illis qui de eorum denarijs fieri facient pannos, ad finem quod habeant voluntatem exbursandi denarios et fieri faciendi pannos, quia aliter non reperientur ". L'elezione dei deputati d'Ivrea alla congrega avvenne il 19 marzo.

(1) Caffaro, 17, di sull'*Arch. Com. di Piner.*, *Atti Cons.*, sebbene non citi la fonte.

(2) *M. h. p.*, *Comit.*, I, 150. Cfr. Caffaro, *l. c.*

(3) *Arch. Com. d'Ivrea*, *Ordin.*, Vol. XV, f. 99 *r*: 24 febbraio: " super facto draparie ".

quelle — ora ben più numerose che nella redazione statutaria anteriore — di carattere tecnico, sulla confezione dei diversi panni, larghezza e lunghezza delle pezze dei medesimi; nel che troviamo una piena rispondenza sostanziale — se anche non sempre formale — con ciò che avviene negli statuti di Torino 1360, Savona 1376 e 1404, e Pinerolo 1440 (1), tutti posteriori agli eporediesi 1315-1329. Importante la circostanza che nel 1438 si vedono omai definitivamente stabiliti anche in Ivrea i " consoli „ dell'arte, ed anzi già " secondo l'uso „ venivano eletti dai lanaiuoli, anzichè dal podestà o dal giudice, sebbene a questi dovessero prestar giuramento, ed in un passo dianzi accennato si parli ancora, per forza d'abitudine inveterata, di semplici " soprastanti „. Anche l'ufficio dei " consoli „ si è svolto: rimane sempre loro funzione essenziale quella delle verifiche nelle case — dove però è scomparsa la grave sanzione penale a chi ricusi di sottostarvi —; ma, accanto a questo cómpito, si trova l'altro di tener registro di tutte le pezze fabbricate per tassar ciascuno in proporzione del numero di esse, con facoltà di libera tassa a piacimento dei " tagliatori „ a carico di chi non abbia voluto giurare l'esatta consegna di tali pezze. Si notino pure la determinazione più larga di lanaiuoli " d'Ivrea, sobborghi e ville del distretto „; la distinzione che è sempre fatta di panni fini e panni grossolani; il divieto di tinger questi, fuorchè per uso proprio e nella " vergatura „ dei " frassati „ o nella " cimossa „ degli altri panni; nonchè un nuovo capitolo sui " cimatori „ (2). Quest'ul-

---

(1) *M. h. p.*, *Leges mun.*, I, 441; Filippi, 28 segg., 38 segg.; Caffaro, 44 segg.

(2) *Ibidem*, *Stat.*, Vol. II (in pergamena), ff. 39*r*-40*r*: " *De lanerijs et eorum juramento.* Item statuerunt et ordinaverunt quod potestas, seu eius judex, qui nunc sunt et pro temporibus fuerint, teneantur et debeant facere venire coram se omnes lanerios civitatis Yporegie, suburbiorum et villarum districtualium exercentes artem lanarie et pannorum tam subtilium quam grossorum; qui in eorum manibus jurare teneantur dictam eorum artem fideliter exercere, nulla mista falsitate, tam per se, quam per quascumque alias personas eorum nomine ipsam artem exercentes secundum formam et ordinacionem aliorum jnfra immediate sequentium statutorum de ipsis lanerijs et arte lanarie seu pannorum faciencium mencionem; que statuta in eodem sacramentali declarentur eis et legantur. — *Rubrica de ordine faciendo et tenendo in officio lanarie seu pannorum.* Item statuerunt et ordinaverunt quod nulla persona, cuiuscumque condictionis existat, dictam artem

timo, non meno che quanto riguarda la tintura dei panni, ha riscontro in Statuti di altre località; anzi le disposizioni sulla

---

lanarie exercens per se vel alium in dicta civitate, suburbiis seu villis districtualibus, audeat sive presumat ponere nec poni facere in aliquo panno fiendo de aliqua lana, cuiuscumque generis et manieriey existat, preterquam de lana ovina, agnina vel castratina, nec eciam ex dictis lanis ovinis, agninis seu castratinis aliquid pelluchetum bestosum aut garzat[ur]am alicuius pellis; et hoc sub pena solidorum sexaginta jmperialium pro quolibet contrafaciente et qualibet vice. — *De eodem.* Item quod nulla persona dictam artem exercens emere possit aliquid filum filatum nec aliquam lanam ab aliquo laboratore nec ab aliqua filatrice seu laboratrice in arte predicta, nisi prius notifficet sorestanis qui super hoc fuerint ellecti, sub pena solidorum viginti jmperialium pro quolibet venditore, et totidem pro quolibet emptore, contrafacientibus. et qualibet vice. — *De eodem.* Item quod nulla persona dictam artem exercens audeat nec presumat operari in dicta civitate, suburbijs et villis districtualibus, de aliqua lana tincta, nec aliquod pannum grossum tingere seu tingi facere, nisi pannus et lana fuerit subtilis; et hoc sub pena solidorum viginti jmperialium pro quolibet et qualibet vice. Liceat tamen jmpune cuicumque dictam artem exercenti pro vergaturis frassatarum, et cimosis aliorum pannorum; ac eciam cuicumque civi et districtuali pannum grossum, pro suo et sue familie usu tantum, tingere seu tingi facere. — *De eodem.* Item statuerunt et ordinaverunt quod nulla persona audeat vel presumat facere seu fieri facere, aut ordiri, aliquem pannum agninum sive besagninum nigrum aut losum, qui non ordiatur ad minus de filis octocentum pro qualibet pecia, jnclusa cimosa. Et quod panni agnini sint longitudinis parietum sedecim, et quelibet paries sit alnarum quinque cum dimidia, et non minus. Et in cimosis pannorum agnini non ponantur minus de filis quatuordecim coloris nigri aut losi. Possint autem fieri dicti panni agnini sine cimosis. Teximentum vero dictorum pannorum agnini sit in totum de lana agnina, jn qua poni non possint ultra ballas duas, que non excedant libras decem pectenicij lane mazange et eque bonitatis uti lana agnina. — *De eodem.* Item statuerunt et ordinaverunt quod in omni drapo besagnino nigro et albo, et in quibuscumque drapis losis (*sic. l.*: omnes drapi besagniui nigri et albi. et quicumque drapi losi), cuiuscumque manieriey, sint filorum latitudinis ut supra, et longitudinis parietum quindecim ad plus. Et in ipsis pannis besagninis non ponantur ultra filos octo coloris nigri aut losi. Possint tamen facere, si placuerit, sine cimosa, et texere de quibuscumque lanis non prohibitis per capitula suprascripta. — *De eodem.* Item statuerunt et ordinaverunt quod omnes paise stami et agnini possint et esse debeant librarum quatuor; paise vero besagnini et aliarum lanarum et pannorum, videlicet trame ad texendum. librarum quinque; et non minus, nec plus, salvo quod pro una vel duabus uncijs plus penam aliquam non jncurrant. — *De eodem.* Item statuerunt et ordinaverunt quod omni anno, prout moris est, per exercentes artem lanarie seu pannorum in civitate predicta elligi debeant duo ydonei et fideles consules ipsorum lan.riorum, qui jdem officium exerceant, et presentari debeant ipsi

tintura, appena adombrate nello Statuto biellese del 1348, e mancanti in quello di Torino del 1360, sono molto più svolte a Pinerolo nel 1440, mentre, per contro, a Savona, nel 1404, si deroga espressamente al divieto abituale, lasciando a ciascuno facoltà di tingere i panni a piacimento, salvo a limitare in altra parte del medesimo Statuto la libertà eccessiva di questo permesso (1).

---

consules sic ellecti domino potestati, seu eius judici, in cuius manibus teneantur jurare quod quolibet mense una vice ad minus visitabunt domos exercencium dictam artem, et omnes lanas et pannos de quibus operabuntur, et si in hijs aliquam falsitatem reperient contra ordinem statutorum superius descriptorum, jllam prefato domino potestati, seu ejus judici, fideliter denuntiabunt; et eis cum juramento credatur. Teneantur autem lanerij in quolibet panno ponere signum suum proprium. — *De eodem*. Item statuerunt et ordinaverunt quod omnes alij lanerij dictam artem exercentes in civitate predicta, suburbijs et villis districtualibus, jurare teneantur in manibus dictorum consulum sic ellectorum et juratorum, quod omnes pecias panni, cuiuscumque manieriey existant, quas per se vel alium fleri facient, fideliter consignabunt in manibus ipsorum consulum; qui consules omnes dictas pecias consignatas describere seu describi facere teneantur quolibet anno in uno quaterno, ad finem quod quilibet pro sua rata contribuere teneatur in taleis faciendis super paratico ipsorum laneriorum. Et si aliquis dictorum laneriorum per modum predictum jurare et consignare recuset in manibus dictorum consulum, nichilominus per taleatores ellectos ad taleas dicti paratici faciendas taleari possint, et eis jmponi talea prout dictis taleatoribus videbitur fieri posse; ad quam taleam solvendam prout alij de eodem paratico teneantur. — *Rubrica de cimatoribus pannorum*. Item statuerunt et ordinaverunt quod potestas faciat venire coram se jnfra quindecim dies principij sui regiminis omnes cimatores, tonsores et cimatores (*sic*) pannorum, et eos facere jurare quod bona fide, remota omni fraude, eorum officium exercebunt, et pro brachio panni valoris unius floreni januyni et ultra non capient ultra denarios octo bone monete, sive pannus sit citramontanus, sive non; et si constiterit minus uno floreno, capere non possint pro cimatura ultra denarios sex pro brachio; si vero fuerit pannus lecaschus vel criademanus, capere non possint ultra denarios quatuor pro brachio. Et qui contrafecerit solvat pro pena et banno solidos quinque jmperialium, applicanda ut supra. — *De eodem*. Item statuerunt et ordinaverunt ne per manus ipsorum tonsorum pannorum diminucio aliqua panni eis dati ad cimandum fieri possit, monstram seu signum, quem dabunt domino panni a viginti raxis supra non possint jncidere, nisi dimittatur in ambobus capitibus dicti panni ante ipsam monstram unius alne, et a decem raxis saltem dimittatur parmum unum, sub pena, pro quolibet et qualibet vice contrafaciente, solidorum viginti jmperialium, applicanda ut supra. Et ultra hoc teneantur ad restitutionem dapn[or]um passorum „. Le parole in corsivo sono in rosso nel ms.

(1) Pozzo, 43; *M. h. p.*, *Leg. mun.*, I, 740-743; Caffaro, 45; Filippi, 41,45.

Dal 1438 bisogna scendere al 1461 per trovare ad Ivrea un altro Statuto dell'arte della lana; ma questo, che è veramente uno Statuto a sè, come quelli di Biella e di Pinerolo più volte citati, è forse e senza forse, a mio avviso, d'importanza superiore a tutti i precedenti, benchè così tardo. Invocata la Divinità, si premette che una commissione nominata per cercare qualche miglioramento alla città " quasi desolata „, ritenne nelle circostanze di allora preferibile l'incremento dell' " arte della lana fine e dei panni „ a quello di qualsivoglia altra. Dalle parole del documento, che dice aver gli eletti e l'intera Credenza del Comune stabilito di formare un capitale di almeno 2000 fiorini di piccol peso, per otto anni, " a fine di condur l'arte nella città „, essendo vano ogni altro provvedimento, parrebbe doversi ritenere che l'industria dei panni fosse addirittura cessata in Ivrea, ed ora si trattasse di rinnovarla del tutto. Senza lasciarsi andare ad esagerazioni, cioè ad ammettere una cessazione totale dell'arte della lana, che altre parole dello Statuto medesimo provano essersi conservata almeno per quanto concerne i panni grossolani, è certo che un decadimento doveva essersi manifestato, specialmente rispetto alla fabbricazione dei panni fini: ne sono indizio sicuro il silenzio dei documenti dal 1438 al 1461, ed il tenore ed il fatto stesso dei " Capitoli „ che ora esaminiamo, i quali non sarebbero stati necessari se l'arte della lana fosse stata in fiore ad Ivrea. La costituzione del capitale necessario doveva farsi mediante lo stabilimento e l'appalto di un dazio di minuta vendita sul vino, facendosi obbligo all'appaltatore d'investirne il profitto a tale oggetto e nelle persone che eserciterebbero l'arte, dando esso appaltatore malleverìa di persone ben solvibili, e non debitrici nè creditrici verso il Comune, che gli esercenti l'arte la eserciterebbero convenientemente. Durante gli otto anni, nessun creditore del Comune avrebbe potuto prelevar nulla su detto dazio: l'appaltatore medesimo di questo doveva far espressa rinunzia in tal senso, se mai gli accadesse di trovarsi in credito verso il Comune; e quand'anche nel contratto d'appalto queste disposizioni non s'inserissero per dimenticanza o per qualsiasi altra ragione, sempre dovrebbe intendersi per quello spazio di tempo avvenuta la rinunzia ed assunti gli impegni, di cui sopra, da parte dell'appaltatore. Il capitale così costituito doveva darsi per quattro anni

senza interesse ai drappieri che impiantassero la loro industria nella città; poi lasciarsi loro per altri quattro coll'interesse del 5 %: passati gli otto anni, sarebbe restituito, coll'interesse dell'ultimo quadriennio, alla città; ma questa doveva tenerlo poi ancora altri otto anni, in un con detto interesse, nelle casse comunali, a fine di valersene per l'incremento dell'arte nella maniera che gli eletti od eliggendi al riguardo giudicherebbero più conveniente. Non parendo poi tali provvedimenti di per sè soli bastevoli, ecco un altro " capitolo " disporre che il Comune debba far costrurre due gualchiere, lunghe almeno 40 rasi (m. 24), e di più, se occorra; ed introdursi la disposizione, che abbiamo già rilevata negli Statuti savonesi del 1376, del bollo plumbeo col sigillo del Comune su ciascuna pezza, prescritta in media della lunghezza di 36 rasi (m. 21,60). A questo fine, il Comune doveva far fare un sigillo in ferro, e rimetterlo annualmente ad uno dei credendarî, il quale, prestato acconcio giuramento, riceveva così l'ufficio di sigillatore dei panni confezionati secondo le norme che vediamo minutamente descritte nel " capitolo " stesso. Al sigillatore competeva un diritto di 2 quarti, ossia denari 16, per ogni pezza ch'egli sigillasse; del qual diritto $^2/_3$ dovevano toccare al Comune, ed $^1/_3$ ad esso sigillatore. Per la suggellazione dei panni di lana fine si decretava poi anche la costruzione di un' " ala " o tettoia sorretta da pilastri, in un sito centrale della città. Ai consoli, di cui vediamo conservata l'elezione ai " paratici dell'arte ", ossia agli esercenti la medesima, e mantenuto il giuramento al podestà, è ora affidato un ufficio analogo, ma non più identico, all'antico; cioè di visitare i panni, insieme col sigillatore, prima che siano tolti dalle gualchiere, per accertarne la buona confezione e secondo le norme prescritte. Doveva poi anche domandarsi al duca di Savoia, signore d'Ivrea, la concessione di lettere ducali per dare ad essi consoli una giurisdizione sui lanaiuoli nelle questioni attinenti all'arte, sebbene in materia civile soltanto. Accordavasi inoltre esenzione da ogni onere reale e personale, per dieci anni, ai forestieri che venissero ad esercitar l'arte in Ivrea, e da ogni onere reale, per ugual tempo, ai cittadini, ma solo pei capitali da essi impiegati nell'arte; e così troviamo esentato per lo stesso periodo un " buon tintore ", che è detto espressamente doversi cercare per il buon anda-

mento dell'arte. Due " capitoli ", infine, stabiliscono l'obbligo ai drappieri in panni fini di concorrere alle taglie per le oblazioni nella festa della Madonna di agosto, e il divieto di parlar contro tutto lo Statuto sotto pena d'infamia e di esclusione per un anno dalla " Credenza " e dai " Consigli " della città (1).

---

(1) *Arch. Com. d'Ivrea, Ordin.*, Vol. XXIII, ff. 191*r*-193*r*: " [In] Nomine Dei omnipotentis, patris et filij et spiritus sancti, amen. Infrascripta sunt capitula celebrata per ellectos et per Comune civitatis Yporegie in plena credencia ad perquirendum aliqua adviamenta ipsi civitati velut desolate pro bono (et) eiusdem [et] utilitate totius reipublice; qui ellecti, Dey jnspiratione moti, dixerunt et consuluerunt utiliorem esse artem lane subtilis et pannorum pre ceteris artibus presencialiter jn tota patria occurrentibus. — Et primo consuluerunt, ut ipsa ars jn dicta civitate conducatur, quia aliter in vanum laboraretur, quod ipsa Civitas faciat unum capitale pro octo annis proxime continuis, quod capitale sit ad minus de florenis duobus milibus parvi ponderis infra dictum terminum. — Item pro adimplendo dictum capitalle ponatur et obligetur dacitum vini ad minutum per octo annos proxime continuos, jta et taliter quod jncantator dicti daciti expresse teneatur pecunias dicti daciti jmplicare jn dictum capitale et jn personas per ellectos dicti Comunis dictam artem facientes, fideiubendo semper eum predictum incantatorem ad premissa quod predictas personas (*sic. l. forsitan:* predicte persone) dictam artem facientes (*l. fors.*: facient) ydonee per personas facilis conventionis et que non sint dicti Comunis debitores nec creditores. — Item quod nullus creditor dicti Comunis possit aliquid capere solutionis super dicto dacito durante dicto tempore octo annorum, ut supra; sed si jncantator dicti daciti, dicto tempore durante, esset dicti Comunis creditor, teneatur ipse jncantator dicti daciti renuntiare expresse de non retinendo aliquid de dicto dacito, sed jllud totum solvere et jmplicare ut supra. — Et casu quo in jnstrumento et stipulatione jpsius jncantus forsitan suprascripta pacta ponerentur oblivioni, vel aliter tacerentur, quod nichilominus durante dicto tempore octo annorum semper jntelligatur ut supra renuntiasse et astrictus esse ad premissa. — Item quod dicto Comune Ypporegie, ut suprascripta arx (*sic. l.*: ars) habeat effectum, fieri faciat duas cloverias longitudinis raxorum quadraginta ad minus, et ultra, si videbitur. — Item quod quelibet petia signata sigillo plonbeo dicte civitatis, sit longitudinis raxorum trigintasex ad minus, parata et perfecta, et plus et minus, si videbitur. — Item quod dicta Comunitas fieri faciat unum sigillum ferreum cum quo sigillentur omnes panni lane subtilis ydonei et sufficientes, et sigillum per dictum comune annuatim remittatur uni sufficienti ex credendarijs dicte Civitatis, qui juret bene et fideliter exercere suum offitium, et non permittet sigillari, nec sigillabit, aliquem pannum qui non sit altitudinis seu longitudinis de sedecim centonarijs ad minus et qui non fuerit totaliter nitidi coloris et sufficientis tincti, et qui capeat (*sic*) pro qualibet petia quartos duos, sive denarios sexdicim, monete currentis per Civitatem suprascriptam; non plus. Jntelligendo

Per la loro natura, questi " Capitoli „ non trovano gran fatto riscontro negli Statuti anteriori d'Ivrea od in quelli di

quod sigillum affisum per dictum sigillatorem dictis petijs panni sit de plonbeo, et quj sigillator habeat pro sua mercede et labore tertiam partem lucri. Adendo quod ultra numerum filorum de centonarijs sedecim, quilibet pannus sit cimesatus (*sic. l.*: cimosatus) de filys decem, et non minus. — Item quod ponantur et eligantur per paraticos dicte artis duo consules, qui habeant accedere una cum dicto sigillatore jpsos pannos fiendos in dicta civitate et suburbijs, videlicet antequam des[c]endantur a cloverijs, quod sint sufficientes et ydoney prout in suprascripto capitulo continetur; qui consules teneantur jurare eorum offitium exercere bene et fideliter in manibus domini potestatis, quemadmodum fit in alijs offitijs dicte Civitatis. — Item, ut dicta ars citius et facilius adimpleatur, quod artiste dicte artis lanarie subtilis per decen[n]ium, a principio eorum adventus jncipiendo, sint exempti a quibuscumque oneribus realibus et personalibus dicte Civitatis, jntelligendo de forensibus venientibus jn civitatem dictam artem exercere. Cives vero adoperantes dictam artem sint exempti etiam per decen[n]ium ab omni onere realj, quo ad summam eorum capitalis tantum quod habebunt in dicta arte, vel a tempore quo jnceperint dictam artem exercere et perseverabunt in ea. — Item quod elligatur per ellectos a dicta Comunitate unus locus circha medium Civitatis predicte, ubi abilius videbitur pro quomodo (*sic. l.*: commodo) dicte Civitatis, in quo fiat ala una et consignentur omnes panni fiendi in dicta civitate et suburbijs, jntelligendo de pannis lane subtilis ut supra, et in qua ala omnes panni sigillentur. Item quod sumptibus dicte comunitatis impetrentur litere ducales continente[s] effectu[m] quod consules suprascripte artis lanarie subtilis, quo ad civilia spectantia et pertinentia ad artem lanarie subtilis infrascripte et ad ipsius cognita, possint supra quibuscumque differencijs obmovendis, et que venire et insurgere possint jnter exercentes jpsam artem lanarie, decidere et terminare absque licentia et jntromissione dicte Civitatis Ypporegie et alterius cuiusdam persone. — Item quod habeant unum bonum tinctorem pannorum, qui tinctor sit exemptus per decennium, jncipiendo a principio sui adventus, dictam artem semper exercendo, ut supra dicitur de arte lanarie. — Item quod dictum capitale stet et remaneat penes dictos draperios, et absque aliquo premio, per quatuor annos continuos et [a] tempore dicte mutuationis numerandos. A dictis quatuor annis usque ad alios quatuor annos proxime sequentes jnclusive, restet dictum capitale penes suprascriptos qui habuerunt ipsum, et solvere sive restituere ad evidentiam (*sic*) ipsius Comunis [debeant], solvendo dicto Comunj pro lucro et jnteresse suis ad rationem de quinque pro cento quolibet anno, jta et taliter quod, transactis dictis octo annis, teneantur dicti draparij bonum computum et rationem reddere de dicto capitali et lucris, ac jntegraliter restituere dictum capitale cum lucro. — Item quod dictum capitale cum lucro, transactis dictis octo annis, non possit diminui, sed ut augeantur aviamenta dicti Comunis, remaneat firmum ipsum capitale et lucrum per alios octo annos jn trasis (*sic. l. fors.*: capsis) dicte Civitatis, ad dictam artem

altre località, essendo questi ultimi permanenti e quelli occasionali. Nondimeno, oltre i riscontri che sono già venuto facendo nell'esporli, si può notare che qualcosa di analogo, se non di identico, vediamo pure praticarsi a Pinerolo nel 1467 (1), e che alcune disposizioni, come l'allargamento dell'ufficio consolare ad una giurisdizione nei litigi relativi all'arte, richiesto al Duca in Ivrea nel 1461, erano già da tempo in altri Statuti, come a Savona nel 1376 e 1404 (2). Così il " capitolo „ sul concorso alle oblazioni alla Madonna di agosto è una correlazione, se non una mera riproduzione, di altri che abbiamo già trovato in proposito negli Statuti eporediesi del 1315-1329 (3).

Il tentativo lodevole del 1461 non sappiamo qual esito abbia avuto, se sia stato, o no, coronato da successo: pur troppo, è lecito dubitarne, perchè dopo quell'anno, per tutto il secolo XV, i documenti eporediesi tacciono dell'arte della lana così fine come grossa. Tuttavia quest'ultima, almeno, non dovette venir meno del tutto se tratto tratto si continua a parlare negli *Ordinati* della Credenza e del Consiglio di " battitoi „ e " follatoi „ (*baptitoria* e *paratoria*). Ma, per ora almeno, nulla mi venne fatto di trovar di specifico che meriti di esser riferito per la storia dell'industria dei panni in Piemonte.

augumentandam prout melius videbitur dictis ellectis seu elligendis per ipsam Comunitatem ad dictam artem et dictam alam. — Item quod dicti artistes (*sic*) dicte artis sint obnoxij et diligentj (*sic*) contribuere paratico drapariorum subtilium et colorum, prout et quemadmodum contribuere tenentur draparii et merchatores pannorum subtilium dicte civitatis jn oblatis feste asumptionis beate Marie Virginis de medio augusto; non autem paratico drapariorum [pannorum] grossorum, nec cum lanerijs lane grosse de alna, nisi aliquas facerent petias pannj grossi de alna; et tunc et eo casu pro ipsis talibus grossis pannis teneantur contribuere ipsi paratico lane grosse quemadmodum alij faciunt, pro rata eorum. Et hec jntelligantur solvere transacto tempore eorum exemptionis suprascriptorum decem annorum, et non ante[a], nisi sponte jd facere vellent. — Item et ad observantiam predictorum per dictos ellectos ordinatum est quod nulla persona, cuiusvis conditionis sit, audeat nec presumat contra premissa loqui; et si quis contra premissa ausus fuerit, jpso jure sit periurus et infamis, et cadat ab omni honore et comodo credentie et consiliorum dicte Civitatis durante dicto anno. Et premissa capitula sunt tenutha (*sic*) et precissa „.

(1) Caffaro, 50 segg.

(2) Filippi, 25-26, 35-36.

(3) Cfr. sopra pp. 10 (11), n. 2.

Sunto di una Memoria intitolata: *La " bulla major " di Cuniberto vescovo di Torino in favore della Prevostura di Oulx,* del Socio Carlo Cipolla.

Nel *Chartarium Ulciense* si trova inserto un diploma di Cuniberto vescovo di Torino in favore della Prevostura di Oulx. Esso porta la data dell'anno 1065. A questo documento in apparenza si deve attribuire una particolare importanza, specialmente per rispetto alle notizie storiche riguardanti la *Plebs Martyrum*, notizie che hanno immediato riscontro col c. 14 del II libro del *Chronicon Novaliciense*. Da questa circostanza proviene sopratutto, ma non unicamente, l'opportunità di esaminare se il documento sia falso od autentico.

Si sono conservati due apparenti originali di questo documento. Uno di essi sta nell'archivio vescovile di Pinerolo, e l'altro è posseduto dal barone A. Cavalchini-Garofoli. L'esame paleografico e diplomatico di queste due carte, scritte da una stessa mano, dimostra che non sono veri originali, e che vennero composte tra la fine del sec. XII e il principio del sec. XIII.

Esclusa per tal modo la genuinità di ambedue gli originali del diploma, non è ancora provato che il contenuto di questo sia totalmente falso. L'esame del contenuto dal documento conduce al risultato, che assai probabilmente esistette bensì un testo autentico sul quale furono compilati i due pseudo-originali, ma che in esso mancavano, per quanto si può ritenere, appunto le accennate notizie storiche.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

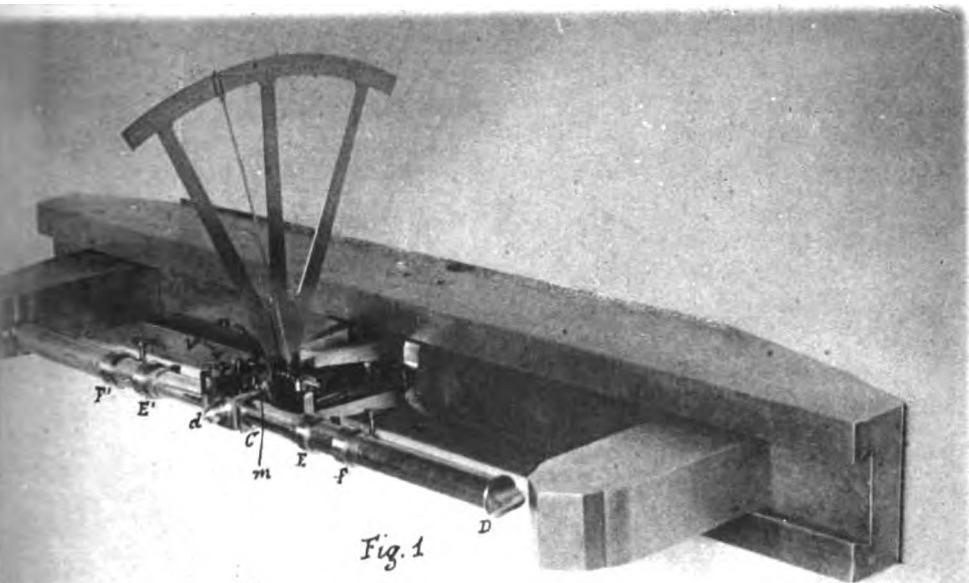



Fig. 1

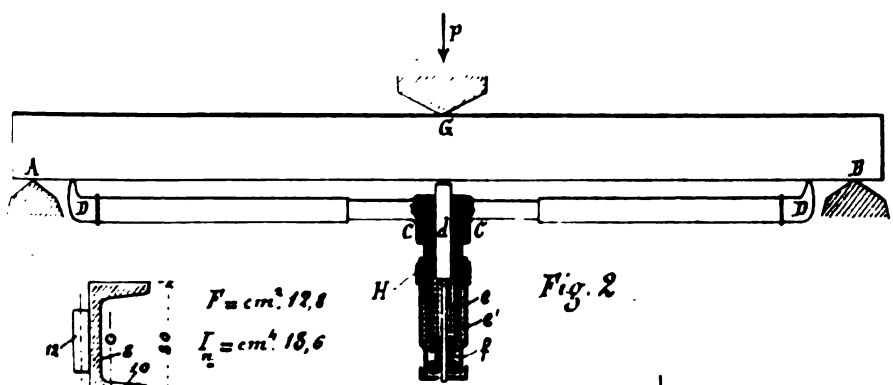



Fig. 2

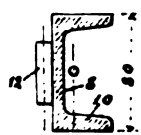



Fig. 6

$F = cm^2\ 12,8$

$I_n = cm^4\ 18,6$

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Stab. Eliot. Molfese — To

SOMMARIO

Classi Unite.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi unite.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXV, Disp. 4ª, 1899-900

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1900

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Gennaio 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SALVADORI, D'OVIDIO, SPEZIA, CAMERANO, SEGRE, VOLTERRA, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, FILETI, PARONA e NACCARI Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza precedente, che viene approvato.

Il Presidente comunica la morte del Socio corrispondente Prof. Carlo RAMMELSBERG avvenuta il 29 dicembre 1899. Il RAMMELSBERG apparteneva alla sezione di Mineralogia e Geologia ed era stato nominato corrispondente il 24 gennaio 1897. Il Presidente ne ricorda i meriti scientifici e chiede al Socio SPEZIA, che fu discepolo del defunto mineralogista, se voglia scriverne una breve commemorazione per gli *Atti*. Il Socio SPEZIA consente volentieri.

Il Socio CAMERANO presenta una sua nota intitolata: *Lo studio quantitativo degli organismi e il coefficiente somatico*. Sarà inserita negli *Atti*.

Poscia la Classe si costituisce in seduta privata e procede all'elezione di un Socio straniero. Riesce eletto il prof. Giorgio Gabriele STOKES dell'Università di Cambridge (Inghilterra), salvo la sovrana approvazione.

LETTURE

Lo studio quantitativo degli organismi ed il coefficiente somatico;

Nota del Socio LORENZO CAMERANO.

" La forme numérique ne doit pas abuser. Les chiffres employés dans la méthode statistique ne sont qu'une manière de grouper des faits, dans le but d'extimer mieux leur valeur et les causes qui les ont produits. „
A. De Candolle, *Hist. des sciences*, p. 111 - 1873.

A chi segue l'andamento odierno delle ricerche intorno ai viventi riesce manifesta la tendenza di tentare lo studio delle leggi della variazione coi procedimenti della matematica. Una oramai lunga schiera di naturalisti, particolarmente inglesi ed americani, si occupa con grande lena, diremo coll'espressione inglese, del *quantitative study of organisms* (1). Essi sperano di giungere per tale via alla soluzione di questioni importanti relative alle leggi della variazione, alle cause della variazione, agli effetti della selezione, all'origine della specie, e conseguentemente alla definizione della specie e alla distinzione fra specie e varietà. Si cerca pure di ottenere per tale via nuovi criterii in ordine alle omologie, ai fenomeni ereditari, alle differenze sessuali, ecc.

In una parola, dice il Davenport (op. cit., pag. 39) " by

(1) Una diligente bibliografia relativa a questo argomento si trova nelle opere seguenti: Georg Duncker, *Die Methode der Variationsstatistik* (" Archiv für Entwickelungsmechanik der Organismen „) di W. Roux, VIII, 1899, p. 167. — C. B. Davenport, *Statistical methods*, p. 40. New York, 1899. — G. Duncker, *Wesen und Ergebnisse der variationsstatistischen Methode in der Zoologie* (" Verhandl. der Deutschen Zoolog. Gesel. neunten Jahresversam. „). Leipzig, 1899, p. 209.

the use of the quantitative method biology will pass from the field of the speculative sciences to that of the exact sciences „.

Questa entusiastica affermazione del Davenport può invero ritenersi per lo meno prematura, come lo dimostrano i lavori seguenti che sono fra i più importanti:

Pearson, *Contributions to the mathematical theory of Evolution* (" Phil. Trans. „, CLXXXV, p. 71-110 (1894)) — Amann, *Application du calcul des probabilités à l'étude de la variation d'un type végétal* (" Bull. herb. Boissier „, IV) — Thompson, *On certain changes observed in the dimensions of the carapace of Carcinus maenas* (" Proc. R. Soc. London „, IX) — Weldon, *Attempt to mesure the death-rate due to the selective destruction of Carcinus maenas with respect to a particular dimension* (" Pr. R. Soc. London „, LVII).

A proposito di questi ed altri consimili lavori, molto opportunamente osserva il Coutagne (1): " Je crains que les savants anglais qui poursuivent actuellement avec tant de zèle et d'ingéniosité, ce qu'ils appellent eux-mêmes l'étude mathématique de l'évolution, ne se fassent un peu illusion sur l'efficacité de ces recherches si pénibles. Les statistiques mêmes très perfectionnées, c'est-à-dire encore plus compliquées de calculs mathématiques que ne l'était celle du Rapport de Weldon, ne donneront guère de conclusions utilisables, tellement sont nombreuses les causes de variations, dont les statistiques montrent simplement les résultantes, surtout lorsqu'il s'agit des phénomènes anthropologiques. Chaque fois que l'on en vient à la discussion des résultats donnés par le calcul, on s'aperçoit le plus souvent que le fait constaté comporte plusieurs interprétations, toutes aussi admissibles les unes que les autres, bien que parfois contradictoires „.

Lo stesso Coutagne (2), a proposito del lavoro di K. Pearson (*Contributions to the mathematical theory of Evolution*, op. cit.), dice pure giustamente: " Les développements mathématiques de ce mémoire sont forts intéressants. Mais il y aurait bien des réserves à faire aux raisonnements par lesquels l'auteur essaye

(1) " Année biologique „, 1896, pag. 272. — Confr. per la critica di questi lavori: " Année biologique „ 1895-1896-1897.

(2) " Année biologique „, 1895, pag. 502.

de passer des résultats positifs et incontestables fournis par l'analyse mathématique, à des énoncés de faits ou lois biologiques. Il faut simplifier les problèmes biologiques par un si grand nombre d'hypothèses plus ou moins vraisemblables lorsqu'on veut les ramener à des problèmes mathématiquement solubles! Ainsi, savons-nous seulement si la tychopsie est bien réellement la forme *normale* que présentent les synoptiques de tous les caractères chez les groupes très homogènes, c'est-à-dire chez les *races pures?* Qu'est-ce, même, qu'une *race pure?* Toutes les hypothèses sur lesquelles repose la " théorie mathématique de l'évolution „ devraient être préalablement contrôlées par l'expérience „.

A. Giard nella sua nota intitolata: *Sur certains cas de dédoublement des courbes de Galton dus au parasitisme et sur le dimorphisme d'origine parasitaire* „ (" Compt. Rend. Ac. Sc. Paris „, vol. 118, 1894, pag. 870) dice: " Le calcul ne peut que rendre sous une forme différente, souvent plus saisissante, ce qu'on lui a confié, et la statistique ne dispense pas de l'étude analytique des faits enregistrés. C'est ainsi que toute considération arithmétique ou statistique est impuissante à expliquer une particularité singulière déjà signalée par plusieurs auteurs „.

Considerazioni analoghe si possono pure fare intorno al recente *Studio comparativo tra le forme organiche naturali e le forme geometriche pure* del prof. Schiaparelli (Milano, Hœpli, 1898) (1).

Da quanto precede dobbiamo forse conchiudere che la nuova via di ricerche particolarmente indicata dai naturalisti inglesi ed americani dev'essere senz'altro considerata come inetta a condurre a qualche utile risultamento? No certamente.

Il pensiero, diremo coll'Emery (2), che le manifestazioni diverse della natura possano essere espresse con equazioni algebriche, e che queste siano casi speciali di formole più generali, si affaccia spontaneamente a chi scorge nell'universo percettibile dei sensi, non soltanto un oggetto di meraviglia, ma un argomento di studio non inaccessibile alla nostra intelligenza.

(1) Confr. per la critica di questo lavoro C. Emery " Rivista di Scienze biologiche „, Anno I, N° 4, 1899. Torino.

(2) Op. cit.

E perciò, attribuire a ciascun organismo la sua equazione specifica, alle cui variazioni corrispondano modificazioni dell'organismo stesso, è un pensiero che, nella sua arditezza, mi piace: esso tende a creare nuovi simboli, sui quali la mente possa lavorare con ragionamenti astratti, che dovrebbero poi, per non rimanere vana speculazione, essere ricondotti a concetti concreti, quindi suscettibili di controllo empirico. „

Io credo che il " metodo matematico „ applicato allo studio dei viventi possa produrre risultati buoni a condizione che i problemi che si vogliono risolvere con esso siano posti bene e che le conclusioni siano interpretate con prudenza e con esatta cognizione dei fenomeni biologici (1).

Volendo anche ritenere che il metodo matematico non possa, da solo, condurci alla spiegazione dei fenomeni biologici, si può tuttavia ammettere che la sua introduzione nella biologia può produrre un buon effetto sull'andamento degli studi biologici stessi: si può sperare che esso induca gli studiosi a cercare di stabilire con maggiore precisione di quello che non sia stato fatto fino ad ora, i dati relativi alle cosidette variazioni quantitative dei viventi, precisione che si osserva mancare, anche in lavori recenti, in troppo larga misura.

Lo studio quantitativo degli animali importa anzitutto la constatazione con misure precise dello sviluppo delle varie loro

(1) Nell'applicare il cosidetto metodo matematico e statistico allo studio degli animali uno scoglio è da evitarsi: bisogna cioè badar bene di non cadere nella via seguìta dagli antropologi nello studio del cranio dopo le opere del Broca. Contro a questa scuola è sorto oggi assai felicemente il Sergi (*Specie e varietà umane - Saggio di una sistematica antropologia*. Torino, Bocca, 1900). " Si è creduto, egli dice (p. 13) che aumentando misure e cifre si possa determinare la forma del cranio: e l'ultima espressione di questo metodo si ha nei lavori di V. Török, il quale ha creduto che migliaia di misure lineari e angolari possano darci le forme razionali del cranio, non pensando che i numeri sono astrazioni, e più si moltiplicano, più allontanano dalla reale percezione dell'oggetto, il quale allora fugge ad ogni determinazione concreta „ ... " il metodo craniometrico che è una esagerazione d'un principio esatto cioè di esprimere numericamente alcuni rapporti del cranio, come spesso e in altre occasioni ho ripetuto, può servire di sussidio ad un metodo naturale, che non deve essere differente nel principio da quello introdotto nelle altre scienze biologiche per la sistematica, cioè per la botanica e per la zoologia „.

parti. Le misure delle varie parti di un individuo devono essere prese in modo che esse siano l'espressione delle risultanti delle molteplici cause di variazione che hanno agito sull'individuo. Così pure le misure che si dànno come *costanti* (1) di una specie devono essere l'espressione delle risultanti delle cause che hanno agito sull'evoluzione della specie stessa, inducendo in essa una forma determinata.

Forse si può pensare a misure caratteristiche, *costanti*, per i gruppi tassonomici più elevati, generi, famiglie, ecc., ma per ora la questione non è certamente matura.

Nel campo pratico sono da considerarsi anzitutto due punti principali:

1° Il modo di eseguire le misure per ottenere la maggior precisione possibile;

2° Dato un animale di una determinata specie, quali parti devono essere misurate e in quali direzioni.

Io non mi fermerò qui a parlare dei mezzi materiali di misura, essi sono oramai ben noti; dirò soltanto che il regolo graduato, il compasso ordinario ed il compasso di spessore, ben adoperati, ci concedono, nella massima parte dei casi, di ottenere misure dirette coll'approssimazione di almeno $^1/_4$ di millimetro. L'uso dei nonii, dell'entomometro (Emery, " Bull. Soc. Ent. Ital. ", XXII, 1891) o di altri istrumenti analogi potrà darci una approssimazione maggiore, la quale potrà crescere ancora se si tratta di animali sottoponibili alle misure micrometriche col microscopio.

Neppure mi fermerò a lungo sul secondo punto sopra indicato. Ciascun gruppo di animali che si vuol misurare deve essere studiato preventivamente per poter stabilire quali siano le direzioni per le quali si devono condurre le misure, analogamente a quanto venne fatto, ad esempio, pel corpo umano.

A questo proposito è d'uopo osservare che nei lavori speciografici, anche recenti, si nota spesso una completa mancanza di criterî direttivi sicuri intorno al modo di misurare gli animali. Spesso il descrittore si limita a dare una o due misure

(1) La parola costante applicata a caratteri specifici, generici o di altri gruppi tassonomici va intesa nel significato moderno della idea di specie, di genere, ecc., quindi in modo relativo e non assoluto.

per ciascuna specie, prendendole sopra individui scelti fra quelli di mole maggiore, spesso anche nelle descrizioni delle specie dello stesso genere si dànno misure di parti diverse per ciascuna di esse, in guisa che non riesce possibile utilizzare questi dati per nessun studio di comparazione.

Nello stato presente dello studio degli animali è importante, se si vuole fare lavoro utile per un ulteriore progresso della zoologia sistematica e per lo studio quantitativo degli animali:

1° Stabilire per ciascun gruppo di animali un piano uniforme di misure per tutte le specie;

2° Non limitarsi a dare le misure degli individui di mole maggiore, ma è d'uopo aggiungervi anche quelle degli altri gruppi d'individui di ciascuna specie;

3° È necessario accompagnare le misure dei vari gruppi d'individui di una specie con tutte quelle osservazioni e con tutti quei dati (sesso, stadio di sviluppo, età, condizioni di sviluppo, condizione degl'individui rispetto al periodo riproduttivo, ecc., condizioni di *habitat,* presenza o mancanza in essi di determinati parassiti, ecc.) che possono in qualche guisa condurre alla interpretazione delle misure stesse.

Tutto ciò spesso manca nei lavori speciografici e per tale ragione molti lavori faunistici non hanno oramai altro interesse che di aridi inventari.

Una serie invece di lavori faunistici, anche di località ristrette e vicine le une alle altre, fatti coi criteri fondamentali sopradetti e colle norme del moderno *metodo statistico* (Davenport, op. cit.), avrebbe importanza assai grande quale materiale utilizzabile per uno studio comparativo intorno alla variazione degli animali e conseguentemente per lo studio dei limiti specifici, delle varietà, ecc.

Lo studio delle entità, specie, varietà, ecc., deve precedere lo studio matematico della evoluzione nel senso dei lavori del Pearson, dello Schiaparelli, ecc., poichè fino a tanto che non si sia venuti a determinare bene che cosa si debba intendere per gruppo omogeneo d'individui, o, come altri dice, per gruppo d'individui di *razza pura,* non è possibile che le teorie matematiche dell'evoluzione possano essere sottoposte al controllo dell'esperienza.

Giova osservare inoltre che non solo in questo, ma in tutti

i campi di studio della biologia si fa ogni giorno più impellente la necessità di una delimitazione più esatta dei limiti dei gruppi specifici e di varietà: delimitazione che gli studi recenti dietologici hanno reso anche meno facile di prima introducendovi il *criterio biologico.*

Certamente di grande peso è l'asserzione di Cockerell (" Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelfia „), che cioè i caratteri distintivi essenziali fra le specie sono fisiologici, mentre i caratteri morfologici non hanno valore diagnostico che in quanto coincidono coi caratteri fisiologici. Certamente un campo vastissimo è aperto al lavoro dei zoologi che non si accontentano di creare frettolosamente specie su specie con un superficiale ed incompleto studio dei caratteri morfologici.

Nei lavori speciografici, alle misure assolute delle varie parti degli animali si fanno seguire frequentemente misure comparative o rapporti fra le parti stesse. Ma anche questo grande materiale di dati numerici (anche volendolo ritenere esatto) riesce oggi pressochè inutilizzabile per la grande disparità dei criteri secondo i quali venne riunito.

Spesso nello stesso lavoro, anzi nelle specie dello stesso genere, sono considerati pei confronti e pei rapporti organi diversi fra le varie specie, per modo che i dati di una specie non si possono paragonare con quelli delle specie vicine. In secondo luogo il confronto delle dimensioni di un organo con un altro, dal quale ne dovrebbe venire qualche dato per lo studio della correlazione di sviluppo dei due organi in una specie, o fra le specie di un dato genere, viene fatto scegliendo spesso a casaccio gli organi stessi. Un autore, ad esempio, nella descrizione di una specie paragona la lunghezza del capo a quella del tronco, nella descrizione di una specie vicina paragona la lunghezza del capo a quella della tibia. Un'escrescenza cornea, ad esempio, uno sperone delle zampe posteriori vien paragonato al diametro massimo dell'occhio o della membrana timpanica.

Le misure, i paragoni di organi ed i rapporti che se ne deducono, se possono in certi casi servire per fare una diagnosi frettolosa di una specie, non possono in alcun modo servire per alcun studio ulteriore di comparazione.

Chi volesse oggi servirsi dell'enorme materiale di descrizione delle specie e delle varietà in ordine allo studio delle

leggi della variabilità rimarrebbe, nella maggior parte dei casi, disilluso per l'incompletezza grande ed anche per la superficialità di osservazione che hanno presieduto alla sua formazione. Anche in questo campo il lavoro è in gran parte da rifarsi con metodi più esatti e con maggior larghezza di vedute.

Nè si tratta di studio breve, nè agevole, poichè la correlazione, nel vero senso della parola, vuole una relazione persistente ed operante in egual misura fra due ordini di fenomeni concomitanti che, nel caso nostro, dànno come risultante il correlativo variare di due o più organi. La causa della correlazione di due o più organi non sta sempre nell'azione che un organo sviluppandosi o riducendosi esercita sugli altri; ma spesso va ricercata fuori di essi. Un lungo lavoro è da farsi per determinare nelle varie specie di animali le *correlazioni propriamente dette* fra i varî organi e le semplici *coincidenze* (*correlazione fortuita* di Pearson, op. cit.).

Lo studio quantitativo degli animali fatto coi criteri moderni può fornire il materiale adatto per le ricerche sopra menzionate.

Nello studio quantitativo di una serie d'individui appartenenti ad un gruppo determinato, noi possiamo limitarci a stabilire, colla massima precisione possibile, delle serie di misure assolute dei varî organi.

Con questi dati il variare correlativo di due o più organi potrà essere facilmente studiato senza ricorrere al sistema del Warren (*Variation in Portunus depurator,* " Pr. R. Soc. London ", IX, 1896) di paragonare, ad esempio, le misure di due organi ad una terza e poi paragonare i due rapporti così ottenuti fra loro. Evidentemente i risultati numerici non cambiano, limitandoci, per maggior semplicità di calcolo, ai rapporti delle grandezze assolute degli organi fra loro.

Ma di maggior interesse è lo studiare lo sviluppo dei varî caratteri col variare della mole dell'animale, per l'età, per le condizioni speciali di vita e via discorrendo, non solo negli individui di una specie, ma negli individui delle varie specie di un genere, di una famiglia, ecc.

Per tali ricerche è d'uopo comparare fra loro individui di mole diversa nell'ambito di ciascuna specie ed anche specie di mole spesso notevolmente diversa nella cerchia dello stesso genere. Non essendo in questo caso comparabili le misure assolute,

si suol dire, ad esempio, che il carattere *a* negl'individui giovani di una specie è la $^1/_2$ del carattere *b*, mentre negli individui adulti ne è i $^2/_3$, oppure che nella specie A il carattere *a* è eguale a $^1/_2$ del carattere *b*; mentre nella specie B lo stesso carattere *a* è soltanto eguale ad $^1/_8$ del carattere *b*, e così di seguito.

Questo metodo molto grossolano, che è quello generalmente seguìto, se può servire per una rapida e sommaria diagnosi specifica, non può servire per lo studio preciso, quantitativo degli animali.

Angelo Andres, nel suo recente ed accurato lavoro sui caratteri sessuali secondari della tinca (1), si occupò pure di questa questione.

La difficoltà, egli dice, di esprimere con cifre i rapporti di posizione e di grandezza dei varî organi e delle varie regioni del corpo, si è presentata sempre ai zoologi; e non soltanto per i pesci, sibbene per qualsiasi animale. In generale però essi non l'hanno risolta; tutt'al più si sono limitati a paragonare fra loro le distanze o le grandezze dei varî organi; a notare, per esempio, che una pinna (per attenerci sempre ai pesci) è lunga quanto il capo, che un'altra eguaglia l'altezza massima del corpo, che l'occhio sta a due terzi fra la punta del muso ed il margine opercolare, ecc.; ovvero a prendere come unità di misura un determinato organo, p. es. il diametro dell'occhio, e dire che il capo è lungo dieci diametri, che la narice ne dista uno dalla punta del muso, che l'occhio stesso ne dista due e mezzo, ecc. Procedimenti già usati, del resto, dagli artisti a proposito del corpo umano. — Ma, come è facile riconoscere, sono metodi affatto empirici che non possono dare risultati attendibili; metodi che valgono sino ad un certo grado per una specie ben nota, come è la nostra, o per confrontare grossolanamente specie diverse, ma che non servono affatto quando si tratta di determinare minute e fuggevoli differenze quali sono quelle delle variazioni individuali e sessuali. — È per queste considerazioni che io ideai il metodo dei *millesimi somatici*, che, per quanto mi consta, è nuovo, o per lo meno poco usato „.

“ Le misurazioni, continua l'Andres, vennero fatte in mil-

(1) “ Rendiconti R. Istituto Lombardo di lett. „. Serie II, vol. XXX, 1897.

limetri; ma ciò non bastava, perocchè in causa della inevitabile diversità di grandezza degli esemplari esaminati, le cifre ottenute per le singole distanze non erano facilmente paragonabili da una serie all'altra. E ciò non reca meraviglia se si riflette che, in questo caso le distanze misurate non rappresentano quantità concrete ed assolute, sibbene soltanto quantità astratte e relative; vale a dire semplici rapporti fra la parte ed il tutto, fra la grandezza di una singola regione o di un singolo organo e la grandezza dell'intiero corpo. Così essendo, fu necessario di trasformare queste cifre concrete del sistema metrico in cifre astratte, esprimenti cotali rapporti. Per ottenere questo, adunque, in luogo di usare come unità di misura il metro con le sue frazioni, presi come unità la lunghezza del corpo dell'animale misurato, ed espressi le singole distanze come frazioni di tale unità. Io ho quindi presupposto che in ogni caso il corpo dell'animale fosse lungo 1000 parti e con millesimi indicai di conseguenza le varie distanze in esso misurate. Con una semplice equazione ($L : 1000 = l : x$, essendo L la lunghezza totale del corpo ed l una delle distanze parziali) fu facile, benchè assai tedioso e lungo, di ridurre tutte le serie di millimetri concreti in serie di millesimi astratti, o *millesimi somatici*, come li chiamai „.

Il metodo proposto dall'A. dà certamente buoni risultati: ma è assai lungo e faticoso, poichè per ogni misura assoluta è d'uopo calcolare l'equazione $L : 1000 = l : x$.

Si può, a mio avviso, rendere più rapido e semplice il metodo proposto nel modo seguente.

Dalla equazione sopradetta si ha:

$$x = \frac{1000 \times l}{L};$$

ora io posso scrivere anche $x = \frac{1000}{L} l$.

Il rapporto $\frac{1000}{L}$ è una quantità costante per ogni individuo, di cui il corpo ha la lunghezza di L, che moltiplica le misure assolute delle varie parti dell'individuo stesso; $\frac{1000}{L}$ può essere calcolato una volta per tutte.

La divisione inoltre del corpo che si prende come base es-

sendo arbitraria, si può domandare se non converrebbe scegliere un numero che avesse un numero maggiore di divisori intieri del numero 1000, poichè ciò concederebbe in molti casi una maggior precisione di calcolo, evitando di dover trascurare molte frazioni.

Il numero che meglio soddisfa a questa condizione è, come è noto, 360.

Io propongo di sostituire 360 a 1000, e così, nel caso di Andres, la lunghezza del corpo sarebbe divisa in 360 parti e le misure delle altre parti sarebbero espresse in 360 esimi della lunghezza del corpo.

Ciò stabilito, si può calcolare una volta per tutte il rapporto $\frac{360}{L}$, facendo successivamente $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$, ecc., fino a 360, di modo che chiamando ω il rapporto $\frac{360}{L}$

$$x = \frac{360}{L} l$$

potrà scriversi $x = \omega \times l$, in cui ω è il rapporto della lunghezza del corpo di un dato individuo a 360, l la lunghezza assoluta di una data parte dell'individuo stesso, x la lunghezza della parte stessa espressa in 360 esimi della lunghezza del corpo.

ω quindi è il coefficiente pel quale è d'uopo moltiplicare le lunghezze assolute delle varie parti di un individuo per rendere le lunghezze stesse comparabili con quelle di altri individui di dimensioni diverse calcolate nello stesso modo.

Non è d'uopo dire che L ed l potranno essere espressi colle unità di misura che si crederanno più opportune: in metri, in decimetri, in centimetri, in millimetri, in decimi di millimetri, in centesimi di millimetri, in millesimi di millimetri, ecc., come pure in millimetri quadrati, ecc., in millimetri cubici, ecc.

Nelle tavole qui unite ho calcolato il valore di ω da $^1/_4$ di uno fino a 360, procedendo per quarti successivi. Credo che ciò possa essere sufficiente nella pratica; poichè nella maggior parte dei casi L ed l potranno essere espressi in millimetri e, per lo più, la precisione delle misure dirette sino ad $^1/_4$ di millimetro è la sola possibile.

Nei casi in cui la cosa sia possibile, L e l potranno essere espressi in decimi di millimetro e si potranno avere i valori

di ω calcolati a $^1/_4$ di decimo di millimetro. La stessa cosa si dica se noi daremo i valori di L e l in micromillimetri.

Nei casi speciali di animali a grande mole la precisione ad $^1/_4$ di centimetro e talvolta anche ad $^1/_4$ di decimetro, sarà la sola praticamente raggiungibile, sopratutto se si tratta di animali in carne.

È inutile evidentemente tener conto in una misura assoluta del $^1/_4$ di millimetro se le condizioni nelle quali la misura viene fatta può far credere ad un errore possibile non inferiore ad un millimetro, ecc.

Al coefficiente ω io do il nome, per brevità, di *coefficiente somatico individuale.*

Le ricerche future decideranno se sarà possibile giungere a stabilire un *coefficiente somatico specifico*, un *coefficiente somatico generico*, ecc.

Nel metodo proposto dall'Andres e nel mio sono sempre da stabilirsi per ciascun gruppo di animali i limiti precisi della lunghezza L dell'animale che s'intende divisa in 360 parti. Essa potrà essere la lunghezza totale dell'animale dall'apice del muso all'estremità posteriore del corpo: potrà essere una lunghezza minore (come, ad esempio, quella presa dall'Andres). Nello stabilire questa lunghezza sono da tenersi presenti due punti principali:

1° È d'uopo stabilire limiti misurabili colla massima precisione possibile, poichè si è con essa che dalle tabelle qui unite si ottiene il valore del *coefficiente somatico* ω;

2° È d'uopo cercare quella parte che negl'individui di una specie presentasi meno variabile. Così, ad esempio, volendo coi metodi proposti studiare le dimensioni delle varie parti di una lucertola o di una salamandra, sarà bene fare L = alla lunghezza che va dalla sinfisi della mandibola alla metà della apertura anale, lasciando fuori la coda (parte variabilissima), la quale viene poscia misurata isolatamente come un'altra parte qualsiasi dell'animale. Scelta una determinata parte per ottenere il valore L, essa dev'essere conservata per tutti gl'individui dei quali si vuole fare uno studio comparativo delle dimensioni dei loro organi.

Ecco un esempio pratico applicato ad alcune misure di 3 individui di mole diversa di *Bufo vulgaris* Laur.

Misure assolute in millimetri.

	a	b	c
Lunghezza totale misurata dalla sinfisi della mandibola all'apertura anale = (L)	m. 0,045	m. 0,060	m. 0,120
Lunghezza del capo = (l)	„ 0,011	„ 0,020	„ 0,042
„ della tibia = (l')	„ 0,017	„ 0,022	„ 0,045
Diam. massimo dell'occhio = (l'')	„ 0,005	„ 0,0055	„ 0,009

Lunghezza totale, ecc., come sopra, per l'individuo *a* essendo di m. 0,045, dalle tavole qui unite si deduce $\omega = 8$; analogamente per l'individuo *b,* $\omega = 6$, e per l'individuo *c,* $\omega = 3$. Moltiplicando rispettivamente pei tre individui le misure l, l', l'' per 8, per 6 e per 3, si ottengono le misure espresse in 360 esimi somatici.

	a	b	c
Lunghezza del capo	88	120	126
„ della tibia	136	132	135
Diam. massimo dell'occhio	40	33	27

Coll'uso del *coefficiente somatico*, rapidamente ottenibile dalle tavole qui unite, la riduzione delle misure assolute viene ad essere resa facile e operazione non lunga. Io credo che tale modo di presentare le misure delle varie parti degli animali potrà concedere confronti sicuri delle variazioni degli individui d'una specie e delle varie specie fra loro, e potrà servire alla riunione di buoni materiali per lo studio della sistematica e per lo studio quantitativo degli animali.

Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico
		11	32,727	**22**	16,363	**33**	10,909	**44**	8,181
0,25	1440	11,25	32	22,25	16,179	33,25	10,827	44,25	8,136
0,50	720	11,50	31,304	22,50	16	33,50	10,746	44,50	8,090
0,75	480	11,75	30,638	22,75	15,824	33,75	10,667	44,75	8,045
1	360	**12**	30	**23**	15,652	**34**	10,588	**45**	8
1,25	288	12,25	29,388	23,25	15,484	34,25	10,511	45,25	7,956
1,50	240	12,50	28,8	23,50	15,319	34,50	10,435	45,50	7,912
1,75	205,714	12,75	28,235	23,75	15,158	34,75	10,360	45,75	7,869
2	180	**13**	27,692	**24**	15	**35**	10,285	**46**	7,826
2,25	160	13,25	27,169	24,25	14,845	35,25	10,213	46,25	7,784
2,50	144	13,50	26,667	24,50	14,698	35,50	10,141	46,50	7,742
2,75	130,909	13,75	26,181	24,75	14,545	35,75	10,069	46,75	7,701
3	120	**14**	25,714	**25**	14,4	**36**	10	**47**	7,660
3,25	110,769	14,25	25,265	25,25	14,257	36,25	9,931	47,25	7,619
3,50	102,857	14,50	24,827	25,50	14,118	36,50	9,863	47,50	7,579
3,75	96	14,75	24,407	25,75	13,981	36,75	9,796	47,75	7,539
4	90	**15**	24	**26**	13,846	**37**	9,729	**48**	7,5
4,25	84,706	15,25	23,606	26,25	13,714	37,25	9,664	48,25	7,461
4,50	80	15,50	23,226	26,50	13,585	37,50	9,6	48,50	7,423
4,75	75,789	15,75	22,857	26,75	13,457	37,75	9,536	48,75	7,385
5	72	**16**	22,50	**27**	13,333	**38**	9,473	**49**	7,347
5,25	68,571	16,25	22,153	27,25	13,211	38,25	9,412	49,25	7,310
5,50	65,454	16,50	21,818	27,50	13,091	38,50	9,351	49,50	7,273
5,75	62,609	16,75	21,493	27,75	12,973	38,75	9,290	49,75	7,236
6	60	**17**	21,176	**28**	12,857	**39**	9,231	**50**	7,2
6,25	57,6	17,25	20,869	28,25	12,744	39,25	9,172	50,25	7,164
6,50	55,385	17,50	20,571	28,50	12,632	39,50	9,114	50,50	7,129
6,75	53,333	17,75	20,281	28,75	12,522	39,75	9,057	50,75	7,094
7	51,428	**18**	20	**29**	12,413	**40**	9	**51**	7,059
7,25	49,655	18,25	19,726	29,25	12,308	40,25	8,944	51,25	7,028
7,50	48	18,50	19,459	29,50	12,203	40,50	8,889	51,50	6,990
7,75	46,452	18,75	19,2	29,75	12,101	40,75	8,834	51,75	6,956
8	45	**19**	18,947	**30**	12	**41**	8,780	**52**	6,923
8,25	43,664	19,25	18,701	30,25	11,901	41,25	8,728	52,25	6,890
8,50	42,353	19,50	18,461	30,50	11,803	41,50	8,675	52,50	6,857
8,75	41,143	19,75	18,228	30,75	11,707	41,75	8,623	52,75	6,825
9	40	**20**	18	**31**	11,612	**42**	8,571	**53**	6,792
9,25	38,918	20,25	17,778	31,25	11,52	42,25	8,521	53,25	6,761
9,50	37,894	20,50	17,561	31,50	11,429	42,50	8,471	53,50	6,729
9,75	36,923	20,75	17,345	31,75	11,339	42,75	8,421	53,75	6,698
10	36	**21**	17,142	**32**	11,25	**43**	8,371	**54**	6,667
10,25	35,122	21,25	16,941	32,25	11,163	43,25	8,324	54,25	6,636
10,50	34,286	21,50	16,744	32,50	11,077	43,50	8,275	54,50	6,605
10,75	33,488	21,75	16,551	32,75	10,992	43,75	8,229	54,75	6,575

Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico
55	6,545	**66**	5,455	**77**	4,675	**88**	4,091	**99**	3,636
55,25	6,516	66,25	5,434	77,25	4,660	88,25	4,079	99,25	3,627
55,50	6,486	66,50	5,414	77,50	4,645	88,50	4,068	99,50	3,618
55,75	6,457	66,75	5,393	77,75	4,630	88,75	4,056	99,75	3,609
56	6,429	**67**	5,373	**78**	4,615	**89**	4,049	**100**	3,60
56,25	6,4	67,25	5,355	78,25	4,601	89,25	4,034	100,25	3,591
56,50	6,371	67,50	5,333	78,50	4,586	89,50	4,022	100,50	3,582
56,75	6,344	67,75	5,314	78,75	4,571	89,75	4,011	100,75	3,573
57	6,316	**68**	5,294	**79**	4,557	**90**	4	**101**	3,564
57,25	6,288	68,25	5,275	79,25	4,543	90,25	3,989	101,25	3,555
57,50	6,261	68,50	5,255	79,50	4,528	90,50	3,978	101,50	3,546
57,75	6,234	68,75	5,236	79,75	4,514	90,75	3,967	101,75	3,538
58	6,207	**69**	5,217	**80**	4,5	**91**	3,956	**102**	3,529
58,25	6,180	69,25	5,198	80,25	4,486	91,25	3,945	102,25	3,520
58,50	6,154	69,50	5,180	80,50	4,472	91,50	3,934	102,50	3,512
58,75	6,128	69,75	5,161	80,75	4,458	91,75	3,920	102,75	3,503
59	6,102	**70**	5,143	**81**	4,444	**92**	3,913	**103**	3,495
59,25	6,076	70,25	5,125	81,25	4,431	92,25	3,902	103,25	3,486
59,50	6,050	70,50	5,106	81,50	4,417	92,50	3,892	103,50	3,478
59,75	6,025	70,75	5,088	81,75	4,404	92,75	3,881	103,75	3,469
60	6	**71**	5,070	**82**	4,390	**93**	3,871	**104**	3,462
60,25	5,975	71,25	5,059	82,25	4,378	93,25	3,861	104,25	3,453
60,50	5,950	71,50	5,035	82,50	4,367	93,50	3,850	104,50	3,444
60,75	5,926	71,75	5,017	82,75	4,350	93,75	3,84	104,75	3,436
61	5,902	**72**	5	**83**	4,337	**94**	3,830	**105**	3,429
61,25	5,878	72,25	4,983	83,25	4,324	94,25	3,819	105,25	3,420
61,50	5,854	72,50	4,966	83,50	4,311	94,50	3,810	105,50	3,412
61,75	5,830	72,75	4,948	83,75	4,298	94,75	3,804	105,75	3,404
62	5,806	**73**	4,932	**84**	4,286	**95**	3,789	**106**	3,396
62,25	5,783	73,25	4,915	84,25	4,274	95,25	3,779	106,25	3,388
62,50	5,76	73,50	4,898	84,50	4,260	95,50	3,770	106,50	3,380
62,75	5,737	73,75	4,881	84,75	4,248	95,75	3,760	106,75	3,372
63	5,730	**74**	4,857	**85**	4,235	**96**	3,75	**107**	3,364
63,25	5,692	74,25	4,848	85,25	4,223	96,25	3,740	107,25	3,356
63,50	5,669	74,50	4,832	85,50	4,211	96,50	3,731	107,50	3,348
63,75	5,647	74,75	4,829	85,75	4,198	96,75	3,721	107,75	3,341
64	5,625	**75**	4,8	**86**	4,186	**97**	3,711	**108**	3,333
64,25	5,603	75,25	4,784	86,25	4,170	97,25	3,702	108,25	3,325
64,50	5,581	75,50	4,768	86,50	4,162	97,50	3,692	108,50	3,317
64,75	5,560	75,75	4,752	86,75	4,150	97,75	3,683	108,75	3,310
65	5,538	**76**	4,737	**87**	4,138	**98**	3,673	**109**	3,303
65,25	5,517	76,25	4,721	87,25	4,126	98,25	3,664	109,25	3,295
65,50	5,496	76,50	4,706	87,50	4,114	98,50	3,655	109,50	3,287
65,75	5,475	76,75	4,691	87,75	4,103	98,75	3,645	109,75	3,280

Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico
110	3,273	**121**	2,975	**132**	2,728	**143**	2,517	**154**	2,337
110,25	3,265	121,25	2,969	132,25	2,722	143,25	2,513	154,25	2,334
110,50	3,257	121,50	2,962	132,50	2,717	143,50	2,509	154,50	2,330
110,75	3,250	121,75	2,956	132,75	2,712	143,75	2,504	154,75	2,326
111	3,243	**122**	2,951	**133**	2,707	**144**	2,5	**155**	2,322
111,25	3,235	122,25	2,944	133,25	2,702	144,25	2,496	155,25	2,319
111,50	3,228	122,50	2,938	133,50	2,696	144,50	2,491	155,50	2,315
111,75	3,221	122,75	2,932	133,75	2,692	144,75	2,487	155,75	2,311
112	3,214	**123**	2,927	**134**	2,687	**145**	2,483	**156**	2,308
112,25	3,207	123,25	2,920	134,25	2,681	145,25	2,478	156,25	2,304
112,50	3,200	123,50	2,914	134,50	2,677	145,50	2,474	156,50	2,300
112,75	3,192	123,75	2,909	134,75	2,672	145,75	2,470	156,75	2,296
113	3,186	**124**	2,903	**135**	2,667	**146**	2,466	**157**	2,293
113,25	3,178	124,25	2,897	135,25	2,662	146,25	2,462	157,25	2,289
113,50	3,171	124,50	2,891	135,50	2,657	146,50	2,457	157,50	2,286
113,75	3,164	124,75	2,885	135,75	2,652	146,75	2,453	157,75	2,282
114	3,158	**125**	2,88	**136**	2,647	**147**	2,449	**158**	2,278
114,25	3,150	125,25	2,874	136,25	2,642	147,25	2,445	158,25	2,275
114,50	3,144	125,50	2,868	136,50	2,637	147,50	2,441	158,50	2,272
114,75	3,137	125,75	2,862	136,75	2,633	147,75	2,437	158,75	2,268
115	3,130	**126**	2,857	**137**	2,628	**148**	2,432	**159**	2,264
115,25	3,123	126,25	2,851	137,25	2,623	148,25	2,428	159,25	2,261
115,50	3,116	126,50	2,845	137,50	2,618	148,50	2,424	159,50	2,257
115,75	3,110	126,75	2,840	137,75	2,613	148,75	2,420	159,75	2,254
116	3,103	**127**	2,835	**138**	2,609	**149**	2,416	**160**	2,25
116,25	3,096	127,25	2,829	138,25	2,604	149,25	2,412	160,25	2,246
116,50	3,090	127,50	2,823	138,50	2,599	149,50	2,408	160,50	2,243
116,75	3,083	127,75	2,818	138,75	2,595	149,75	2,404	160,75	2,240
117	3,076	**128**	2,813	**139**	2,590	**150**	2,4	**161**	2,236
117,25	3,070	128,25	2,807	139,25	2,585	150,25	2,396	161,25	2,232
117,50	3,063	128,50	2,801	139,50	2,581	150,50	2,392	161,50	2,229
117,75	3,057	128,75	2,796	139,75	2,576	150,75	2,388	161,75	2,226
118	3,051	**129**	2,791	**140**	2,571	**151**	2,384	**162**	2,222
118,25	3,044	129,25	2,785	140,25	2,567	151,25	2,380	162,25	2,219
118,50	3,037	129,50	2,779	140,50	2,562	151,50	2,377	162,50	2,215
118,75	3,031	129,75	2,774	140,75	2,558	151,75	2,372	162,75	2,212
119	3,025	**130**	2,769	**141**	2,553	**152**	2,368	**163**	2,209
119,25	3,018	130,25	2,764	141,25	2,549	152,25	2,365	163,25	2,205
119,50	3,012	130,50	2,759	141,50	2,544	152,50	2,361	163,50	2,202
119,75	3,006	130,75	2,753	141,75	2,540	152,75	2,357	163,75	2,198
120	3	**131**	2,748	**142**	2,535	**153**	2,353	**164**	2,195
120,25	2,993	131,25	2,743	142,25	2,531	153,25	2,349	164,25	2,192
120,50	2,987	131,50	2,738	142,50	2,526	153,50	2,345	164,50	2,188
120,75	2,981	131,75	2,732	142,75	2,522	153,75	2,341	164,75	2,185

Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico
165	2,182	**176**	2,045	**187**	1,925	**198**	1,818	**209**	1,722
165,25	2,179	176,25	2,043	187,25	1,923	198,25	1,816	209,25	1,720
165,50	2,175	176,50	2,039	187,50	1,920	198,50	1,813	209,50	1,718
165,75	2,172	176,75	2,037	187,75	1,917	198,75	1,811	209,75	1,716
166	2,169	**177**	2,034	**188**	1,915	**199**	1,809	**210**	1,714
166,25	2,165	177,25	2,031	188,25	1,912	199,25	1,807	210,25	1,712
166,50	2,162	177,50	2,028	188,50	1,910	199,50	1,805	210,50	1,710
166,75	2,159	177,75	2,025	188,75	1,907	199,75	1,802	210,75	1,708
167	2,156	**178**	2,022	**189**	1,905	**200**	1,8	**211**	1,706
167,25	2,152	178,25	2,020	189,25	1,902	200,25	1,798	211,25	1,704
167.50	2,149	178,50	2,017	189,50	1,900	200,50	1,796	211,50	1,702
167,75	2,146	178,75	2,014	189,75	1,897	200,75	1,793	211,75	1,700
168	2,143	**179**	2,011	**190**	1,895	**201**	1,791	**212**	1,698
168,25	2,140	179,25	2,008	190,25	1,892	201,25	1,789	212,25	1,696
168,50	2,136	179,50	2,006	190,50	1,890	201,50	1,787	212,50	1,694
168,75	2,133	179,75	2,003	190,75	1,887	201,75	1,784	212,75	1,692
169	2,130	**180**	2	**191**	1,885	**202**	1,782	**213**	1,690
169,25	2,127	180,25	1,997	191,25	1,882	202,25	1,780	213,25	1,688
169.50	2,124	180,50	1,994	191,50	1,880	202,50	1,778	213,50	1,686
169,75	2,121	180,75	1,992	191,75	1,877	202,75	1,776	213,75	1,684
170	2,118	**181**	1,989	**192**	1,875	**203**	1,773	**214**	1,682
170,25	2,115	181,25	1,986	192,25	1,873	203,25	1,771	214,25	1,680
170,50	2,111	181,50	1,983	192,50	1,870	203,50	1,769	214,50	1,678
170,75	2,108	181,75	1,980	192,75	1,867	203,75	1,767	214,75	1,676
171	2,105	**182**	1,978	**193**	1,865	**204**	1,765	**215**	1,674
171,25	2,102	182,25	1,975	193,25	1,863	204,25	1,763	215,25	1,672
171,50	2,099	182,50	1,973	193,50	1,860	204,50	1,760	215,50	1,671
171,75	2,096	182,75	1,970	193,75	1,858	204,75	1,758	215,75	1,669
172	2,093	**183**	1,967	**194**	1,856	**205**	1,756	**216**	1,667
172,25	2,090	183,25	1,965	194,25	1,853	205,25	1,754	216,25	1,665
172,50	2,087	183,50	1,962	194,50	1,851	205,50	1,752	216,50	1.663
172,75	2,084	183,75	1,959	194,75	1,849	205,75	1,749	216,75	1,661
173	2,081	**184**	1,957	**195**	1,846	**206**	1,747	**217**	1,659
173.25	2,078	184,25	1,954	195,25	1,844	206,25	1,745	217,25	1,657
173,50	2,075	184,50	1,951	195,50	1,841	206,50	1,743	217,50	1,655
173,75	2,072	184,75	1,949	195,75	1,839	206,75	1,741	217,75	1,653
174	2,069	**185**	1,946	**196**	1,837	**207**	1,739	**218**	1,651
174,25	2,066	185,25	1,943	196,25	1,834	207,25	1,737	218,25	1,649
174,50	2,062	185,50	1,941	196.50	1,832	207,50	1,735	218,50	1,648
174,75	2,060	185,75	1,938	196,75	1,830	207,75	1,733	218,75	1,646
175	2,057	**186**	1,935	**197**	1,827	**208**	1,731	**219**	1,644
175,25	2,054	186,25	1,933	197,25	1,825	208,25	1,729	219,25	1,642
175,50	2,051	186,50	1,930	197,50	1,823	208,50	1,727	219,50	1,640
175,75	2,048	186,75	1,928	197,75	1,820	208,75	1,725	219,75	1,638

Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico
220	1,636	**231**	1,558	**242**	1,488	**253**	1,423	**264**	1,363
220,25	1,635	231,25	1,557	242,25	1,486	253,25	1,422	264,25	1,362
220,50	1,633	231,50	1,555	242,50	1,485	253,50	1,420	264,50	1,361
220,75	1,631	231,75	1,553	242,75	1,483	253,75	1,419	264,75	1,360
221	1,629	**232**	1,552	**243**	1,481	**254**	1,417	**265**	1,358
221,25	1,627	232,25	1,550	243,25	1,480	254,25	1,416	265,25	1,357
221,50	1,625	232,50	1,548	243,50	1,478	254,50	1,415	265,50	1,356
221,75	1,623	232,75	1,547	243,75	1,477	254,75	1,413	265,75	1,354
222	1,621	**233**	1,545	**244**	1,475	**255**	1,412	**266**	1,353
222,25	1,620	233,25	1,543	244,25	1,474	255,25	1,410	266,25	1,352
222,50	1,618	233,50	1,542	244,50	1,472	255,50	1,409	266,50	1,351
222,75	1,616	233,75	1,540	244,75	1,471	255,75	1,408	266,75	1,350
223	1,614	**234**	1,538	**245**	1,469	**256**	1,406	**267**	1,348
223,25	1,613	234,25	1,537	245,25	1,468	256,25	1,405	267,25	1,347
223,50	1,611	234,50	1,535	245,50	1,466	256,50	1,404	267,50	1,346
223,75	1,609	234,75	1,534	245,75	1,465	256,75	1,402	267,75	1,345
224	1,607	**235**	1,532	**246**	1,463	**257**	1,401	**268**	1,343
224,25	1,605	235,25	1,530	246,25	1,462	257,25	1,399	268,25	1,342
224,50	1,604	235,50	1,529	246,50	1,460	257,50	1,398	268,50	1,341
224,75	1,602	235,75	1,527	246,75	1,459	257,75	1,397	268,75	1,340
225	1,6	**236**	1,525	**247**	1,457	**258**	1,395	**269**	1,338
225,25	1,598	236,25	1,524	247,25	1,456	258,25	1,394	269,25	1,337
225,50	1,596	236,50	1,522	247,50	1,455	258,50	1,393	269,50	1,336
225,75	1,595	236,75	1,520	247,75	1,453	258,75	1,391	269,75	1,335
226	1,594	**237**	1,519	**248**	1,452	**259**	1,390	**270**	1,333
226,25	1,591	237,25	1,517	248,25	1,450	259,25	1,388	270,25	1,332
226,50	1,589	237,50	1,516	248,50	1,449	259,50	1,387	270,50	1,331
226,75	1,588	237,75	1,514	248,75	1,447	259,75	1,386	270,75	1,330
227	1,586	**238**	1,513	**249**	1,446	**260**	1,385	**271**	1,328
227,25	1,584	238,25	1,511	249,25	1,444	260,25	1,383	271,25	1,327
227,50	1,582	238,50	1,509	249,50	1,443	260,50	1,382	271,50	1,326
227,75	1,581	238,75	1,508	249,75	1,441	260,75	1,381	271,75	1,325
228	1,579	**239**	1,506	**250**	1,440	**261**	1,379	**272**	1,324
228,25	1,577	239,25	1,505	250,25	1,439	261,25	1,378	272,25	1,322
228,50	1,575	239,50	1,503	250,50	1,437	261,50	1,377	272,50	1,321
228,75	1,574	239,75	1,502	250,75	1,436	261,75	1,375	272,75	1,320
229	1,572	**240**	1,5	**251**	1,434	**262**	1,374	**273**	1,319
229,25	1,570	240,25	1,498	251,25	1,433	262,25	1,373	273,25	1,318
229,50	1,569	240,50	1,497	251,50	1,431	262,50	1,371	273,50	1,317
229,75	1,567	240,75	1,495	251,75	1,430	262,75	1,370	273,75	1,315
230	1,565	**241**	1,494	**252**	1,429	**263**	1,369	**274**	1,314
230,25	1,564	241,25	1,492	252,25	1,427	263,25	1,368	274,25	1,313
230,50	1,562	241,50	1,491	252,50	1,426	263,50	1,366	274,50	1,311
230,75	1,560	241,75	1,489	252,75	1,424	263,75	1,365	274,75	1,310

Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico
275	1,309	**286**	1,259	**297**	1,212	**308**	1,1688	**319**	1,1285
275,25	1,308	286,25	1,258	297,25	1,211	308,25	1,1679	319,25	1,1276
275,50	1,307	286,50	1,257	297,50	1,210	308,50	1,1669	319,50	1,1268
275,75	1,306	286,75	1,255	297,75	1,209	308,75	1,1659	319,75	1,1259
276	1,304	**287**	1,254	**298**	1,208	**309**	1,1650	**320**	1,1250
276,25	1,303	287,25	1,253	298,25	1,207	309,25	1,1641	320,25	1,1241
276,50	1,302	287,50	1,252	298,50	1,206	309,50	1,1632	320,50	1,1232
276,75	1,301	287,75	1,251	298,75	1,205	309,75	1,1622	320,75	1,1224
277	1,300	**288**	1,25	**299**	1,204	**310**	1,1613	**321**	1,1215
277,25	1,298	288,25	1,249	299,25	1,203	310,25	1,1604	321,25	1,1206
277,50	1,297	288,50	1,248	299,50	1,202	310,50	1,1594	321,50	1,1198
277,75	1,296	288,75	1,247	299,75	1,201	310,75	1,1584	321,75	1,1189
278	1,295	**289**	1,246	**300**	1,2	**311**	1,1575	**322**	1,1178
278,25	1,293	289,25	1,245	300,25	1,199	311,25	1,1566	322,25	1,1171
278,50	1,292	289,50	1,244	300,50	1,198	311,50	1,1557	322,50	1,1162
278,75	1,291	289,75	1,242	300,75	1,197	311,75	1,1548	322,75	1,1154
279	1,290	**290**	1,241	**301**	1,196	**312**	1,1538	**323**	1,1142
279,25	1,289	290,25	1,240	301,25	1,195	312,25	1,1529	323,25	1,1137
279,50	1,288	290,50	1,239	301,50	1,194	312,50	1,1520	323,50	1,1128
279,75	1,287	290,75	1,238	301,75	1,193	312,75	1,1510	323,75	1,1119
280	1,286	**291**	1,237	**302**	1,192	**313**	1,1504	**324**	1,1111
280,25	1,285	291,25	1,236	302,25	1,191	313,25	1,1492	324,25	1,1103
280,50	1,283	291,50	1,235	302,50	1,190	313,50	1,1483	324,50	1,1094
280,75	1,282	291,75	1,234	302,75	1,189	313,75	1,1474	324,75	1,1085
281	1,281	**292**	1,233	**303**	1,188	**314**	1,1465	**325**	1,1077
281,25	1,280	292,25	1,232	303,25	1,187	314,25	1,1455	325,25	1,1068
281,50	1,279	292,50	1,231	303,50	1,186	314,50	1,1447	325,50	1,1059
281,75	1,278	292,75	1,230	303,75	1,185	314,75	1,1438	325,75	1,1051
282	1,277	**293**	1,229	**304**	1,184	**315**	1,1429	**326**	1,1043
282,25	1,375	293,25	1,228	304,25	1,183	315,25	1,1419	326,25	1,1034
282,50	1,274	293,50	1,227	304,50	1,182	315,50	1,1410	326,50	1,1023
282,75	1,273	293,75	1,226	304,75	1,181	315,75	1,1401	326,75	1,1018
283	1,272	**294**	1,224	**305**	1,180	**316**	1,1392	**327**	1,1009
283,25	1,271	294,25	1,223	305,25	1,179	316,25	1,1383	327,25	1,1000
283,50	1,270	294,50	1,222	305,50	1,178	316,50	1,1374	327,50	1,0992
283,75	1,269	294,75	1,221	305,75	1,177	316,75	1,1365	327,75	1,0984
284	1,268	**295**	1,220	**306**	1,176	**317**	1,1357	**328**	1,0981
284,25	1,266	295,25	1,219	306,25	1,1755	317,25	1,1348	328,25	1,0967
284,50	1,265	295,50	1,218	306,50	1,1745	317,50	1,1339	328,50	1,0959
284,75	1,264	295,75	1,217	306,75	1,1735	317,75	1,1329	328,75	1,0951
285	1,263	**296**	1,216	**307**	1,1725	**318**	1,1320	**329**	1,0942
285,25	1,262	296,25	1,215	307,25	1,1717	318,25	1,1312	329,25	1,0934
285,50	1,261	296,50	1,214	307,50	1,1707	318,50	1,1303	329,50	1,0925
285,75	1,260	296,75	1,213	307,75	1,1697	318,75	1,1294	329,75	1,0917

Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico	Lunghezza del corpo	Coefficiente somatico
330	1,0909	**336**	1,0714	**342**	1,0526	**348**	1,0345	**354**	1,0169
330,25	1,0900	336,25	1,0706	342,25	1,0518	348,25	1,0337	354,25	1,0163
330,50	1,0892	336,50	1,0698	342,50	1,0511	348,50	1,0329	354,50	1,0152
330,75	1,0884	336,75	1,0690	342,75	1,0503	348,75	1,0323	354,75	1,0148
331	1,0876	**337**	1,0682	**343**	1,0496	**349**	1,0315	**355**	1,0141
331,25	1,0868	337,25	1,0675	343,25	1,0485	349,25	1,0308	355,25	1,0134
331,50	1,0859	337,50	1,0666	343,50	1,0480	349,50	1,0300	355,50	1,0127
331,75	1,0851	337,75	1,0659	343,75	1,0472	349,75	1,0293	355,75	1,0119
332	1,0843	**338**	1,0651	**344**	1,0466	**350**	1,0286	**356**	1,0112
332,25	1,0835	338,25	1,0643	344,25	1,0458	350,25	1,0278	356,25	1,0105
332,50	1,0827	338,50	1,0635	344,50	1,0449	350,50	1,0271	356,50	1,0098
332,75	1,0818	338,75	1,0627	344,75	1,0443	350,75	1,0264	356,75	1,0091
333	1,0811	**339**	1,0619	**345**	1,0435	**351**	1,0256	**357**	1,0084
333,25	1,0802	339,25	1,0612	345,25	1,0427	351,25	1,0249	357,25	1,0077
333,50	1,0795	339,50	1,0604	345,50	1,0419	351,50	1,0242	357,50	1,0067
333,75	1,0786	339,75	1,0596	345,75	1,0412	351,75	1,0234	357,75	1,0063
334	1,0778	**340**	1,0585	**346**	1,0405	**352**	1,0227	**358**	1,0056
334,25	1,0770	340,25	1,0580	346,25	1,0397	352,25	1,0220	358,25	1,0049
334,50	1,0765	340,50	1,0573	346,50	1,0389	352,50	1,0213	358,50	1,0042
334,75	1,0754	340,75	1,0565	346,75	1,0382	352,75	1,0205	358,75	1,0035
335	1,0746	**341**	1,0557	**347**	1,0371	**353**	1,0198	**359**	1,0028
335,25	1,0738	341,25	1,0549	347,25	1,0367	353,25	1,0193	359,25	1,0021
335,50	1,0731	341,50	1,0542	347,50	1,0359	353,50	1,0184	359,50	1,0013
335,75	1,0722	341,75	1,0534	347,75	1,0352	353,75	1,0177	359,75	1,0007
								360	1

L'Accademico Segretario
ANDREA NACCARI.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 21 Gennaio 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: CLARETTA, Direttore della Classe, FERRERO, CIPOLLA, BRUSA, ALLIEVO.

Il Presidente annuncia che il Socio Segretario RENIER da indisposizione è impedito di venire all'adunanza. Invita perciò il Socio FERRERO a far le veci di Segretario.

Il Socio ff. di Segretario dà lettura dell'atto verbale dell'ultima adunanza, del 7 di gennaio. Esso è approvato.

È comunicata la lettera, con cui il Prof. Ernesto HAECKEL ringrazia l'Accademia per l'*undecimo premio Bressa,* che gli è stato conferito.

Si legge una lettera-circolare del Presidente del Comitato ordinatore per il VII Congresso Storico italiano, che si riunirà a Palermo nel prossimo aprile, con la quale si rinnova all'Accademia l'invito di farsi rappresentare ad esso.

L'Accademia delibera che si risponda ringraziando ed annunciando che per ora nessuno de' suoi Membri ha manifestato l'intezione di intervenire al Congresso.

È data lettura di una lettera del Direttore della Scuola italiana di archeologia, che manda alcuni esemplari della relazione a stampa del Prof. Federico HALBHERR, sopra i *Lavori eseguiti in Creta dalla missione archeologica italiana dal 9 giugno al 9 novembre 1899* (Roma, 1899).

È presentato il volume: *Les personnes morales et le problème de leur responsabilité pénale* (Paris, 1899), di cui l'autore, il dott. Achille MESTRE, fa dono all'Accademia.

Il Socio BRUSA presenta un opuscolo del dott. B. HES, *Poging tot Misdrijf volgens het Italiaansche Recht* (Groningen, 1898), e brevemente ragiona intorno ad esso. Le sue considerazioni sono inserite negli *Atti*.

Il Socio CIPOLLA legge una nota dei signori Giuseppe e Guido MANACORDA, *La Corte piemontese e le ricerche storiche di L. A. Muratori*.

Questa nota sarà pubblicata negli *Atti*.

LETTURE

Il tentativo di delitto nel diritto italiano, secondo B. Hes (1).

Nota del Socio EMILIO BRUSA.

Fra gli studi pubblicati da stranieri in occasione del nostro nuovo Codice penale, il presente sul tentativo del delitto merita, benchè non sia che una dissertazione di laurea, una menzione particolare, sì per la sicura e larga conoscenza che l'autore vi dimostra delle dottrine che al tema si rannodano, sì ancora per il criterio giuridico con cui lo tratta. Il signor Hes è allievo del valente professore Domela Nieuwenhuis di Groninga.

Dopo un rapido sguardo storico ai diritti antichi, l'autore passa in rassegna le legislazioni italiane cominciando dalla leopoldina del 1786 fino al Codice sardo del 1859, e indi i principali progetti venuti in luce prima del vigente Codice, sui quali fa brevi osservazioni.

L'analisi degli articoli 61 e 62 del Codice nostro occupa la seconda parte del libro, nella quale sono discussi distintamente il tentativo non compiuto, o delitto tentato, e il delitto mancato, nonchè la desistenza volontaria. In complesso il giurista olandese si dichiara e si dimostra seguace della dottrina italiana, che ha nome di oggettiva, secondo la quale il tentativo si trova nel fatto eseguito, e non, come secondo la dottrina soggettiva, nella sola intenzione dell'agente manifestata con atti esteriori.

Nonostante questa sua predisposizione favorevole al principio prevalso nella nostra legislazione, come nella scienza e nella pratica italiana, egli non sempre accoglie le opinioni più

(1) B. Hes, *Poging tot misdrijf volgens het italiaansche recht.* Groningen, Scholten en Zoon, 1898, pp. III, 167.

accette presso di noi, neppur quando siano fiancheggiate dall'autorità di criminalisti di gran nome. Ciò sopratutto si scorge rispetto a varie opinioni del Carrara, della cui dottrina egli è particolarmente accurato espositore. A questo riguardo si può solo lamentare, ch'egli non conoscesse l'ultima formula cui il grande maestro pisano è pervenuto, quando nella prolusione del novembre 1883-84, che fu il vero canto del cigno, trattò della *essenzialità del conato punibile* (Lucca, tip. Canovetti, 1884, pp. 22). Forse anche la critica dell'olandese, al pari di quella precedente del dotto tedesco Baumgarten (*Die Lehre vom Versuche der Verbrechen*, 1888) e di altri, avrebbe potuto riceverne maggior luce e valore, o altrimenti ritrarne argomento di modificazioni. Sembra perciò opportuno riassumere qui codesta importante formula.

Già il Carrara, sfiduciato del criterio prepostero, che per distinguere gli atti preparatorii da quelli di conato si suol riporre nella equivocità dei primi e nella univocità dei secondi, aveva pensato di sostituirvene un altro, a norma del quale gli atti di esecuzione debbano cadere nella cerchia del soggetto passivo, non potendo l'agente, fino a che l'opera sua non esca dall'ambito del proprio diritto sulla propria persona o sulle cose proprie, offendere mai il diritto altrui e rendersi colpevole nè di delitto consumato, nè di tentativo di delitto. Naturalmente egli riservava espressamente i casi eccezionali in cui il soggetto attivo, cioè l'agente stesso (soggetto attivo primario), e i mezzi con cui esso accresce la propria attività per commettere il delitto (soggetto attivo secondario), riunisse in sè anche il soggetto passivo rappresentante l'obiettività del bene giuridico, che volevasi offendere. Tale sarebbe il caso del soldato, che si mutila per esimersi dal servizio militare, o il caso del falsario che adopera metallo e conii suoi propri, per imitare la moneta legale, o che adopera la propria carta e penna per foggiare il documento. Da questa concezione così chiara e profonda fu breve il passo alla definitiva nuova dottrina carrariana, sintetizzata in quella prolusione.

Le azioni umane non sono incriminabili, così il criminalista toscano, che da quel momento dal quale esordisce la loro natura delittuosa per il concorso del disturbo recato a tutti i consociati mercè la previsione della loro possibile ripetizione. Siccome

però la incriminabilità del tentativo deriva dalla violazione effettiva, che dal medesimo consegue al diritto della sicurezza sociale, così ove tale violazione manchi, neppure la direzione della volontà e degli atti alla lesione di un diritto (ulteriore e più importante) varrà mai a supplire a quel difetto. Vi potrà essere allora un delitto perfetto a sè, ma non più un tentativo. Onde nel tentativo si debbono distinguere due momenti: lesione effettiva di un bene giuridico minore, nel primo momento; pericolo corso da un altro bene giuridico maggiore, nel secondo.

In altri termini e svolgendo il concetto, posto da banda il criterio della univocità degli atti, decisivo è solo il criterio del diritto minore effettivamente violato e di quello maggiore solamente aggredito e non violato ancora. Sono atti preparatorii quelli che si aggirano nell'ambito del *puro* soggetto attivo; nei delitti di danno immediato universale sono atti di esecuzione quelli, che pur cadendo sul soggetto attivo, sono capaci di offendere e mirano a offendere, come accade della cospirazione politica, ecc. La riunione di parecchie persone per uccidere un uomo (delitto di danno immediato particolare) non è altro che atto preparatorio; è invece atto di esecuzione, anzi delitto consumato, quando l'obietto giuridico contro cui quella riunione operava, sia un delitto di danno immediato universale. Oltre il diritto finale posto a pericolo, vi è dunque prima la lesione effettiva di un diritto minore intermedio, quante volte il delitto non si perfezioni con un solo atto.

È sembrato a un criminalista italiano, il compianto Benevolo, che la nuova formula carrariana, non solamente sconvolga d'un tratto tutta la teoria del tentativo, e sia forse destinata a dar vita a nuovi principii e a nuove deduzioni involgenti tutto quanto il diritto criminale; ma che intanto sia manchevole per la nozione stessa del tentativo. La risposta ch'egli ottenne dal sommo criminalista (in appendice alla monografia *Il tentativo nella dottrina, nella legge e nella giurisprudenza*, Torino 1887) non è bastata a dissipare i suoi dubbi. Si avrà sempre (persistette perciò egli a chiedere) un diritto già violato in qualunque ipotesi di tentativo? E questo diritto già violato si potrà sempre ben definire? Sarà esso sempre uno di quelli cui corrisponde un'azione data dalla legge per farli valere, ovvero potrà anche essere uno di quei diritti vaghi e indeterminati, che non trovano

diretta sanzione nella legge, quali il diritto di essere rispettato, il diritto di non essere disturbato, e va dicendo? E in questa ultima ipotesi non si cade per avventura nell'incerto e nell'indefinito, involgendo con parole vaghe un concetto che non trova più riscontro nella realtà delle cose? E ancora, in certe ipotesi, il diritto già violato col tentativo non sarà, salvo la differenza di formula, lo stesso danno mediato che deriva da ogni reato, vuoi consumato, vuoi tentato?

Sono questi i dubbi del Benevolo, ai quali non è difficile porgere soluzioni sodisfacenti. Senza discutere se vi sia ragione di preoccuparsi di lontane e vaste conseguenze, che dalla nuova dottrina fossero per venire all'intera nozione del diritto punitivo, perocchè nulla di sostanziale sarebbe innovato con affermare che già il tentativo dev'essere un delitto, certa cosa, a ogni modo, si è soltanto questa nella dottrina del Carrara, che nel tentativo di delitto che si consuma con più atti, si deve cercare la violazione di un diritto, e il pericolo effettivo per un diritto più importante. E che codesta violazione intermedia si produca davvero in ogni tentativo, emerge chiaramente dal considerare l'ambiente giuridico nel quale ogni diritto deve sempre trovarsi, sia poi questo un diritto personale o reale. O la materialità del domicilio, della chiusura, della forza armata e similmente, oppure la fiducia personale necessaria, di legge o stipulata nei servizi e negli uffici privati e pubblici, la fiducia consuetudinaria dell'agricoltore che lascia strumenti rurali o bestiame o prodotti del campo esposti di giorno e di notte, oppure ancora la dignità, la stima, il rispetto dovuti alle persone, il loro diritto a non essere molestate, sono di per sè beni giuridici veri e propri, sebbene non per ciascuno di essi, o non nella stessa maniera o misura la legge accordi loro una protezione speciale. Talora la violazione di questi beni è valutata nel fatto delittuoso come una circostanza aggravante, tal'altra fornisce materia di un delitto intermedio meno grave di quello finale cui si congiunge indissolubilmente nell'unità fisio-psichica del tentativo, e tal'altra ancora non si reputa meritevole di una sanzione a posta, o basta che questa sia puramente civile o amministrativa, anzichè veramente penale. Se la dignità del bene personale, vita, integrità delle membra, pudore, onore, libertà di locomozione, ecc., non fosse già dal costume protetta

come un bene giuridico, più energica sarebbe in fatto la protezione che gli uomini assicurano alle loro cose, che poi non sono che gli accessori della persona. Entro quella cerchia nella quale vive il diritto, senza il consenso espresso o tacito del titolare del diritto medesimo non è lecito di penetrare con atti e animo diretti a offendere. Cerchia giuridica è dessa, dove la custodia ideale o reale della persona e delle cose sue dev'essere rispettata. Per la medesima non suole stabilirsi, è vero, una sanzione legale, all'infuori dei casi in cui, insieme con essa, si offenda il suo contenuto personale o reale. Ma ciò per la ragione, che essa forma un semplice accessorio di questo contenuto nei rapporti speciali in cui si faccia valere; semplice accessorio, sì, ma inseparabilmente unito a ciascun momento della vita giuridica. Nè per ciò si ha da temere che codesta irradiazione giuridica della persona e delle cose sue si confonda col bene giuridico indirettamente offeso dal reato sotto il nome di danno mediato. Il danno mediato altro non è che un aspetto del danno criminale, e come questo nasce criminale senz'altro in virtù della intenzione criminosa tradottasi nell'evento lesivo, così non si scinde mai da ciò che ne forma l'altro aspetto, che è il danno immediato; onde questa distinzione vale solamente a determinare la qualità del diritto leso dal reato, e con essa la qualità anche del delitto.

Quanto di precisione, di chiarezza e di profondità attinga ora la teoria obiettiva dallo svolgimento che per tal modo il Carrara ha saputo darle, non è chi non vegga. Si potrà controvertere ancora, e nessuna dottrina più che quella del tentativo è suscettibile di dispute continue. Ma la distinzione carrariana fra atti preparatorii e atti di conato, qual'è assisa oggi sulla distinzione sostanziale fra soggetto attivo e soggetto passivo, attende ancora di essere confutata, perchè sinora non lo fu, e non avrebbe più ragione nè Hes nè altri di trincerarsi dietro la sola critica, per quanto acuta, di Baumgarten. Gli atti dell'agente diretti al fine criminoso, sono certamente fra di loro concatenati in un tutto; ma il difetto di offensività o pericolosità, come non sparisce per semplice virtù della direzione univoca, così neppure lo si colma con sufficiente chiarezza e precisione, quando si fa appello agli elementi costitutivi del delitto. E chi potrebbe dubitare che qualsiasi teoria obiettiva del conato debba sempre riporre gli atti preparatorii fuori degli elementi

costitutivi, e quelli di esecuzione dentro questi elementi? Ma appunto son questi elementi che bisogna determinare *in relazione* al tentativo, perchè *in relazione* al delitto perfetto li ha espressamente o implicitamente determinati già la legge stessa. Elemento costitutivo del furto o dell'omicidio è egli l'introdursi nel domicilio altrui? Solo nel caso che il delitto sia aggravato da questa speciale circostanza, si potrà, senza bisogno di un ulteriore criterio, rispondere in modo affermativo. Un criterio ulteriore si richiede invece per sapere se la introduzione nel domicilio altrui a fine di uccidere e con l'arma a ciò destinata, abbia da ritenersi un semplice atto preparatorio anzichè di conato. La legge non ha compreso tale circostanza nè come aggravante nè come costitutiva del delitto; ma non per questo si dovrà assolutamente negare a quell'atto il carattere di vero atto di esecuzione per quanto remota. Quale sarà il criterio per distinguere il caso in cui debba, e quello in cui non debba, ammettersi il tentativo di omicidio?

Hes dice punibile il tentativo, quando l'agente abbia operato un cominciamento con atti, i quali, o da sè già formano gli elementi costitutivi del delitto, o si dirigono in modo non equivoco a un delitto determinato e insieme possono dare effettuazione agli elementi costitutivi (p. 67). Questa nozione è poi spiegata nel senso, che la prima ipotesi riguardi i delitti che egli chiama formali, perchè consistono in atti il cui cominciamento è dalla legge stessa vietato, come sarebbe, secondo lui, lo scasso nel furto con effrazione, e lo scasso è tentativo perchè forma elemento essenziale del delitto. La seconda ipotesi riguarda invece i delitti materiali.

In ultima analisi, fatto omaggio al principio obiettivo consacrato nella formula chiara del cominciamento di esecuzione (art. 61 del nostro Codice), egli poi lo intende a modo suo. Già trova superfluo richiedere l'idoneità dei mezzi, che poteva essere sottintesa, ma che, volutasi indicare per il delitto tentato affine di troncare ogni dubbio dovevasi, a suo avviso, estendere anche al delitto mancato. E questo, perchè per lui, se si è fatto bene a regolare a parte la figura del delitto mancato, si è poi fatto male a spingere all'estremo il carattere obiettivo del fatto che lo deve costituire. Il fortuito di Hes comincia già a inframmettersi, quando un altro o forse più atti rimanevano ancora da

compiersi. Il fatto delittuoso è un complesso, come s'è visto, i cui diversi momenti sono inseparabili, perchè inseparabili li rende la volontà; quindi il carattere esecutivo di quello o quelli precedenti basta, purchè vi tengano dietro, per parte dell'agente, l'altro o gli altri successivi da lui diretti all'evento. Reo di omicidio mancato sarebbe dunque colui che stava per tirare contro il nemico un colpo di arma da fuoco, il cui braccio però viene allora fermato, sicchè intanto la vittima fuggendo si allontani per modo, che quando vien tirato effettivamente il colpo, non possa più essere offesa. Si capisce bene come con tale concetto del fortuito, collocato già nell'operare soggettivo, anzichè nel momento in cui dall'operare medesimo più non si abbia da attendere che l'evento oggettivo, lo scrittore olandese stimasse possibile, e quindi utile, la desistenza volontaria anche nel delitto mancato.

Sarebbe troppo lungo esaminare queste e molte altre proposizioni dell'autore; il quale si mostra certamente di meno difficile contentatura che il Carrara e gli altri seguaci della dottrina oggettiva. Le distinzioni, ove siano fondate su criteri saldi di ragione, segnano un progresso nella scienza e nella pratica, e gli sforzi fatti per mostrarle tali meritano favore più che avversione. Uno spirito particolarmente benevolo può traviare in certi casi, ma può anche talora preservare da critiche non del tutto fondate. Così sembra che Hes abbia esagerato combattendo la tesi del criminalista italiano, secondo la quale il tentativo non sarebbe *in generale* conciliabile col dolo d'impeto. Se un uomo, eccezionalmente pronto alla riflessione anco nel terribile, precipitoso istante dello scoppio di ira, intenso dolore o paura, può riflettere tuttavia a quel che fa e che vuole, oltre che di ciò la prova è spesso estremamente difficile, giusto è pur dire che, a parte questo, il Carrara stesso ammetteva la possibilità di provare che l'intenzione fosse diretta, come quando l'evento unico era fatalmente indicato (gettare il nemico dall'alto di un campanile, lanciare un tizzo ardente in materie infiammabili). Ancorchè improbabile, l'evento rimane possibile. Però bisogna andar cauti, perchè, sebbene sia vero che in molti casi la palla non colpisca a morte e però tuttavia la morte può derivarne, sarebbe eccessivo poi che dei due titoli obiettabili all'agente, il tentato omicidio o la lesione tentata, si prescegliesse senz'altro

il più grave, mentre egli operava nell'impeto di cieca passione che gl'impediva di riflettere.

Ma più importante di questi punti secondari sarebbe da notarsi, che non spicca abbastanza chiaro un fondamentale concetto dell'autore. Infatti non si vede se egli intenda che al titolo di tentativo remoto, che pur in molti casi esisterebbe, si debba, o no, supplire con titoli diversi di reati perfetti di per sè stanti; mentre poi invece è abbastanza chiaro che egli estende volentieri la nozione del fortuito in base alla direzione della volontà e dell'atto, ancorchè poi all'atto manchi la idoneità in rapporto col fatto in concreto. È un peccato, questo, nel quale cadono anche tutti coloro (compreso lo stesso Carrara) che distinguono l'inidoneità assoluta dalla relativa, e che per la relativa ammettono la possibilità del tentativo punibile, mentre l'autore olandese, invece, come esclude la distinzione tra conato prossimo e conato remoto, tra soggetto passivo dell'attentato e soggetto passivo della consumazione, così esclude anche questa. Nel qual ultimo punto si può anche essere d'accordo con lui, ma non per concludere, che basti l'esistenza del soggetto passivo, perchè, qualunque sia il luogo ch'esso occupi nel momento dell'atto causale, si debba incriminare questo come tentativo. L'ubiquità del soggetto passivo medesimo non fu sinora dimostrata, e però fra due o più atti egualmente causali in punti diversi del globo e tutti diretti contro quell'unico soggetto, o bisognerà scegliere, se ci fosse, quello che fu eseguito in condizioni veramente appropriate alla produzione dell'evento *in concreto*, oppure contentarsi, e sarà anche più seriamente difensivo del diritto della sicurezza, di imputare tutti quei fatti singoli come altrettanti delitti di minaccia o simili.

Il tentativo è un ente a così dire sospeso fra due punti, ma con tendenza più o meno chiara e certa verso quello di essi in cui per leggi note della esperienza si ha ragione di temere un urto con persona o cosa rappresentante un bene giuridico protetto da sanzione punitiva. Quando questa tendenza non si riesce ad accertarla per la via oggettiva della pericolosità propria del fatto criminoso, grande si fa la tentazione di battere quella soggettiva dell'animo dell'agente. Non ci ha soccombuto lo stesso Carrara e con l'attribuire valore (di che giustamente fu redarguito dal giurista olandese) alla scienza che l'agente

avesse di un ostacolo che si opponeva all'evento e che si illudeva di superare, e precisamente col sanare la inidoneità cosidetta relativa, quando questa sia sorta solo in un certo momento successivo dell'azione o solo in un certo rapporto finale di questa? Ma la scienza o ignoranza dell'ostacolo non può influire sull'ostacolo stesso, nè per farlo sparire, nè per vincerlo, e non si capisce perchè debba dirsi mancato il delitto se dell'ostacolo non si aveva notizia, e invece tentato se lo si conosceva. Del pari, la cassetta vuotata del danaro, e che nessuno sa neppure se più tardi riceverà ancora l'elemosina pubblica, finchè così rimane, non contiene assolutamente nulla che possa servire alle brame del ladro; il quale pertanto potrà essere forse rimproverato di altro reato, ma davvero non di quello di furto tentato con inidoneità soltanto relativa del soggetto passivo.

La dottrina del conato non rimarrà salda sulla sua base oggettiva, che è la sola che evita l'arbitrio giudiziario nella spesso oscura indagine dell'animo dell'agente, se non quando si sarà provveduto con cura a determinare i delitti (oltre le contravvenzioni, le quali per altro sono così svariate e innumerevoli, da dover bastare già come tali all'uopo) cui spetti l'ufficio di titoli sussidiari. La minaccia, l'apertura di lettere, la violenza privata o pubblica, la resistenza pubblica, la violazione di domicilio, l'istigazione a delinquere, la frode o truffa, il danneggiamento, e via via, già formano un elenco tutt'altro che breve di delitti che possono benissimo compiere codesto ufficio; ma forse ciò ancora non basta. Oltre l'agente provocatore meriterebbero particolare sanzione l'offerta di delitto in danno del nemico contro cui l'offerta è fatta, e probabilmente altri malefici congeneri. Se non che, anche in tale indirizzo bisogna sapersi moderare per non creare figure di delitti prive di caratteri positivi sufficientemente spiccati. L'*Unfug*, o eccesso, del Codice germanico, ideato come titolo generico per supplire al bisogno di repressione nei casi in cui la legge non si arroga di definire specificamente, nella pratica applicazione diventa facilmente occasione di arbitrio, e serve a colpire anche fatti che di punizione non sarebbero forse meritevoli. A Roma lo stellionato era un delitto sussidiario contro la proprietà, e l'*actio stellionatus* era parallela all'*actio doli*. ULP., l. 3, § 1, D. 47, 20, *quod enim in privatis iudiciis est de dolo actio, hoc in criminibus stellionatus*

persecutio, et ut generaliter dicam, deficiente titulo criminis, hoc crimen locum habet. Ma nei periodi di trasformazione dei reati civili in reati penali, non meno che nella determinazione dei limiti fra quelli e questi, la formazione di titoli sussidiari di delitto si spiega e si giustifica. Non egualmente però negli altri casi. Allora essa invece genera confusione nell'intelligenza dei principii cui la legge si è ispirata, e può aprire l'adito a pericolosi eccessi, fomentati sovente dalle vicende politiche dei partiti e delle classi, nelle cui mani sta il pubblico potere. Del *crimen maiestatis*, TACITO, *Ann.*, III, 38, potè dire *omnium actionum complementum*, e PLINIO, *Panegir.*, 42, lo ha definito *crimen illorum qui crimine carent.*

L'intenzione dell'agente, il carattere personale, il sintoma, che scaturiscono dal complesso delle circostanze costituenti la causa del delitto, nessuno deve volere che in omaggio all'astrazione di una dottrina scolastica vengano mai posti in non cale. Ciò peraltro non sarebbe una buona ragione per non accettare in tutta la sua pienezza e lealmente la dottrina oggettiva nel delitto e, conseguentemente, anche nel conato delittuoso. Chi fosse di altra opinione, dovrebbe, non già esagerare ora la nozione del fortuito, ora quella di idoneità; ma piuttosto risolversi e gettarsi deliberatamente e irrevocabilmente alla dottrina opposta. Se a tanto non si sente preparato, vegga egli se l'esempio del legislatore norvegese, che mai non diede preferenza alla dottrina oggettiva, meglio convenga alle sue tendenze, o se per avventura gli giovi imitare l'esempio dell'ultimo progetto federale per la Svizzera (1896). Nel progetto del 1896 per il Codice penale della Norvegia si afferma esistente il tentativo punibile già quando " senza consumare il delitto, siasi intrapreso una azione con la quale l'agente intendeva di cominciare l'esecuzione del delitto " (§ 49). Nel progetto svizzero basta che l'agente " abbia tentato di commettere un delitto con mezzi o contro un oggetto di natura tali, che sia impossibile in simili circostanze eseguire il delitto " (art. 17); nel qual caso però il giudice mitiga liberamente la pena, e a ogni modo si è espressamente esclusa la punibilità degli atti preparatorii, senza tuttavia dare di questi un criterio per separarli da quelli di esecuzione, come parimenti non si dà per definire gli atti di conato.

Non si guadagna mai nulla a cincischiare, se così è lecito

esprimersi, una verità fondamentale, il cui trionfo è dovuto al grande progresso compiuto con la separazione della religione e della morale dal diritto, col separare il diritto disciplinare e amministrativo dal diritto propriamente penale. Se si potesse elevare il *giudice* all'altissima missione di *educatore*, la dottrina obiettiva dovrebbe cedere il posto a gran parte di quella subiettiva. Nei nostri costumi, troppo lontani dai patriarcali per poter semplificare così il congegno dei sindacati sulle pubbliche funzioni rendendo estremamente elastica l'azione di coloro che le esercitano per il pubblico bene, a tanto non si può, non si deve ora pensare. Il carattere pericoloso del delinquente, in quanto sia rivelato dal suo fatto offensivo e pericoloso, è già o dovrebbe già essere valutato abbastanza nella pena e nei modi di farla scontare. In quanto poi, indipendentemente dal fatto, emerga dalla sola diagnosi fisio-psichica della persona come tale, di altri provvedimenti, più acconci della pena, dispongono lo Stato e la Società per essere a lui opportunamente applicati al fine della prevenzione e dell'educazione. Ma si badi bene a questo, che quante volte una volontà siasi manifestata pericolosa con atti capaci di turbare la sicurezza sociale, sebbene questi atti oggettivamente non siano di conato, un titolo di reato perfetto vi sarà, o non dovrebbe mancare, per essere adeguatamente applicato al caso.

La Corte piemontese e le ricerche storiche di L. A. Muratori in Piemonte.

Nota di GIUSEPPE e GUIDO MANACORDA.

Alcuni studiosi si occuparono già delle ricerche del Muratori in Piemonte (1), tuttavia da fonti inesplorate od inedite noi possiamo ancora attingere altre notizie, le quali giovano a far sempre più apprezzare i meriti del grande storico, che tante lotte combattè e tante fatiche sostenne per la scienza. È noto che nei *R. I. S.* sono comprese le seguenti fonti storiche piemontesi:

I. *Chronicon novaliciense* (II, II, 697);

II. *Chronicon astense* di Ogerio Alfieri e Guglielmo Ventura con aggiunte di Secondino Ventura (XI, 139);

III. *De Varietate fortunae,* poema di Antonio Astesano (XIV, 1009);

IV. *Chronicon* di Ripalta (XVII, 1321);

V. *Cronaca del Monferrato* di Benvenuto di S. Giorgio (XXIII, 311) (2).

A queste fonti debbono aggiungersi l'*Historia Dulcini haere-*

(1) Cfr. Silingardi, *L. A. Muratori ed i re sabaudi Vittorio Amedeo II e Carlo Emanuele III.* Modena 1872. — V. Santi, *Il Muratori e gli Archivii di Torino*, in “ Rivista Europea ”, t. XX, 1872. — Id., *Scipione Maffei ed i R. I. S.*, in “ Rivista Europea ”, t. XXVI, 1881. — L. Vischi, *La società palatina di Milano.* Milano, Rebeschini, 1880. — Cfr. pure Soli-Muratori, *Vita del proposto L. A. Muratori.* Venezia, Pasquali, 1756.

(2) Il *Chronicon novaliciense* pervenne al Muratori in mss. scorretti e frammentarii; una parte anzi giuntagli in ritardo fu poi inserita nelle *Antiquitates italicae medii aevi.* Più corrette sono le edizioni posteriori, cioè quella di C. Combetti in *M. H. P.*, t. III, *Scriptores* e più ancora quella del Bettmann in *M. G. H.*, t. VII, *Scriptores.* — Il *Chronicon astense* fu ristampato nei *M. H. P. (ibid.).* — Anche l'edizione della cronaca di Benvenuto di S. Giorgio che il Muratori trasse da un raro esemplare a stampa parve scorretta al Vernazza che ne fece una ristampa (Torino, Derossi, 1790).

siarchae novariensis (t. IX) ed il *Bellum canepicianum Petri Azarii* (t. XV), che essendo pervenuti al Muratori da biblioteche milanesi non entrano a far parte dello studio nostro.

Quando nel 1720 il Muratori pose mano a quella raccolta grandiosa di fonti storiche italiane, alla quale forse fino dal 1708 aveva rivolto il pensiero (1), uno dei primi problemi che egli dovette risolvere fu il luogo della stampa. Si parlò prima di Milano e poi di Torino; l'Argelati, che di passaggio in Piemonte aveva tastato il terreno, scriveva in quel tempo al Muratori che l'opera poteva essere pubblicata benissimo nella capitale subalpina (2); colà infatti si compievano allora delle riforme radicali per le quali si poteva sperare una censura meno rigida che altrove. Ma le trattative coi torinesi pare che procedessero con lentezza, mentre già a Milano l'opera ardita che il Muratori aveva intrapresa incontrava il favore dei dotti. La possibilità che l'opera potesse stamparsi all'estero (si erano infatti avviate trattative anche a Ginevra) (3) mosse i nobili milanesi, dice il Soli-Muratori, ad assumersi il carico della stampa. Troppo tardi giunsero per mezzo dell'Argelati le proposte dei piemontesi; il Muratori, uscito allora da una malattia, lavorava già attivamente attorno ai primi tomi della raccolta d'intesa colla società palatina di Milano (4). L'Argelati non tornò più a Torino, ed ogni idea di stampare l'opera in Piemonte fu posta da parte.

La prima lettera scritta dal Muratori per chiedere materiale storico piemontese è, per quanto ci consta, quella del 18 gennaio 1721 diretta al marchese Dal Borgo, allora ministro di Vittorio Amedeo II. Questa lettera non ci è pervenuta, ma possediamo la risposta in data 1° febbraio, nella quale il Dal Borgo dopo aver dato largo plauso all' impresa del Muratori " ugualmente nobile ed utile „ assicurava che S. M. " desiderosa di poter contribuire... al lustro ed alla perfezione „ di sì

(1) In quell'anno appunto nelle sue *Riflessioni sopra il buon gusto intorno alle lettere, scienze ed arti*, Napoli 1715, egli scriveva: " sarebbe lodevolissima impresa il raccogliere e donare al pubblico... le inedite storie „.

(2) Vischi, pag. 16.

(3) Soli-Muratori, pag. 79.

(4) Vischi, pag. 21.

grande opera, aveva dato " ordini circolari a tutte le abbazie dei suoi stati „ e prometteva di comunicare via via al Muratori tutto ciò che potesse giovargli (1). Chi non si sarebbe commosso a promesse così generose? Eppure quante lotte e quante ripulse doveva ancora subire il grande storico! — Le lettere di Carlo Richa offrono qui un grande sussidio alla nostra narrazione (2). Già da cinque mesi taceva il Muratori, confidando sulle promesse del ministro, quando ricevette da Torino una lettera del Richa in data 22 giugno 1721, la quale lo avvertiva come certi scrupolosi avevano messo in capo a S. M. non essere bene che si dessero alle stampe manoscritti antichi fuori dello stato. " Io — aggiungeva il Richa — sto dileguando questi sospetti, nè ciò le faccia pena, perchè sarà infallibilmente servita più che Ella desidera „ (3). Nonostante le assicurazioni finali, la notizia non dovette certo tornar gradita al Muratori, il quale scrisse subito al Richa manifestando i suoi dubbi e timori. Ma questi ancora ai primi di settembre 1722 lo assicurava che sarebbe stato possibile col tempo di ottenere qualsiasi manoscritto. " Ho fatto e farò nuovi impegni; ho parlato e parlerò di bel nuovo „, così chiudeva la lettera il Richa, " ogni cosa si otterrà col saper fare ed ella arricchirà la sua grande opera più di quello che si crederà riguardo le cose del Piemonte „ (4). Tre mesi più tardi però, il 5 dicembre, in una nuova lettera al Muratori, il Richa si mostrava assai scosso nelle sue speranze. " Ho presentato a S. M. — scriveva egli — un memoriale per servirla in quanto Ella desidera, e spero servirla come ho pensato. L'assenza di S. M. per più mesi di villeggiatura ha impedito a me ed a mio padre l'occasione di parlargli. Io per questo e per mezzo di un mio amico gli ho fatto presentare il memoriale acciò si sovvenga la M. S. di quanto mi fa sperare; che se posso metter mano in quei

---

(1) Vischi, pag. 107-108.

(2) Carlo Richa nacque a Torino nel 1690, fu professore di anatomia nella patria Università e strinse amicizia col Muratori quando prese a difendere l'opinione di lui circa la natura della peste. Per la biografia di lui cfr. Vallauri, *Storia dell'Università del Piemonte*, vol. III, Torino 1845. Per la corrispondenza col Muratori v. Vischi, *Scritti inediti di L. A. Muratori*. Bologna 1872 e Soli-Muratori, pag. 124.

(3) Silingardi, pag. 171.

(4) Id., pag. 172-173.

benedetti archivi del re, di quante belle cose ella potrà arricchire il di lei tesoro! „ (1). Come si vede la sicurezza con la quale prima affermava che il Muratori sarebbe stato infallibilmente servito andava di mano in mano dileguandosi. Più sconfortante è la lettera che inviava il Richa al Muratori il 13 marzo 1723: " Io ho sospeso ogni mio ulteriore impegno in servirla perchè... da un ministro (probabilmente il Dal Borgo) di qualche confidenza mi fu detto all'orecchio che meglio era non parlarne, anzi che mi consigliava a non mandare scritture fuori di stato. Io mi restai attonito come ella può immaginarsi. Tuttavia non sto colle mani alla cintola nè col cuore vuoto di ogni speranza „ (2). Questa lettera tolse davvero al Muratori ogni illusione e lo indusse a tentare l'ultima prova, rivolgendosi al re con una lettera la quale, pur essendo scritta in tono assai umile, non manca però di ardita franchezza. In quella lettera che egli scriveva il 25 marzo 1723, cominciava col far noto al re che per la grandiosa raccolta a cui aveva posto mano dalle varie città d'Italia gli era stata inviata " una prodigiosa quantità di cronache „, aggiungeva che presto tre volumi in-foglio sarebbero usciti alle stampe in Milano. Ma fin'ora — seguitava — nulla ho del Piemonte, ed avendo anche chieste due storie manoscritte dei monasteri di Fruttuaria e della Novalesa, delle quali anche una parte è già stampata, odo incontrarsi in ciò delle difficoltà impensate „. Si rivolgeva quindi al re " con riverente ardire, ma insieme con viva speranza „ di essere esaudito. " Niuna occulta intenzione, niun pensiero di servire agli interessi particolari di principe alcuno, ma solamente l'onore dell'Italia e il vantaggio delle lettere mi ha indotto a sì grandiosa impresa „. E non dimenticava neppure nella chiusa di solleticare la vanagloria del re: " Conoscerà facilmente V. M.... se fosse credito o discredito il non trovare in un'opera di tanto interesse per l'Italia neppure una riga spettante il Piemonte „. Gli eruditi stessi non avrebbero risparmiato rimproveri se egli nella sua raccolta non avesse fatto alcuna parte alla storia subalpina. Che se qualche erudito piemontese avesse pensato di valersi delle fonti manoscritte per comporre la genealogia di

(1) Silingardi, pag. 172-173.
(2) Id., pag. 173.

casa Savoia e per farne una edizione in Torino, riflettesse il re che assai maggior lustro avrebbero potuto recare tali fonti se fossero state edite in una raccolta che per il suo grandioso disegno era destinata a correre per le mani degli eruditi di tutta Europa (1). — La lettera non fu indirizzata al re personalmente, ma per mezzo del Richa che la fece presentare al sovrano da suo padre. Pare che Vittorio Amedeo II accogliesse assai benignamente la lettera del Muratori. " Ne vedrà — scriveva il 3 aprile seguente il Richa al celebre storico — come spero, nel prossimo ordinario un certissimo contrassegno " (2). Questa volta il Richa fu buon profeta; il re infatti di proprio pugno (cosa in quei tempi rarissima e segno di una stima veramente straordinaria) (3) il 17 aprile rispondeva all'illustre storico assicurandolo che egli sarebbe stato " bien aise d'y pouvoir contribuer par quelques Mémoires à l'égard des Monastères ", dei quali il Muratori aveva fatto cenno: prometteva inoltre di fare iniziare dovunque diligenti ricerche (4). Tante e così formali assicurazioni fecero allargare il cuore al Nostro, il quale, sicuro oramai delle sue ricerche in Piemonte, tutto si diede a raccogliere fonti storiche d'altre parti d'Italia ed a curare l'edizione dei primi tomi della raccolta. L'aspettativa fu lunga. Passarono sei mesi prima che giungesse notizia al Muratori delle ricerche fatte in Piemonte, e la notizia fu assai triste. " Due giorni fa — scriveva il Richa — il sig. marchese Dal Borgo, primo ministro di Stato di S. M., mi fe' l'onore di dirmi che desiderando la M. S. di corrispondere alle brame di V. S. Ill.ª le *(sic)* aveva dato ordine di farle sapere quanto sta nel biglietto qui accluso che originale a lei trasmetto:

---

(1) Soli-Muratori, pag. 470.

(2) Silingardi, pag. 174.

(3) Quanta stima avesse il Re pel Muratori si apprende da quella lettera del Richa in cui questi avvertiva il modenese che S. M. dopo aver letto un opuscolo di lui (quello probabilmente intorno alla controversia colla S. Sede per le paludi di Comacchio) aveva esclamato che " migliore e più potente batteria contro i preti non era mai uscita per l'addietro ". Questo scriveva il Richa al Muratori il 31 marzo 1721, ed il 16 aprile seguente in un'altra lettera parlando dello stesso opuscolo gli faceva notare che S. M. contro il suo costume " lo volle leggere e per leggerlo bene lo pose sul suo tavolino ". — Silingardi, pag. 171.

(4) Soli-Muratori, pag. 471.

Memoria per il sig. Muratori.

1. Che si sonó fatte già molte ricerche;

2. Che le diligenze finora sono state infruttuose;

3. Che avendosi però tutto il desiderio di concorrere ad un'opera tanto degna e ragguardevole, si continueranno le ricerche;

4. Che se egli ha alcuna cosa da suggerire che da qui possa essergli somministrata per la detta opera, si farà con piacere;

5. Che S. M. ha un concetto ben degno del suo sapere (1) „.

Nessuno può credere alla veracità di questa memoria quando pensi che negli archivi, non diciamo già di tutto il Piemonte, ma di Torino soltanto e della casa reale si trovava tutta quell'abbondanza di documenti, che furono poi editi dal Muratori nelle *Antiquitates italicae* e quelli che ancora si poterono pubblicare nei *M. H. P.* — Il colpo fu grave, ma non si perdette di coraggio il grande storico. Erano usciti allora alle stampe i primi tomi della raccolta, ed egli si affrettò ad inviarne una copia al re Vittorio Amedeo II. Allora soltanto compresero i ministri ed il re l'importanza dell'opera ed il lustro che avrebbero potuto trarne, ed allora appunto per via indiretta si fece capire al Muratori che il sovrano avrebbe gradito l'offerta di un volume. Il Richa infatti, evidentemente in seguito al colloquio del quale fa cenno nella lettera del 19 novembre 1723, scriveva al Muratori rinnovando da parte del re le attestazioni della più profonda stima e gli ricordava " il punto di dedicare alla M. S. un qualche Tomo di questa grand'opera „. " Il dubbio se in Milano si accetterebbe il titolo di re — soggiungeva il Richa — si è dileguato, trattando S. M. C. il nostro sovrano da lungo tempo. Quanto alla Sicilia, questa viene nominata neppure da noi stessi, e quei che sanno conservare un po' di politica più fine tralasciano l'uno e l'altro regno e solo prepongono il titolo di *invictissimo regi* „ (2). Certo il grande storico avrebbe fatto volentieri quell'omaggio al sovrano piemontese se questi si fosse piegato a concedergli le antiche carte tanto desiderate, ma,

(1) Silingardi, pag. 176-177.
(2) Vischi, pag. 109.

stando le cose come le abbiamo esposte, egli preferì (e forse sbagliò) tirare in lungo le cose e confidarsi intanto cogli amici. Scrisse adunque al marchese Trivulzio, presidente della società palatina, e questi l'8 dicembre gli rispose che essendo già promessa a vari principi la dedica dei primi cinque tomi dell'opera, in ogni caso al re di Piemonte non si sarebbe potuto dedicare che il sesto od il settimo; si poteva adunque vedere se nel frattempo la corte sabauda si risolveva a concedere le tanto desiderate cronache subalpine (1). Seguitava il Muratori ad essere incerto sul partito da prendersi, quando ricevette una lettera del Richa che dovette riempirlo di dolore e di indignazione. " I critici hanno supposto al re ed a S. E. — scriveva il professore torinese — che certe cronache, contenendo cose che non sono decorose nè utili, è meglio sopprimerle come si è fatto „ (2). E non bastava: a quella lettera scritta il 25 dicembre 1723 teneva dietro un'altra in data 9 gennaio 1724 nella quale il Richa così scriveva al Muratori: " A S. M. hanno altamente impresso che non si debba lasciar correre fuori di stato qual si sia antico manoscritto, e questa siffatta impressione nessuno la toglie per certissimo „ (3). — Ecco dunque chiuse tutte le vie e tolta ogni speranza: ma ancora non diminuì l'insistenza del Richa nel cercare e del Muratori nel chiedere. Visto che l'intento non poteva raggiungersi per via aperta e diretta, si pensò di ricorrere ai sotterfugi: con quanto pericolo ognuno lo pensi. Il 29 gennaio 1724 il Richa scriveva al Muratori come " lasciata la via regia la quale non era la migliore „ era giunto per via privata a mettere mano sopra tre manoscritti che gli avrebbe inviato per mezzo del P. Lazzerelli (4). E poco dopo infatti il Richa riusciva a spedire al P. Lazzerelli alcuni frammenti della cronaca della Novalesa, una cronaca d'Asti ed un poemetto storico. Il 16 marzo il Muratori, avendo saputo che quelle antiche

(1) Vischi, pag. 109.

(2) Silingardi, pag. 177. — La cronaca che la corte piemontese aveva creduto bene di sopprimere è quella di Saluzzo del Della Chiesa e la causa della soppressione va ricercata nel fatto di essere stata scritta detta cronaca " in quei tempi parziali degli antichi marchesi di Saluzzo nemici implacabili della real casa di Savoia „.

(3) Silingardi, ibid.

(4) Vischi, pag. 110.

carte erano pervenute al Lazzerelli, gli scriveva ringraziandolo e mostrandosi lieto che quelle fonti storiche, per quanto poco importanti, entrassero nella raccolta a rappresentare il Piemonte, " paese — diceva egli — di somma avarizia in questo genere, come ne ho io stesso fatto la prova con tante lettere, fino allo stesso re, che non hanno servito a nulla „ (1). Quello che avvenne dopo questa lettera niuno seppe mai; certo è che il Muratori non potè avere le carte spedite dal Richa, sia che il Lazzerelli le smarrisse, sia forse anche che, impaurito egli stesso, facesse loro prendere la via del ritorno. Le prefazioni preposte nei *R. I. S.* alla cronaca d'Asti e più ancora la corrispondenza posteriore provano che nulla allora pervenne al Muratori da parte del Lazzerelli. Andato a vuoto anche quel disegno, dopo essersi rivolto ancora all'Argelati, il quale nonostante le commendatizie di Carlo VI a nulla riuscì, il Muratori si rivolse a due illustri personaggi molto in favore presso la corte piemontese: Francesco D'Aguirre siciliano, ministro del re, e Scipione Maffei (2), caldo ammiratore e cooperatore della raccolta muratoriana. Il Maffei si pose con ardore ad aiutare il Nostro; il 7 agosto 1726 (3) gli scriveva infatti che il re era benissimo disposto verso di lui, e nuove e più esplicite assicurazioni gli inviò in seguito per tutto quell'anno, senza però mai poterle accompagnare con antiche carte. Non cessava però il Muratori di rivolgersi anche al D'Aguirre, come è provato dal carteggio che, edito fin dal secolo scorso (4), rimase inesplorato finora. Le prime lettere di lui al D'Aguirre risalgono al 1723, tut-

---

(1) Vischi, pag. 110.

(2) Il Muratori non si mostrò avaro col Maffei di ringraziamenti per gli aiuti continui ricevuti. " Bei vantaggi mi fa risentire il sig. Scipione Maffei „, scriveva il Muratori a Luca Antonio Gentili (v. *Lettere ed elogi di L. A. M. raccolti dall'ab. Andrea Lazzeri.* Venezia, 1783). — Nella prefazione alla cronaca: *De originibus gentis Scaligerae* (*R. I. S.*, IX) e nella prefazione agli *Annali genovesi di Giorgio Stella* (*R. I. S.*, t. XVIII) il Muratori dichiara d'esser stato aiutato assai dal Maffei.

(3) Santi, op. cit., p. 21.

(4) P. Antoine Crevenna, *Catalogue raisonné de sa bibliothèque.* Amsterdam 1776. — Un P. Antonio Crevenna fu della Società palatina; di qui si spiega come alcune lettere del Muratori potessero essere pubblicate nel sec. scorso ad Amsterdam da un negoziante omonimo e certo parente di quello rammentato.

tavia solo a cominciare dal 21 novembre 1726 esse si riferiscono alle ricerche muratoriane in Piemonte. In quel giorno infatti il Muratori scrivendo al D'Aguirre lo informava del buon risultato delle sue indagini storiche nel restante d'Italia e prometteva di dedicare un tomo della raccolta al re di Piemonte, ma chiudeva rammaricandosi di avere potuto ottenere nulla dalla corte dopo tante istanze. " È per me questo un motivo di dispiacere perchè merita bene sì gran casa e sì gran paese di fare la sua comparsa in un'opera che io ho intrapreso per l'onore di tutta Italia „ (1). Era un modo delicato di dire: la dedica di un tomo non mancherà se voi non mi negherete antiche cronache piemontesi. La risposta del D'Aguirre dovette essere cortese e piena di promesse, giacchè il Muratori il 18 dicembre 1726 gli scriveva manifestando la sua meraviglia perchè nulla fosse stato fino allora inviato dal Piemonte nonostante le promesse formali del re; addossava poi, o fingeva di addossare, la responsabilità dell'infelice esito al precedente intermediario, cioè al Richa e, dopo aver espresso la fiducia che egli riponeva in lui, lo pregava di recapitare al ministro Dal Borgo un biglietto incluso; designava infine come cronache assai importanti per la sua raccolta quella del Monastero di Altacomba, quella della Novalesa, della quale possedeva solo frammenti, ed una qualsiasi del Monferrato che fosse più antica di quella di Galeotto Del Carretto. Nella chiusa della lettera non ometteva di far osservare indirettamente che il papa, l'imperatore ed il re cristianissimo gli erano stati larghi d'aiuto (2). Il D'Aguirre si affrettò a presentare al Dal Borgo il biglietto incluso e ne ebbe promesse formali. Il re stesso, come si desume dalla lettera in data 20 febbraio 1727, colla quale il Muratori ringraziava il D'Aguirre, rinnovò le solite promesse di iniziare ricerche nelle chiese e nei conventi, tanto che l'illustre storico sentì rinascere in cuore le speranze e già espandendo i suoi desideri chiedeva non più cronache soltanto, ma documenti che illustrassero i costumi medioevali. Furono brevi illusioni: alcuni mesi dopo, cioè il 23 agosto di quell'anno Scipione Maffei (il quale in quel tempo battagliava col Muratori in una di quelle

(1) Crevenna, Vol. VI, pag. 250.
(2) Id., id.

che, meglio di polemiche, si potrebbero chiamare bizze letterarie) indirizzava al nostro una lettera lunghissima, in cui l'amicizia e la stima reciproca dei due valorosi eruditi non è sopraffatta completamente dall'ira del momento. Il Maffei rinfaccia al Muratori i benefici fattigli, in particolare i numerosi doni di antiche carte e di cronache; ma verso la fine della lettera si calma e gli comunica una notizia che lo libererà da molti dubbi. " Ho fatto per voi nella mia inimicizia quello che pochissimi avrebbero fatto nell'amicizia e quale non avreste fatto voi. Il fine è stato che il re si è dichiarato persuaso e pago, e non questo solamente, ma mi ha anche incaricato di farvi sapere *che se c'è nello stato o nello stesso archivio una cosa che vi possa servire ve la farà comunicare volentieri*. Di questo vi prego di mandare un ringraziamento al re per quel canale che crederete più proprio, premendomi che egli sappia che io non ho trascurata questa sua commissione ". E conchiudeva quel letterone dettato con foga, un po' dal dispetto, un po' dall'amicizia, dando notizia di un ms. della cronaca della Novalesa da lui ritrovato nell'archivio del re e dato a trascrivere per conto del Muratori ad un giovane paleografo, il conte di Robilant (1). Le raccomandazioni del dotto veronese non furono trascurate, come è provato dalla seguente lettera inedita del Muratori, che qui trova il suo luogo:

" *Eccellenza,*

" Bench'io avessi dall'E. V. sufficienti pruove dell'animo
" generoso e benignissimo genio di cotesta Real Maestà per
" favorire i miei disegni letterarii e somministrarmi i sospirati
" mezzi da far onore alla Real Casa ed a cotesti suoi felicissimi
" stati nella mia raccolta *Rerum Italicarum*, pure è piaciuto
" alla M. S. di assicurarmi sempre più di questa sua clementis-
" sima propensione per mezzo del chiarissimo signor Marchese

(1) A quella lettera del Maffei, che noi leggiamo nel cit. fascicolo della " Rivista Europea ", il Muratori rispose ringraziando dei buoni servizi fattigli e concludendo: " i galantuomini della nostra specie sono amici nati, onde se qualche dissapore accidentalmente tra loro nasce, non distrugge il fondo della natura " (loc. cit.). A proposito delle relazioni tra il Muratori ed il Maffei sarà bene confrontare il paragone che dei due insigni eruditi fa il Pindemonte nell'Elogio di Scipione Maffei — in *Elogi di letterati italiani*. Firenze, Barbèra e Bianchi, 1859.

" Scipione Maffei con farmi dire che volentieri mi avrebbe con-
" cesso quanto si trovasse al mio proposito nei suoi stati ed
" archivi. Ora io non posso a meno di supplicare la bontà di
" V. E. che voglia umiliare alla M. S. i miei più ossequiosi rin-
" graziamenti per così magnanima offerta con rappresentarle
" nello stesso tempo che non sapendo io cosa in coteste parti
" possa convenire al mio bisogno, non potrò mai profittare delle
" grazie reali quando la M. S. non si degni di ordinare ad al-
" cuno dei tanti letterati che sono costì il cercare quali storie
" inedite si trovassero nel Piemonte, onde venire maggiormente
" ad illustrarsi la storia dei suoi reali progenitori e di coteste
" contrade. Il dottissimo sig. avv.° regio D. Francesco D'Aguirre,
" siccome d'ottimo genio, sarebbe a proposito per questo, se gli
" venisse del calore da parte di S. M. o dalle umanissime rac-
" comandazioni di V. E. Nel Monastero di Altacomba si sperava
" di trovare delle antiche memorie. Ho sentito anche parlare di
" cronache vecchie manoscritte di Saluzzo e del Monferrato.
" Tutto aprirebbe l'adito a me per esprimere al mondo la pro-
" fonda venerazione che io professo alle rare virtù di cotesto
" glorioso Sovrano e per dare lustro agli stati della M. S. Non
" isdegni dunque l'E. V. fra tanti suoi affari gravi di avere
" presente ancora questo mio, che del suo benigno patrocinio le
" resterò io eternamente tenuto. E intanto col baciarle le mani
" le rassegno il mio indelebile ossequio e mi ricordo di V. E.

" Modena, 18 settembre 1727.

" *Um.mo Dev.mo ed Oblig.mo Serv.*"
" Ludov. Ant. Muratori „ (1).

La lettera dal Maffei diretta al Muratori sarebbe parsa a chiunque sicura promessa, ma un fatto, che dette poi luogo a molte dispute, interruppe d'un tratto le buone relazioni tra il Muratori e la corte piemontese; vogliamo dire l'improvvisa partenza da Torino del D'Aguirre avvenuta nei primi mesi del 1728 (2).

---

(1) Dalla Biblioteca civica di Torino. Raccolta di autografi già del conte Nomis di Cossilla, Maz. 27. La soprascritta della lettera è smarrita, ma è facile arguire che essa dovette essere diretta al D'Aguirre.

(2) Il Muratori ebbe notizia assai tardi della partenza del D'Aguirre, e ciò probabilmente perchè la corrispondenza fra i due illustri personaggi era stata intercettata. Quando già il D'Aguirre era a Milano ai servizi dell'imperatore così gli scriveva il Muratori: " solamente il vedervi impedito il commercio letterario ed intercette le lettere bastava per dare l'addio a quel paese e per correre ad altri paesi più liberi „. Campori, t. VI, 252.

Partito il D'Aguirre da Torino, il Muratori perdette ogni speranza che il suo desiderio potesse essere esaudito finchè regnava Vittorio Amedeo II; cessò adunque ogni insistenza. Il marchese Malaspina, unico intermediario che fino allora avesse potuto fornirgli antiche carte, potè ancora offrire a lui il poemetto dell'Astesano e la cronaca di Ripalta; nè il Muratori gli risparmiò lodi e ringraziamenti. Ma il celebre storico neppure si mosse quando il Maffei da Torino volle tentare l'ultima prova presso il re e quando gli scrisse di comunicare notizie e consigli a due cortigiani piemontesi, i quali dicevano di essere pronti a servirlo (1). Anche per procurarsi la cronaca di Monferrato di Benvenuto da San Giorgio edita fin dal 1639 in Casale, ma conservata in rarissimi esemplari, molto dovette faticare, tanto che nacque in lui il dubbio che il maggior numero degli esemplari fosse stato a bella posta distrutto (2). Erano quelli gli ultimi anni del regno di Vittorio Amedeo II; la sua abdicazione, i suoi tentativi di ritorno, la sua fine romanzesca sono fatti abbastanza noti che bastano a spiegare come in quei giorni in Piemonte non fosse il caso di parlare di ricerche storiche.

Quali le cause di così tenaci ostacoli frapposti alle ricerche muratoriane? Il Napione attribuisce l'inaccessibilità degli archivi piemontesi " ai pochi progressi che avevano fatto in Piemonte gli studi storici, alle controversie con Roma ed allo spirito militare a cagione delle continue guerre dominanti per cui si temevano ad un tempo e non si curavano le lettere " (3). I raccoglitori di codici e documenti (quasi tutti giuristi in quei tempi in cui l'arte diplomatica era ancora al servizio della scienza giuridica) erano sospetti di andare in cerca nel fondo degli archivi di carte e privilegi che invalidassero certi diritti di fatto vigenti. Perciò a ragione il Richa si lagnava perchè si sottoponevano " alla critica dei politici i mss. prima di mandarli fuori di stato " (4), e perchè, come vedemmo, si sopprimevano senza scrupoli quando pareva che contenessero cose " nè decorose, nè utili ". Il Vallauri designa come causa precipua degli ostacoli frapposti al Muratori la

(1) Vischi, pag. 110.
(2) Prefazione alla Cronaca stessa edita nei *R. I. S.*, t. XXXIII.
(3) *Elogio dei cronisti piemontesi*. Torino 1786, pag. 217.
(4) Lettera cit. del Richa al Muratori, in data 25 dicembre 1723.

controversia della corte piemontese con Roma, ma a parte la considerazione che il preposto modenese non si mostrò mai troppo proclive per la curia (1), sta il fatto che la controversia cessò col trattato concluso nel 1727 senza che per questo alle ricerche muratoriane fosse spianata la via (2). Nè miglior ragione hanno forse il Denina, che tutta addossa la responsabilità al Caisotti, ministro del re (3) ed il Soli-Muratori (4) che, compiacendosi della lettera scritta da Vittorio Amedeo all'illustre suo zio, ammette che alle promesse in quella contenute seguissero i fatti. Fra i moderni, Venceslao Santi (5) attribuisce tutta la colpa ai cortigiani che non eseguirono gli ordini del re, ed il Carutti (6) accenna pure alle gelosie tra comune e comune; essi infatti orgogliosi per antichi privilegi, pur permettendo agli storici locali di illustrare le patrie memorie, poco si fidavano dei forestieri. Tra le cause che possono spiegare in parte quel triste episodio della storia della cultura piemontese, deve aggiungersi quella accennata dal Maffei in una sua lettera (7); il dispetto cioè suscitato contro il Muratori nella corte piemontese per la sua opinione sulle origini della casa di Savoia che egli, correggendo il Guichenon, aveva sostenuto nelle sue *Antiquitates estenses* (8).

---

(1) Cfr. pag. 7, n. 3.

(2) Vallauri, op. cit., pag. 37.

(3) *Storia dell'Italia occidentale*, tomo V, pag. 45. — È noto che il Denina fu nemico personale del Caisotti.

(4) Pag. 134. Il Fabroni rammenta vagamente " nonnullorum hominum suspiciones ac timores " (*Vita ital. doctrin. excell. qui saec. XVII et XVIII flor.* Pisis, 1783, t, X).

(5) Loc. cit.

(6) *Storia del regno di Carlo Emanuele III.* Torino 1859, pag. 281.

(7) " Hanno rappresentato con grande strepito al re — scriveva il Maffei — che ciò che dite della casa di Savoia sia offensivo e mostri mal animo, massimamente la clausola che avete aggiunta nelle Antichità estensi e che prendono come riferentesi alla casa di Savoia " in " Rivista Europea " Santi, cit., XXVI.

(8) Ecco il passo delle *Antichità estensi*, diciamo così, incriminato: " Il Guichenon avrebbe, cred'io, ingenuamente confessate favole le sue congetture intorno al far discendere dagli antichi duchi di Sassonia e da Vitechindo il grande la casa di Savoia s'egli si fosse potuto accertare di quello che sono io ora per aggiungere. Cento autori moderni che attribuiscono un'origine antichissima ad una Casa senza recarne autentiche pruove e coll'andarsi copiando l'un l'altro, se trovano essi gran facilità nell'asserire ne

Le speranze che il grande modenese aveva riposto nel successore di Vittorio Amedeo furono dapprima deluse. " Le disgustose faccende famigliari, dice il Cibrario (1), allontanarono presto Carlo Emanuele III dal favore degli studii „. Ma le cose non tardarono a prendere miglior piega; il fatto che sotto il regno di quel principe, il quale fu pure sì rigido ed imperioso, potesse il Muratori ottenere sì gran copia di documenti, pare che provi come i contrasti incontrati durante il regno di Vittorio Amedeo siano da attribuirsi piuttosto che ad altro a malevolenze ed odi di persone. Solo nel 1734 intanto il Muratori potè ottenere dalla corte piemontese le tanto desiderate fonti storiche, ed egli allora attendeva già alle *Antiquitates italicae.* Le relazioni tra il preposto modenese e la corte sabauda furono riprese così: l'ab. Giacobazzi, inviato ambasciatore dal duca di Modena al campo ove si trovava re Carlo Emanuele III, discorrendo col primo ministro marchese Borea d'Ormea, era venuto a parlare del Muratori. Il re aveva ricordato lo storico modenese con grande ammirazione, tanto che questi, avvertito dal Giacobazzi del colloquio, aveva creduto bene di scrivere al D'Ormea per ringraziare. " Io avrò tra poco in ordine — scriveva in fine di quella sua lettera in data 27 luglio 1734 — le mie *Antiquitates italicae medii aevi* che formeranno un'opera di Tomi VI in foglio. In questo avrebbero luogo le memorie che io desidero da Torino, le quali quanto più fossero antiche tanto più mi sarebbero care (2) „. Il ministro D'Ormea dal campo di San Benedetto subito rispose assicurando il Muratori d'aver mandato ordine al presidente del Senato in Torino di iniziare le ricerche (3). E questa volta finalmente la promessa fu mantenuta: il Maffei anche in questa occasione non risparmiò fatiche per

---

trovano altrettanta nei lettori acuti a non voler loro prestar fede. Il punto però sta non doversi mai lusingare alcuno di farsi credere più nobile di quello che è, per avere molti scrittori, ma non buoni critici, che l'esaltano al cielo, o grosse storie della sua genealogia, ma fondate nei vasti campi dell'aria, imperocchè potrà bene egli pascersi di questa opinione, ma non già persuaderla ad altri meno di lui interessati in simile affare „ (Prefazione all'edizione di Modena del 1717).

(1) *Storia della monarchia in Piemonte*. Torino, 1840, t. XXI, prefaz.

(2) Soli-Muratori, pag. 473. — Cfr. Murat., *Ann. d'Italia*, t. XII, pag. 200.

(3) Cfr. *Annali d'Italia*, t. XII, pag. 474.

aiutare il Muratori (1), sicchè basta dare un'occhiata alle *Antiquitates* per vedere con quanta copia di documenti siano illustrate le storie dei monasteri subalpini (2). Il buon esempio del re incoraggiò anche i privati a contribuire alla grande raccolta; il conte di Robilant, avendo ritrovati certi frammenti della cronaca della Novalesa, che nel testo malaspiniano era stata edita in parte nei *R. I. S.*, li inviò al Muratori che potè pubblicarli nelle *Antiquitates* (3). Il re intanto dava ordine al Caisotti di trascrivere le antiche epigrafi e di inviarle al grande storico, che già aveva posto mano al suo *Thesaurus novarum inscriptionum* (4). — Della corrispondenza tenuta dal Muratori col Piemonte in questo fortunato periodo di ricerche, nulla è stato finora dato alle stampe; non sarà inutile quindi la seguente lettera diretta (come pare) al D'Ormea, e riferentesi, almeno nella seconda parte, alle ricerche muratoriane:

" *Eccellenza,*

" So quanta sia la benignità di V. E., tuttavia temerei di
" comparire presso di Lei un temerario, s'Ella non sapesse aver
" io composto e pubblicato un trattato di carità cristiana. Se-
" guendo i consigli di questa, giacchè si tratta di persona mi-
" serabile, io non ho potuto dispensarmi dall'accettare l'inchiusa
" supplica premurosamente a me raccomandata e mi fo animo
" per inviarla a V. E. Si degni Ella di metterla unita col mio
" più profondo ossequio ai piedi di S. M. il Re di Sardegna
" nella cui somma clemenza confida la povera supplicante e più
" di lei confido io. Ne avrà Ella il suo merito presso l'Altissimo.
" Rendo con questa occasione umilissime grazie all'E. V.
" perchè le benigne premure che mi sieno comunicati varii do-
" cumenti onorevoli per la Real Casa di Savoia e pel Piemonte

(1) Nella Prefazione alle *A. I. M. E.* il Muratori dice del Maffei: " semper libenter mihi se obtulit ".

(2) I seguenti monasteri trovansi illustrati nell'*Antiquitates:* Taurinense (I, 231), Montisferrati (I, 339), Segusium (I, 341), Bobiense (I, 517), Astense S. Mariae (I, 909), Taurinense S.ti Michaelis (V, 483), Astense S.ti Bartolomaei (V, 569).

(3) V. Prefaz. ai frammenti della cronaca novaliciense in *Antiq.*, III, 963. Il Bettmann giudica il ms. del Robilant come quello del Malaspina *nullius utilitatis*.

(4) Soli-Muratori, pag. 317.

' non andrà molto che saranno eseguite. Desidero io in tutte le
' congiunture di poter palesare al pubblico la somma venera-
' zione che professo alla M. S. ed insieme quel distinto ossequio
' con cui reverentemente mi confermo

" Modena, 13 giugno 1735.

" Di V. E.
" *Umil.*mo *Dev.*mo *e Obblig.*mo *Servitore*
" Ludov.° Ant. Muratori (1) „.

Le buone relazioni del Muratori colla corte piemontese durarono poi sempre inalterabili. Quando Carlo Emanuele III nel 1742 entrò vincitore in Modena, la Biblioteca estense e l'Archivio diretti dal Muratori furono custoditi e custodite pure furono le case e le terre del vecchio preposto. Il re più volte invitò presso di sè il grande storico, ed a questo proposito narrasi anzi un aneddoto. Un giorno il re, dicono, chiese al Muratori: " Come mi tratterà nella sua storia? „ Ed il Muratori prontamente: " Come V. M. tratterà la mia patria „. Bisogna credere che Modena fosse trattata bene dal re Carlo Emanuele se il Muratori poteva scrivere di lui come dell'imperatrice d'Austria: " Conviene far giustizia all'augustissima imperatrice Maria Teresa ed alla Maestà di Carlo Emanuele re di Sardegna che per sette anni tennero il dominio di questo ducato. Certo è che non mancarono gravissimi danni, frutti inevitabili della guerra. Contuttociò restò qui e per lungo tempo resterà la memoria della gloriosa moderazione di cotesti due clementissimi sovrani, che si tennero lungi da ogni eccesso finchè qui esercitarono la loro signoria „ (2).

(1) Biblioteca civ. di Torino. Autogr. cit., mazzo 27.

(2) *Annali d'Italia*, ann. 1743. Cfr. anche in Silingardi, num. 29, la lettera del Muratori a Giuseppe Chiappini in data 12 luglio 1742.— Grandi elogi di Carlo Emanuele fa ancora il Muratori nel *Trattato della pubblica felicità oggetto dei buoni principi*. Venezia 1749, pag. 93, ed altrove.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXV, DISP. **6ª, 1899-900**

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1900

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Gennaio 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: BIZZOZERO, Direttore della Classe, SALVADORI, D'OVIDIO, MOSSO, SPEZIA, CAMERANO, SEGRE, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA e NACCARI Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale della precedente adunanza, che viene approvato.

Il Segretario comunica una lettera d'invito al XIII Congresso della Società di Medicina da tenersi in Parigi nel prossimo agosto. I Soci BIZZOZERO e MOSSO, pregati dal Presidente accettano l'incarico di rappresentarvi l'Accademia.

Il Socio SALVADORI presenta a nome dell'autore Victor FATIO Socio corrispondente, il secondo volume dell'opera intitolata: *Faune des vertébrés de la Suisse.*

Il Segretario presenta a nome del Socio PEANO il sesto volume della *Revue de Mathématique* da lui diretta. Il Presidente ringrazia il Socio PEANO.

Il Segretario presenta un opuscolo inviato dal Socio corri-

spondente Helmert e alcune pubblicazioni del Socio corrispondente Penzig.

Il Socio Guidi presenta una sua nota intitolata: *Esperienze sull'elasticità e resistenza a tensione del rame*. Sarà inserita negli *Atti*.

Il Segretario presenta a nome del Socio Volterra indisposto, una seconda nota del Prof. Domenico De Francesco: *Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante*. Presenta inoltre le *Osservazioni meteorologiche fatte nel 1899 all'Osservatorio astronomico di Torino e calcolate* dal Dott. Luigi Carnera.

Anche queste due note saranno inserite negli *Atti*.

La Classe poscia si costituisce in seduta privata e procede alla elezione di Soci corrispondenti. Vengono nominati:

nella Sezione di Chimica generale ed applicata:

Ugo Schiff, Prof. nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze,

Enrico Moissan dell'Istituto di Francia,

Giovanni Wislicenus, Prof. nell'Università di Lipsia;

nella Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia:

Torquato Taramelli, Professore nell'Università di Pavia,

Teodoro Liebisch, Professore nell'Università di Gottinga;

nella Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata:

Carlo Sedgwik Minot, Prof. nell' " Harvard Medical School, in Boston S. U. A.,

Giorgio Alberto Boulenger, Assistente al " British Museum of natural History „ di Londra.

LETTURE

Esperienze sull'elasticità e resistenza a tensione del rame;

Nota del Socio CAMILLO GUIDI.

Scopo della presente Nota è di riferire sopra alcune esperienze sull'elasticità e resistenza a tensione di barrette di rame ricavate da lamiere per focolai di locomotive. Le esperienze furono richieste dalle Officine Ferroviarie P.[li] di Torino in due epoche diverse e vennero eseguite nel Laboratorio sperimentale per i materiali da costruzione, annesso alla R. Scuola d'Applicazione per gl' Ingegneri di Torino nel gennaio '98 e nel dicembre dello stesso anno.

Le provette sono 16 in tutto, distinte in due serie: la prima risulta di 8 provette ricavate da lamiere nuove destinate a focolai di locomotive; le rimanenti 8 provette, costituenti la seconda serie, furono tolte da lamiere di focolai di locomotive già in servizio.

La Tabella I riassume tutti i risultati ottenuti; le altre tre tabelle sono riportate a titolo d'esempio, e si riferiscono alle deformazioni osservate per mezzo dello *Spiegelapparat* di *Bauschinger* (1) allo scopo di determinare le costanti di elasticità. Come risulta da queste ultime tabelle, tali deformazioni vennero valutate a partire da un certo sforzo iniziale, indispensabile per tenere saldamente in posto la provetta e l'annesso apparecchio.

Nell'unita Tavola sono raccolti i diagrammi di deformazione della prova a rottura, opportunamente ridotti da quelli originali automaticamente disegnati dalla macchina (2); cinque

(1) Cfr. C. Guidi, *Notizie sul Laboratorio ecc.*, Roma, Centenari, 1895.

(2) Cfr. C. Guidi, *Di un nuovo apparecchio autoregistratore per le prove a tensione*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 1898.

sono relativi alla prima serie di provette, gli altri si riferiscono alla seconda. In questi diagrammi furono anche rappresentate le leggi, secondo cui le deformazioni valutate con lo *Spiegelapparat* variano cogli sforzi, riportando tali deformazioni come ascisse nella scala 500 : 1. In questa rappresentazione si ammise che la deformazione dallo sforzo zero allo sforzo di partenza per le misurazioni con lo *Spiegelapparat*, fosse eguale a quella successiva per un uguale incremento di sforzo.

Come vedesi dalla Tabella I, oltre alla determinazione della resistenza massima, del carico di rottura, dell'allungamento %, della contrazione % e del lavoro di deformazione p. $cm.^3$ dedotto dal diagramma di deformazione, venne anche fatta la ricerca del carico limite di elasticità, del carico di snervamento e del modulo di elasticità normale, o coefficiente di *Young*; sebbene queste tre ultime quantità per il rame, come è noto, non sempre possano essere nettamente determinate. Ed invero una barretta di rame, la quale non sia stata preventivamente sottoposta ad alcuna sollecitazione, quando venga sperimentata a tensione non si deforma, a rigore, secondo la legge di *Hooke*, cioè gli allungamenti non crescono proporzionalmente agli sforzi, neppure per sforzi di piccola entità, ma bensì in una ragione maggiore; ciò apparisce chiaramente dalla Tabella III, nella quale si vede che le differenze prime fra gli allungamenti corrispondenti ai diversi sforzi, crescenti in progressione aritmetica, non rimangono costanti, neppure per sforzi di piccola entità, ma sono gradatamente crescenti. Lo stesso fatto si rileva dai diagrammi VII 1ª ed VIII 1ª, relativi alla settima ed alla ottava provetta della prima serie. Invece le barrette della seconda serie, tolte da locomotive che avevano già fatto servizio, e che per conseguenza ebbero già a sopportare sforzi, presentarono abbastanza nettamente un periodo di proporzionalità, come risulta dalla tabella IV e dai diagrammi relativi a questa seconda serie di provette. Nei diagrammi venne indicato con un circoletto il punto che più o meno approssimativamente può assumersi come limite di elasticità.

Anche il punto di snervamento (*Streckgrenze* o *Fliessgrenze*), come apparisce dai diagrammi stessi, non è per il rame esattamente determinabile, a differenza di quanto si verifica generalmente per i materiali ferrosi.

È noto inoltre come il periodo di proporzionalità resti influenzato dall'entità e dalla ripetizione degli sforzi cui viene cimentata la barretta (1). Abbiamo verificato questo fatto per le provette II e III, e più ancora per la provetta I della 1ª serie. Le provette II e III vennero cimentate, prima di procedere alla misurazione degli allungamenti collo *Spiegelapparat*, al considerevole sforzo di 4^t, e per esse il limite di elasticità rimase innalzato fin verso questo sforzo, pari a $\frac{4000}{4,77} = 839\ ^{Kg}/_{cm^2}$ per la II, ed a $\frac{4000}{4,59} = 870\ ^{Kg}/_{cm^2}$ per la III; valori all'incirca doppî di quelli riscontrati per le altre provette. Per la provetta I poi si fece una prima misurazione dopo 4 sollecitazioni, una seconda dopo 6, una terza dopo 26, una quarta dopo 32, ed una quinta dopo 42 sollecitazioni. Sono rimarchevoli i risultati specialmente della prima e della terza misurazione, che vennero riportati nella tabella II. Ambedue queste misurazioni dimostrano l'esistenza di un periodo di proporzionalità ben definito; ma si noti che mentre nella prima misurazione il limite di proporzionalità si trovò già innalzato a 3^t di sforzo totale, pari a $\frac{3000}{4,78} = 635\ ^{Kg}/_{cm^2}$, nella terza misurazione questo raggiunse lo sforzo totale di 5^t pari a $\frac{5000}{4,73} = 1057\ ^{Kg}/_{cm^2}$. Nel diagramma relativo a questa provetta vennero disegnate le linee corrispondenti alle due suddette misurazioni.

Questi fatti, del prodursi una legge di proporzionalità, del modificarsi della medesima e dell'elevarsi il limite di proporzionalità in seguito a ripetute sollecitazioni di sempre crescente intensità, indussero l'illustre professore e sperimentatore *Bach* ad inaugurare un nuovo metodo di condurre l'esperienza, secondo il quale lo sforzo si fa crescere per gradi, e si registrano per ciascuna entità di sforzo la deformazione totale, la deformazione elastica e la deformazione permanente soltanto dopo aver ripetuto tale sforzo tante volte finchè le dette deformazioni non subiscano più variazione (2).

Pur ritenendo indiscutibile l'importanza scientifica di tale

(1) Cfr. C. Bach, *Elasticität u. Festigkeit*, Berlin, 1898.
(2) Cfr. C. Bach, l. c.

metodo per lo studio delle proprietà elastiche di un materiale, dubito tuttavia che esso possa convenientemente introdursi nella pratica per l'accettazione dei materiali da costruzione, in primo luogo perchè non sempre, anzi raramente, questo modo di cimentare il materiale ha riscontro nelle sollecitazioni cui effettivamente esso andrà esposto nell'uso. Nella massima parte dei casi, specialmente per i materiali che vengono impiegati nelle costruzioni, l'alternativa nelle sollecitazioni, seppure ha luogo, avviene a larghi intervalli di tempo e sotto moderati sforzi; in tali casi hanno, a mio parere, maggiore interesse le proprietà elastiche, per così dire, naturali, e non quelle artificialmente prodotte con sollecitazioni frequentemente ripetute. Se ne ha una prova anche nelle esperienze di cui qui si tratta: le lamiere dei focolai che fecero già servizio, con tutto che fossero state più volte esposte a sollecitazione, in seguito alla pressione in caldaia, hanno raggiunto un limite di elasticità che è *inferiore alla metà* di quello che si può raggiungere artificialmente sperimentando col metodo di *Bach*. In secondo luogo tale metodo incontrerebbe una difficoltà d'indole pratica, e cioè che, per molti materiali, esso richiede un tempo enorme, non proporzionato allo scopo che si vuol raggiungere.

Chiuderemo questa breve Nota coll'osservare come le proprietà di resistenza delle lamiere dei focolai che fecero già servizio, non siano notevolmente diverse da quelle delle lamiere nuove.

Torino, gennaio 1909.

R. SCUOLA D'APPL. PER GL'INGEGNERI
IN TORINO

Laboratorio per Esperienze
sui
MATERIALI DA COSTRUZIONE

TABELLA I.

Serie	N. della provetta	Larghezza e spessore della provetta	Sezione	Carico limite di elasticità per cm²	Carico di snervamento per cm²	Resistenza massima Totale	Resistenza massima Per cm²	Carico totale di rottura	Allungamento % dopo la rottura misurato su 20 cm.	Contrazione %	Lavoro di deformazione per cm³	Modulo di elasticità	OSSERVAZIONI
		cm.	cm²	t.	t.	t.	t.	t.			tcm.	t/cm²	
1ª Serie	I	3,01 × 1,57	4,78	—	—	10,80	2,28	9,20	42	59	0,86	1379	
	II	3,02 × 1,58	4,77	—	1,05	10,92	2,29	—	41	55	—	1241	
	III	3,02 × 1,52	4,59	—	1,20	10,20	2,22	—	42	40	—	1250	
	IV	3,01 × 1,50	4,51	0,44	1,00	10,20	2,26	—	43	47	0,86	1323	
	V	3,05 × 1,56	4,76	0,42	1,05	10,60	2,23	—	42	47	—	1274	
	VI	3,00 × 1,53	4,59	0,44	1,10	10,20	2,22	8,20	42	53	0,82	1346	
	VII	3,03 × 1,39	4,21	0,47	0,83	9,20	2,18	7,80	47	54	0,91	1130	
	VIII	3,05 × 1,40	4,27	—	0,82	9,40	2,20	—	40	51	0,78	1070	
		Medie		**0,44**	**1,01**		**2,23**		**42**	**51**	**0,85**	**1252**	
2ª Serie	I	3,06 × 1,03	3,15	0,48	0,95	6,97	2,21	6,15	40	43	0,79	1312	‖ alla laminazione
	II	3,08 × 1,06	3,26	0,46	0,92	7,15	2,20	6,30	39	53	0,76	1190	" "
	III	2,10 × 1,27	2,67	0,47	0,94	5,70	2,14	—	41	50	0,78	1232	" "
	IV	2,12 × 1,25	2,65	0,38	0,94	5,82	2,22	5,12	43	55	0,85	1220	" "
		Medie		**0,45**	**0,94**		**2,19**		**41**	**50**	**0,79**	**1238**	
	V	3,08 × 1,04	3,20	0,47	0,94	6,90	2,15	—	37	35	0,70	1310	⊥ alla laminazione
	VI	3,09 × 1,07	3,31	0,45	0,98	7,15	2,16	—	36	41	0,69	1141	" "
	VII	2,10 × 1,25	2,62	0,48	0,95	5,60	2,14	—	36	40	0,69	1252	" "
	VIII	2,12 × 1,22	2,59	0,48	0,96	5,80	2,24	5,20	38	51	0,75	1356	" "
		Medie		**0,47**	**0,96**		**2,17**		**37**	**42**	**0,71**	**1265**	

TABELLA II.

Dopo 4 sollecitazioni			Dopo 26 sollecitazioni		
Carico totale t.	Dilatazione totale su cm. 15,00 1/10000 mm.	Differenze	Carico totale t.	Dilatazione totale su cm. 15,00 1/10000 mm.	Differenze
0,50	0				
		112			
1,00	112		1,00	0	
		117			
1,50	229				260
		112			
2,00	341		2,00	260	
		117			
2,50	458				260
		117			
3,00	575		3,00	520	
		132			
3,50	707				267
		142			
4,00	849		4,00	787	
					265
			5,00	1052	

TABELLA III.

Provetta VII della 1ª serie.

CARICO totale t.	SPECCHIO ANTERIORE — SCALA POSTERIORE: Lettura $\frac{1}{500}$ cm.	SPECCHIO ANTERIORE — SCALA POSTERIORE: Spostamento $\frac{1}{500}$ cm.	SPECCHIO POSTERIORE — SCALA ANTERIORE: Lettura $\frac{1}{500}$ cm.	SPECCHIO POSTERIORE — SCALA ANTERIORE: Spostamento $\frac{1}{500}$ cm.	DILATAZIONE totale $\frac{1}{10000}$ mm.	DIFFERENZE	OSSERVAZIONI
0,50	20,50	0	19,50	0	0		*Dimens. sez. trasvers. cm. 3,03* $\times$ *1,39.*
1,00	21,29	0,79	18,87	0,63	142	142	*Distanza fra i coltelli = cm. 15,00.*
1,50	22,29	1,79	18,30	1,20	299	157	*Distanza delle scale dagli specchi = cm. 160.*
2,00	23,32	2,82	17,60	1,90	472	173	*Ingrandimento = 1000.*
2,50	24,47	3,97	16,66	2,84	681	209	*Sezione trasversale del saggio = cm.² 4,21.*
3,00	26,20	5,70	15,40	4,10	980	299	*Limite di elasticità* (?) $\frac{2,00}{4,21} = 0,47\ ^{t}/_{cm^2}$.
3,50	Le immagini delle scale si spostano continuamente.						*Punto di snerv.* (Streckgrenze) $= \frac{3,50}{4,21} = 0,83\ ^{t}/_{cm^2}$.
							Modulo di elastic. $E = \frac{1,50}{4,21}\,\frac{1500000}{472} = 1130\ ^{t}/_{cm^2}$.

TABEL[LA] [cut off]

Dopo 4 sollecitazion[i] [cut off]	
Carico totale t.	[Dila]tazione totale 15,00
0,50	
1,[cut off]	

TABELLA [cut off]
Provetta I della [cut off]

CARICO totale t.	SPECCHIO ANTERIORE — SCALA POSTERIORE: Lettura $\frac{1}{500}$ cm.	SPECCHIO ANTERIORE — SCALA POSTERIORE: Spostamento $\frac{1}{500}$ cm.	SPECCHIO POSTERIORE — SCALA ANTERIORE: Lettura $\frac{1}{500}$ cm.	SPECCHIO POSTERIORE — SCALA ANTERIORE: Spostamento $\frac{1}{500}$ cm.	DILATAZIONE totale $\frac{1}{10000}$ mm.	DIFFERENZE
0,50	19,50	0	20,00	0	0	
0,75	20,02	0,52	19,60	0,40	92	92
1,00	20,44	0,94	19,12	0,88	182	90
1,25	20,83	1,33	18,61	1,39	272	90
1,50	21,30	1,80	18,17	1,83	363	91
1,75	21,80	2,30	17,61	2,39	469	106
2,00	22,31	2,81	16,94	3,06	587	118
2,25	22,82	3,32	16,20	3,80	712	125
2,50	23,70	4,20	15,42	4,58	878	166

Dimens. sez. trasv[cut off]

Distanza fra i coltell[cut off]

Distanza delle scale dagli s[cut off]

Ingrandimento = 1000.

Sezione trasversale del saggio = cm.^{2} *3,1*[cut off]

Limite di elasticità $\frac{1,50}{3,15} = 0,48\ ^t/_{cm^2}$.

Punto di snerv. (Streckgrenze) $= \frac{3,00}{3,15} = 0,95\ ^t/_{cm^2}$.

Modulo di elastic. $E = \frac{1,00}{3,15}\ \frac{1500000}{363} = 1312\ ^t/_{cm^2}$.

Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante;

Nota II di DOMENICO DE FRANCESCO.

Nella prima Nota (*) si è veduto come possano essere integrate le sei equazioni differenziali stabilite dal Sig. Heath (**). Con tale integrazione però (***) il problema non è risoluto che per metà; poichè conosciute le sei velocità angolari rappresentate dalle caratteristiche ω, rimangono da conoscere i sei parametri che determinano ad ogni istante la posizione del corpo. Questa seconda parte del problema non è stata trattata dal Sig. Heath. Però per stabilire le sei equazioni differenziali, di cui ci siamo occupati nella Nota I, egli passa per 6 altre equazioni differenziali che, quando il corpo non è sollecitato da forze, si integrano immediatamente. I sei integrali che così si ottengono non sono tuttavia sufficienti alla risoluzione completa del problema, inquantochè essi non sono indipendenti tra loro, ma equivalgono a soli quattro.

Rimangono quindi due altri integrali da determinare e la loro ricerca è l'oggetto di questa Nota.

(*) " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ,, 1899, Vol. XXXV.

(**) *On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space.* By R. S. Heath, " Philosophical Transactions of the Royal Society of London ,, year MDCCCLXXXIV, Vol. 175, part I, p. 316.

(***) Anche indipendentemente dal metodo indicato nella nostra prima Nota, il Prof. Volterra ha dimostrato in questi " Atti „ (27 marzo 1898) come nel moto spontaneo di un sistema a caratteristiche indipendenti di qualunque ordine, le caratteristiche possono esprimersi mediante serie di funzioni del tempo, i cui coefficienti si ricavano mediante operazioni razionali dalle costanti note dell'equazioni differenziali, e dai valori iniziali delle caratteristiche.

La posizione del corpo è data dai coefficienti di questo determinante:

$$
(1) \qquad \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix}
$$

con cui, date le coordinate di un punto del corpo, relative ad un tetraedro mobile col corpo stesso, si hanno quelle relative ad un tetraedro fisso. Il determinante (1) è ortogonale ed è eguale a $+1$.

Le equazioni che legano le caratteristiche ω coi coefficienti (1) sono:

$$
(2) \qquad \begin{cases} \omega_1 dt = l_4 dl_1 + m_4 dm_1 + n_4 dn_1 + p_4 dp_1 \\ \omega_2 dt = l_4 dl_2 + m_4 dm_2 + n_4 dn_2 + p_4 dp_2 \\ \omega_3 dt = l_4 dl_3 + m_4 dm_3 + n_4 dn_3 + p_4 dp_3 \\ \omega_4 dt = l_3 dl_2 + m_3 dm_2 + n_3 dn_2 + p_3 dp_2 \\ \omega_5 dt = l_1 dl_3 + m_1 dm_3 + n_1 dn_3 + p_1 dp_3 \\ \omega_6 dt = l_2 dl_1 + m_2 dm_1 + n_2 dn_1 + p_2 dp_1. \end{cases}
$$

Si tratta dunque d'integrare quest'equazioni supponendo già integrate quelle che dànno le ω in funzione del tempo.

Gl'integrali che, come dicemmo, si deducono immediatamente da certe equazioni differenziali per cui passa il Sig. Heath, sono i seguenti; ed esprimono che le quantità di moto di tutti i punti del sistema rigido formano in ogni istante una Diname, le cui sei componenti rispetto a un tetraedro fisso sono quantità costanti.

$$A\omega_1 a_1 + B\omega_2 a_2 + C\omega_3 a_3 + F\omega_4 a_4 + G\omega_5 a_5 + H\omega_6 a_6 = k_1,$$

$$(3)\left\{\begin{array}{ll} A\omega_1 b_1 + B\omega_2 b_2 + C\omega_3 b_3 + F\omega_4 b_4 + G\omega_5 b_5 + H\omega_6 b_6 = k_2, & \\ A\omega_1 c_1 + \ldots & \ldots + H\omega_6 c_6 = k_3, \\ A\omega_1 f_1 + \ldots & \ldots + H\omega_6 f_6 = k_4, \\ A\omega_1 g_1 + \ldots & \ldots + H\omega_6 g_6 = k_5, \\ A\omega_1 h_1 + \ldots & \ldots + H\omega_6 h_6 = k_6 \ (^*), \end{array}\right.$$

ove le k sono sei costanti d'integrazione ed i coefficienti $a_1, a_2, \ldots$ formano un determinante ortogonale di 6° ordine ($= + 1$), e, gli elementi di esso sono i minori di 2° ordine del determinante (1). Tra essi elementi esistono le relazioni:

$$(4)\left\{\begin{array}{llllll} a_1 = f_4, & a_2 = f_5, & a_3 = f_6, & a_4 = f_1, & a_5 = f_2, & a_6 = f_3 \\ b_1 = g_4, & b_2 = g_5, & b_3 = g_6, & b_4 = g_1, & b_5 = g_2, & b_6 = g_3, \\ c_1 = h_4, & c_2 = h_5, & c_3 = h_6, & c_4 = h_1, & c_5 = h_2, & c_6 = h_3. \end{array}\right.$$

I sei integrali (3) non sono indipendenti, come dicemmo, poichè da essi si ricava:

$$(5)\left\{\begin{array}{l} A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 + F^2\omega_4^2 + G^2\omega_5^2 + H^2\omega_6^2 = k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_6^2, \\ AF\omega_1\omega_4 + BG\omega_2\omega_5 + CH\omega_3\omega_6 = k_1 k_4 + k_2 k_5 + k_3 k_6, \end{array}\right.$$

(*) Il Sig. Heath (Memoria citata, p. 305) passa per questa equazione:

$$\frac{d}{dt}(a_1 q_1 + a_2 q_2 + \ldots + a_6 q_6) = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \ldots + a_6 Q_6,$$

nella quale $q_i = \frac{\partial T}{\partial \omega_i}$ (p. 316), essendo T la forza viva. Mettendo

$$T = \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + \ldots + H\omega_6^2),$$

e facendo

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_6 = 0,$$

ed integrando, si ha la prima delle (3).

che sono indipendenti dai coefficienti a_1, a_2, ... Essi sono due dei quattro integrali quadratici dell'equazioni differenziali relative alle caratteristiche ω, dei quali si è già discorso nella Nota 1ª.

Per trovare i due integrali che mancano operiamo come segue:

Alla 4ª, alla 5ª, alla 6ª delle (3) aggiungiamo rispettivamente la 1ª, la 2ª e la 3ª, moltiplicate per ± 1, e così, tenendo conto delle (4), otteniamo:

$$(6)\quad \begin{cases} (F\omega_4 \pm A\omega_1)(a_1 \pm f_1) + (G\omega_5 \pm B\omega_2)(a_2 \pm f_2) + \\ \qquad + (H\omega_6 \pm C\omega_3)(a_3 \pm f_3) = k_4 \pm k_1 \\ (F\omega_4 \pm A\omega_1)(b_1 \pm g_1) + (G\omega_5 \pm B\omega_2)(b_2 \pm g_2) + \\ \qquad + (H\omega_6 \pm C\omega_3)(b_3 \pm g_3) = k_5 \pm k_2 \\ (F\omega_4 \pm A\omega_1)(c_1 \pm h_1) + (G\omega_5 \pm B\omega_2)(c_2 \pm h_2) + \\ \qquad + (H\omega_6 \pm C\omega_3)(c_3 \pm h_3) = k_6 \pm k_3. \end{cases}$$

Se ora in luogo dei coefficienti $a_1 \pm f_1$, $a_2 \pm f_2$, ecc., noi scriviamo α, β, ecc. e formiamo il determinante:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

questo determinante è ortogonale, è $= +1$, ed inoltre si ha:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \gamma\, d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'' &= (\omega_4 \pm \omega_1)\, dt, \\ \alpha\, d\gamma + \alpha' d\gamma' + \alpha'' d\gamma'' &= (\omega_5 \pm \omega_2)\, dt, \\ \beta\, d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'' &= (\omega_6 \pm \omega_3)\, dt. \end{aligned}$$

Queste proprietà si dimostrano facilmente, se si esprimono i coefficienti α, β, ... in funzione degli elementi del determinante (1), cioè:

$$
(9)\left\{\begin{aligned}
&\alpha=(l_1p_4-l_4p_1)\pm(m_1n_4-m_4n_1),\quad \beta=(l_2p_4-l_4p_2)\pm(m_2n_4-m_4n_2),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma=(l_3p_4-l_4p_3)\pm(m_3n_4-m_4n_3),\\
&\alpha'=(m_1p_4-m_4p_1)\pm(n_1l_4-n_4l_1),\quad \beta'=(m_2p_4-m_4p_2)\pm(n_2l_4-n_4l_2),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma'=(m_3p_4-m_4p_3)\pm(n_3l_4-n_4l_3),\\
&\alpha''=(n_1p_4-n_4p_1)\pm(l_1m_4-l_4m_1),\quad \beta''=(n_2p_4-n_4p_2)\pm(l_2m_4-l_4p_2),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma''=(n_3p_4-n_4p_3)\pm(l_3m_4-l_4m_3),
\end{aligned}\right.
$$

e si hanno presenti l'equazioni:

$$
(10)\left\{\begin{aligned}
\frac{dl_1}{dt}&=l_2\omega_6-l_3\omega_5+l_4\omega_1,\\
\frac{dl_2}{dt}&=l_3\omega_4-l_1\omega_6+l_4\omega_2,\\
\frac{dl_3}{dt}&=l_1\omega_5-l_2\omega_4+l_4\omega_3,\\
\frac{dl_4}{dt}&=-l_1\omega_1-l_2\omega_2-l_3\omega_3,
\end{aligned}\right.
$$

colle altre analoghe, che si deducono facilmente dalle (2), come si fa per le notissime equazioni di Poisson.

Supponiamo ora le (6) sdoppiate in due terne corrispondenti l'una al segno superiore, l'altra all'inferiore, ed indichiamo con $(6)_1$ e $(6)_2$ rispettivamente l'una e l'altra terna, e con α_1, β_1, γ_1, α'_1..., e con α_2, β_2, γ_2, α'_2 ... i coefficienti corrispondenti alle terne $(6)_1$ e $(6)_2$. Questi coefficienti, come le costanti k dipendono evidentemente dalla scelta del tetraedro fisso, a cui si riferisce la posizione del corpo; ora io dico che si può scegliere il tetraedro fisso in modo che le costanti dei secondi membri delle prime due equazioni, tanto di $(6)_1$, quanto di $(6)_2$, riescano nulle, e che la costante della terza equazione

in $(6)_1$ sia $K_1=\sqrt{(k_1+k_4)^2+(k_2+k_5)^2+(k_3+k_6)^2}$,

in $(6)_2$ sia $K_2=\sqrt{(k_1-k_4)^2+(k_2-k_5)^2+(k_3-k_6)^2}$;

insomma che si abbia:

$$(6)_1 \begin{cases} \alpha_1(F\omega_4+A\omega_1)+\beta_1(G\omega_5+B\omega_2)+\gamma_1(H\omega_6+C\omega_3)=0, \\ \alpha'_1(F\omega_4+A\omega_1)+\beta'_1(G\omega_5+B\omega_2)+\gamma'_1(H\omega_6+C\omega_3)=0, \\ \alpha''_1(F\omega_4+A\omega_1)+\beta''_1(G\omega_5+B\omega_2)+\gamma''_1(H\omega_6+C\omega_3)=K_1, \end{cases}$$

$$(6)_2 \begin{cases} \alpha_2(F\omega_4-A\omega_1)+\beta_2(G\omega_5-B\omega_2)+\gamma_2(H\omega_6-C\omega_3)=0, \\ \alpha'_2(F\omega_4-A\omega_1)+\beta'_2(G\omega_5-B\omega_2)+\gamma'_2(H\omega_6-C\omega_3)=0, \\ \alpha''_2(F\omega_4-A\omega_1)+\beta''_2(G\omega_5-B\omega_2)+\gamma''_2(H\omega_6-C\omega_3)=K_2. \end{cases}$$

Basterà infatti che i secondi membri abbiano tali valori per un istante qualunque, perchè l'abbiano sempre, giacchè sono quantità costanti. Ora siccome i coefficienti α''_1, β''_1, γ''_1, α''_2, β''_2, γ''_2 sono funzioni di 6 parametri, noi potremo determinare questi parametri per $t=0$, in modo che si abbia:

$$(11) \begin{cases} \alpha''_1=\frac{F\omega_4+A\omega_1}{K_1}, & \beta''_1=\frac{G\omega_5+B\omega_2}{K_1}, & \gamma''_1=\frac{H\omega_6+C\omega_3}{K_1} \\ \alpha''_2=\frac{F\omega_4-A\omega_1}{K_2}, & \beta''_2=\frac{G\omega_5-B\omega_2}{K_2}, & \gamma''_2=\frac{H\omega_6-C\omega_3}{K_2} \end{cases}$$

ed allora, siccome per l'ortogonalità dei due determinanti si ha:

$$(12) \begin{matrix} \alpha''_1\alpha_1+\beta''_1\beta_1+\gamma''_1\gamma_1=0, & \alpha''_2\alpha_2+\beta''_2\beta_2+\gamma''_2\gamma_2=0, \\ \alpha''_1\alpha'_1+\beta''_1\beta'_1+\gamma''_1\gamma'_1=0, & \alpha''_2\alpha'_2+\beta''_2\beta'_2+\gamma''_2\gamma'_2=0, \end{matrix}$$

così sostituendo in queste ultime equazioni i valori (11) vengono le $(6)_1$ e le $(6)_2$, che così sono dimostrate per qualunque valore del tempo; e per conseguenza anche le (11) varranno per qualunque valore di t, giacchè si deducono dalle $(6)_1$ e dalle $(6)_2$.

I coefficienti di $(6)_1$, poichè formano un determinante ortogonale, sono funzioni di tre parametri, e potremo assumere per questi i parametri di Eulero θ_1, ψ_1, φ_1. Altrettanto faremo per i coefficienti di $(6)_2$, ed i parametri saranno θ_2, ψ_2, φ_2.

Per quanto riguarda la prima terna abbiamo (*):

$$(13)\quad \alpha''_1 = -\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\varphi_1, \quad \beta''_1 = -\operatorname{sen}\theta_1 \cos\varphi_1, \quad \gamma''_1 = \cos\theta_1,$$

$$(14)\quad \begin{cases} (\omega_4 + \omega_1)dt = \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\theta_1 d\psi_1 - \cos\varphi_1 d\theta_1, \\ (\omega_5 + \omega_2)dt = \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\theta_1 d\psi_1 + \operatorname{sen}\varphi_1 d\theta_1, \\ (\omega_6 + \omega_3)dt = d\varphi_1 - \cos\theta_1 d\psi_1. \end{cases}$$

Ora le (13) per le (11) divengono:

$$(15)\quad \begin{aligned} -\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\varphi_1 &= \frac{F\omega_4 + A\omega_1}{K_1}, \\ -\operatorname{sen}\theta_1 \cos\varphi_1 &= \frac{G\omega_5 + B\omega_2}{K_1}, \\ \cos\theta_1 &= \frac{H\omega_6 + C\omega_3}{K_1}, \end{aligned}$$

con cui restano determinati θ_1 e φ_1. Eliminando poi $d\theta_1$ dalle (14) se ne trae:

$$\operatorname{sen}^2\theta_1 d\psi_1 = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\varphi_1 (\omega_4 + \omega_1) dt + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\varphi_1 (\omega_5 + \omega_2) dt$$

e finalmente per le (15),

$$(16)\quad \psi_1 = -\int \frac{(F\omega_4 + A\omega_1)(\omega_4 + \omega_1) + (G\omega_5 + B\omega_2)(\omega_5 + \omega_2)}{K^2_1 \quad (H\omega_6 + C\omega_3)^2} K_1 \, dt + \text{cost.}$$

Nello stesso modo si determinano θ_2 φ_2 e ψ_2. L'equazione (16) e la corrispondente per ψ_2 sono i due ultimi integrali del problema. Avuti i sei parametri θ_1, φ_1, ψ_1, θ_2, φ_2, ψ_2 si avranno i coefficienti α_1, β_1, ..., α_2, β_2, ..., e per mezzo delle (9) senza difficoltà i sedici coefficienti del determinante (1).

Delle costanti K_1 e K_2, nel moto in uno spazio ellittico, una può esser nulla; non possono esser nulle entrambe, poichè in tal caso i secondi membri delle (3) sarebbero nulli, e nulle quindi tutte le ω.

(*) Poisson, *Traité de Mécanique*, 1833, Tome II, pag. 134.

Supponendo dunque che sia nulla una delle K, per esempio K_1, si avrà $k_4 + k_1 = k_5 + k_2 = k_6 + k_3 = 0$, ed allora le (6) dànno:

$$F\omega_4 + A\omega_1 = G\omega_5 + B\omega_2 = H\omega_6 + C\omega_3 = 0.$$

La $(6)_2$ resta com'è; e quindi θ_2, φ_2 e ψ_2 si determinano nello stesso modo, come nel caso generale.

In quanto ai parametri θ_1, φ_1 e ψ_1, essi nel caso generale, come si scorge dalle (15) e (16), sono funzioni di

$$\frac{F\omega_4 + A\omega_1}{K_1}, \quad \frac{G\omega_5 + B\omega_2}{K_1}, \quad \frac{H\omega_6 + C\omega_3}{K_1}.$$

Questi rapporti per $K_1 = 0$ prendono la forma $\frac{0}{0}$, ma si conosce il modo di determinarli, quando, come si suppone, si hanno le espressioni generali delle ω in funzione del tempo. Fatta questa determinazione, le formole (15) e (16) daranno θ_1, φ_1 e ψ_1.

Nello spazio iperbolico le quantità

$$p_1, \ p_2, \ p_3, \ l_4, \ m_4, \ n_4$$

del determinante (1) sono quantità immaginarie pure, e tali per conseguenza sono anche, per le (2), ω_1, ω_2, ω_3, e quindi tutti i binomi delle equazioni (6), che contengono il segno $\pm$ rappresentano quantità complesse coniugate. Le costanti K_1 e K_2 coniugate anch'esse, sono perciò o tutte due diverse da zero, o tutte due nulle.

Se K_1 e K_2 non sono nulle valgono tutte le formole precedenti; ma se $K_1 = K_2 = 0$, la riduzione delle (6) nelle $(6)_1$ e $(6)_2$ non ha luogo.

In tal caso posto primieramente:

$$(17) \quad F\omega_4 \pm A\omega_1 = \begin{cases} L \\ L' \end{cases}, \quad G\omega_5 \pm B\omega_2 = \begin{cases} M \\ M' \end{cases}, \quad H\omega_6 \pm C\omega_3 = \begin{cases} N \\ N' \end{cases}$$

le equazioni $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, dànno:

$$L^2 + M^2 + N^2 = L'^2 + M'^2 + N'^2 = 0,$$

e la terna (6) si può scindere nelle due seguenti:

$$(6)'_1 \quad \begin{cases} \alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N = K, \\ \alpha'_1 L + \beta'_1 M + \gamma'_1 N = Ki, \\ \alpha''_1 L + \beta''_1 M + \gamma''_1 N = 0, \end{cases}$$

$$(6)'_2 \quad \begin{cases} \alpha_2 L' + \beta_2 M' + \gamma_2 N' = K', \\ \alpha'_2 L' + \beta'_2 M' + \gamma'_2 N' = -K'i, \\ \alpha''_2 L' + \beta''_2 M' + \gamma''_2 N' = 0, \end{cases}$$

essendo K e K' due quantità costanti (immaginarie coniugate) che dipenderanno dalla posizione del tetraedro fisso. Infatti, essendo i coefficienti di $(6)'_1$ funzioni di tre parametri, il tetraedro fisso potrà scegliersi in modo che per $t=0$ si verifichi:

$$\alpha''_1 L + \beta''_1 M + \gamma''_1 N = 0,$$

ed allora, se si pone per $t=0$

$$\alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N = K,$$

sarà

$$\alpha'_1 L + \beta'_1 M + \gamma'_1 N = \pm Ki;$$

poichè la somma dei quadrati dei tre trinomi dev'essere nulla. Potrà poi togliersi l'ambiguità $\pm$ cambiando, ove ne sia il caso, il segno ai coefficienti α'_1, β'_1, γ'_1, α''_1, β''_1, γ''_1 con che il determinante ortogonale si mantiene positivo.

Dimostrate vere le $(6)'_1$ per $t=0$, saranno vere per qualsiasi tempo, giacchè i trinomi sono quantità costanti.

Le $(6)'_2$ saranno anche vere, dovendo i secondi membri di esse essere coniugati ai corrispondenti delle $(6)'_1$ (*).

(*) Se si suppone che per $t=0$ i coefficienti delle $(6)'_1$ siano rispettivamente eguali agli elementi del determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} \frac{L+L'}{2K_0} & \frac{M+M'}{2K_0} & \frac{N+N'}{2K_0} \\ \frac{L-L'}{2K_0 i} & \frac{M-M'}{2K_0 i} & \frac{N-N'}{2K_0 i} \\ \frac{M'N-MN'}{2K^2_0 i} & \frac{N'L-NL'}{2K^2_0 i} & \frac{L'M-LM'}{2K^2_0 i} \end{vmatrix},$$

dove $K^2_0 = F^2\omega^2_4 + G^2\omega^2_5 + H^2\omega^2_6$, si ha $K = K' = K_0$.

Ciò premesso, abbiamo dalle $(6)'_1$:

$$(18)\quad L=K(\alpha_1+\alpha'_1 i),\quad M=K(\beta+\beta'_1 i),\quad N=K(\gamma_1+\gamma'_1 i),$$

e siccome:

$$(19)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \cos\theta_1 \operatorname{sen}\psi_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + \cos\psi_1 \cos\varphi_1\,, \\ \beta_1 = \cos\theta_1 \operatorname{sen}\psi_1 \cos\varphi_1 - \cos\psi_1 \operatorname{sen}\varphi_1, \quad \gamma_1 = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\psi_1, \\ \alpha'_1 = \cos\theta_1 \cos\psi_1 \operatorname{sen}\varphi_1 - \operatorname{sen}\psi_1 \cos\varphi_1\,, \\ \beta'_1 = \cos\theta_1 \cos\psi_1 \cos\varphi_1 + \operatorname{sen}\psi_1 \operatorname{sen}\varphi_1\,, \quad \gamma'_1 = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\psi_1, \end{cases}$$

così sostituendo verrà:

$$(20)\quad \begin{aligned} L &= K(i\cos\theta_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + \cos\varphi_1)e^{-\psi_1 i}, \\ M &= K(i\cos\theta_1 \cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi_1)e^{-\psi_1 i}, \qquad N = Ki\operatorname{sen}\theta_1 e^{-\psi_1 i}. \end{aligned}$$

Dalle due prime equazioni si ricava:

$$L + Mi = K(1 - \cos\theta_1)e^{-(\varphi_1+\psi_1)i},$$

e quindi avendosi:

$$(21)\qquad e^{\psi_1 i} = \frac{Ki\operatorname{sen}\theta_1}{N}\,, \qquad e^{\varphi_1 i} = \frac{N}{L+Mi}\,\frac{1-\cos\theta_1}{i\operatorname{sen}\theta_1}\,,$$

φ_1 e ψ_1 saranno note, quando θ_1 sarà dato in funzione del tempo.

Ora dalle equazioni (20) si ha:

$$(22)\quad Lp+Mq=K[i\cos\theta_1(p\operatorname{sen}\varphi_1+q\cos\varphi_1)+(p\cos\varphi_1-q\operatorname{sen}\varphi_1)]e^{-\psi_1 i},$$

e se si pone:

$$p = \omega_4 + \omega_1\,, \qquad q = \omega_5 + \omega_2,$$

in virtù delle (14) si trova:

$$L(\omega_4+\omega_1) + M(\omega_5+\omega_2) = K\left[i\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1 \frac{d\psi_1}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt}\right] e^{-\psi_1 i},$$

e quindi:

$$\frac{L(\omega_4+\omega_1)+M(\omega_3+\omega_2)}{N^2}dt=\frac{(i\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_1 d\psi_1-d\theta_1)e^{\psi_1 i}}{-K\operatorname{sen}^2\theta_1}=$$

$$=-\frac{1}{K}d\left(\cot\theta_1 e^{\psi_1 i}\right)=-id\left(\frac{\cos\theta_1}{N}\right).$$

Integrando si ha finalmente:

$$\frac{\cos\theta_1}{N}=i\int\frac{L(\omega_4+\omega_1)+M(\omega_3+\omega_2)}{N^2}dt+\text{cost.} \tag{23}$$

Avuti così θ_1, ψ_1 e φ_1, i valori di θ_2, ψ_2 e φ_2 sono i coniugati dei primi.

La quantità sotto l'integrale (23) è eguale alla quantità variabile dell'integrale (16), cioè:

$$\frac{Lp+Mq}{L^2+M^2}dt,$$

e si poteva infatti prevedere *a priori*, che se questa quantità espressa coi coefficienti α_1, β_1, γ_1, α_2, ... è un differenziale esatto in una posizione speciale del tetraedro fisso, doveva essere anche un differenziale esatto in qualunque altra posizione di esso. Ed è questa osservazione, che ci è stata di guida, come vedesi dalla (22), all'integrale (23) (*).

La stessa osservazione ci può guidare a trovare direttamente i coefficienti delle due terne, senza dare alcuna posizione particolare al tetraedro fisso, ed anche senza far uso dei parametri di Eulero.

Siano l, l', l'' tre costanti arbitrarie, $K^2=l^2+l'^2+l''^2$ ed

$$\begin{cases}\alpha L+\beta M+\gamma N=l\,,\\ \alpha' L+\beta' M+\gamma' N=l'\,,\\ \alpha'' L+\beta'' M+\gamma'' N=l''\,,\end{cases} \tag{24}$$

(*) Questa osservazione mi è stata suggerita dal Prof. Siacci.

una qualunque delle terne (6). Dalle (24) ricaviamo:

$$\begin{gathered} L = l\alpha + l'\alpha' + l''\alpha'', \\ M = l\beta + l'\beta' + l''\beta'', \\ N = l\gamma + l'\gamma' + l''\gamma'', \\ L^2 + M^2 = K^2 - (l\gamma + l'\gamma' + l''\gamma'')^2, \\ Lp + Mq = l(\alpha p + \beta q) + l'(\alpha' p + \beta' q) + l''(\alpha'' p + \beta'' q), \end{gathered}$$

e per le (8),

$$\frac{Lp + Mq}{L^2 + M^2}\, dt = \frac{l(\gamma' d\gamma'' - \gamma'' d\gamma') + l'(\gamma'' d\gamma - \gamma d\gamma'') + l''(\gamma d\gamma' - \gamma' d\gamma)}{K^2 - (l\gamma + l'\gamma' + l''\gamma'')^2}.$$

Il secondo membro è un differenziale esatto, e si può anche riconoscere dalle condizioni d'integrabilità, posto $\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$, o anche meglio ponendo $\gamma = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi$, $\gamma' = \operatorname{sen}\theta \cos\psi$, $\gamma'' = \cos\theta$. Del resto l'integrale è questo:

$$\frac{1}{K} \operatorname{arctg} \frac{K^2\gamma - l(l\gamma + l'\gamma' + l''\gamma'')}{K(l'\gamma'' - l''\gamma')} = \int \frac{Lp + Mq}{L^2 + M^2}\, dt + \text{cost.}$$

e si verifica facilmente osservando che

$$\begin{gathered} K^2(l'\gamma'' - l''\gamma')^2 + [K^2\gamma - l(l\gamma + l'\gamma' + l''\gamma'')]^2 = \\ = (l'^2 + l''^2)[K^2 - (l\gamma + l'\gamma' + l''\gamma'')^2]. \end{gathered}$$

Da esso, posto $= z$ l'integrale del secondo membro, ed essendo c una costante arbitraria, si deduce:

$$\gamma = \frac{lN}{K^2} + \frac{\sqrt{l'^2 + l''^2}}{K^2} \sqrt{L^2 + M^2} \cos K(z + c).$$

Evidentemente gli altri otto coefficienti avranno espressioni simili a questa.

Noteremo da ultimo che le sei equazioni differenziali del Sig. Heath relative alle caratteristiche ω si possono raggruppare in due terne della forma:

$$\frac{dL}{dt} - Mr + Nq = 0\,,$$

$$\frac{dM}{dt} - Np + Lr = 0\,,$$

$$\frac{dN}{dt} - Lq + Mp = 0\,,$$

che si ottengono da quelle dell'Heath aggiungendo (o sottraendo) la prima, la seconda e la terza, rispettivamente alla quarta, alla quinta e alla sesta. Tra i coefficienti α, β, γ, α', ... presi tre a tre, hanno luogo equazioni della stessa forma, per es.:

$$\frac{d\alpha}{dt} - \beta r + \gamma q = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dt} - \gamma p + \alpha r = 0,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} - \alpha q + \beta p = 0.$$

Napoli, gennaio 1900.

L'Accademico Segretario
ANDREA NACCARI.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 4 Febbraio 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: Peyron, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Cipolla, Brusa, Pizzi e Renier Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'ultima adunanza.

Il Socio Cipolla legge un suo scritto: *Antichissimi aneddoti Novaliciensi,* che chiede sia inserito tra le *Memorie* accademiche. — Assentatosi il Socio Cipolla, la Classe, con votazione segreta, accoglie a voti unanimi per le *Memorie* lo scritto da lui presentato. Ne è dato il riassunto negli *Atti*.

Sunto di una Memoria intitolata: *Antichissimi aneddoti Novaliciensi*, del Socio Carlo Cipolla.

Il Socio Cipolla presenta una Memoria intitolata: *Antichissimi aneddoti Novaliciensi,* nella quale riproduce e studia due brandelli di un foglio pergamenaceo, appartenente al Monastero della Novalesa. Esso venne testè ritrovato all'Archivio di Stato di Torino, dove serviva a rafforzare la legatura di un antico manoscritto. Su questi brandelli si leggono varie note di mani differenti. Oltre ad un catalogo di persone, colla notazione dei contributi che ciascuna di esse doveva dare al Monastero, e oltre al sunto di due documenti d'altronde sconosciuti, vi si leggono due aneddoti di non piccolo rilievo. Uno di essi, in carattere del sec. X-XI, contiene l'inventario dei libri e degli apparamenti sacri dell'Abbazia. L'altro ci dà l'inizio di una vita leggendaria di Abbone, il fondatore del Monastero. Questa biografia, che probabilmente si può riguardare siccome una delle fonti del celebre *Chronicon Novaliciense,* è di mano presso a poco contemporanea a quella che scrisse gli inventari predetti.

Egli fa cenno anche di alcuni fogli cartacei scritti nel sec. XV-XVI, i quali ricoprivano la pergamena descritta. Essi sono stati staccati da una grammatica, nella quale si trovavano esempi di stile latino, e versioni dal piemontese in latino.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

VI. 1ª

I. 2ª

IV. 2ª

VIII. 2ª

Guidi

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXV, Disp. 7ª, 1899-900

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1900

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Febbraio 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Bizzozero, Direttore della Classe, D'Ovidio, Spezia, Camerano, Segre, Volterra, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona e Naccari Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale della precedente adunanza, che viene approvato.

Il Segretario dà comunicazione della lettera, con cui il prof. Haeckel ringraziò l'Accademia per il premio Bressa che gli venne aggiudicato.

Vengono presentati dal Segretario degli opuscoli inviati in dono dai Soci corrispondenti Penzig e Rosenbusch.

Vengono poi presentati ed accolti per l'inserzione negli *Atti* i seguenti scritti:

1° *Intorno ad alcuni recenti lavori italiani sulla costituzione fisica dell'atmosfera fondati sulle osservazioni di James Glaisher*, nota dell'Ing. Ottavio Zanotti Bianco, presentata dal Socio Jadanza,

2° *Un problema di geometria numerativa sulle varietà algebriche luoghi ∞' spazi*, nota del Dr. Alberto Tanturri, presentata dal Socio Segre,

3° *Sopra le corrispondenze* (p, p) *esistenti sulle curve di genere* p *a moduli generali,* nota del Dr. Gaetano Scorza, presentata dal Socio Segre,

4° *Sulle equazioni delle vibrazioni dei corpi elastici in coordinate curvilinee,* nota del prof. Orazio Tedone, presentata dal Socio Volterra,

5° *Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie,* nota del prof. Giuseppe Lauricella, presentata dal Socio Volterra,

6° *Un teorema di reciprocità sulle funzioni di Green d'ordine qualunque,* nota del Dr. Tommaso Boggio, presentata dal Socio Volterra.

Sono stati trasmessi alla Presidenza due scritti che verranno affidati all'esame di apposite Commissioni.

Il primo intitolato: *La scienza cosmologica di Dante,* è opera del prof. Pietro Gambèra.

L'altro è del marchese Antonio De Gregorio, ed è uno *Studio del Diospyros cydonites* De Greg.

La Classe quindi si costituisce in seduta privata e procede alla votazione per l'elezione di un Socio corrispondente nella Sezione di Fisica generale e sperimentale. Riesce eletto il signor Samuele Pierpont Langley Segretario della " Smithsonian Institution „ di Washington.

LETTURE

Intorno ad alcuni recenti lavori italiani sulla costituzione fisica dell'atmosfera, fondati sulle osservazioni di James Glaisher - Contribuzione alla storia della meteorologia.

Nota di OTTAVIO ZANOTTI BIANCO.

I.

Il meteorologo inglese James Glaisher compiva, negli anni 1862-63-64-65-66, una serie di ascensioni areostatiche, in una delle quali, assieme all'areonauta Coxwell, toccò l'altezza di 9000 metri; oltre la quale si spinse di poco il tedesco Berson arrivando, nel giorno 4 dicembre 1894, all'altitudine di 9150 metri. Esse costituiscono la serie di ascensioni più estesa, e forse la migliore di quante se ne posseggano oggidì, specialmente dal lato scientifico. Dalle osservazioni istituite durante quelle memorabili ascensioni risulta che la temperatura dell'atmosfera non decresce uniformemente coll'altezza, ma che il suo decrescimento si rallenta a misura che noi c'innalziamo sul livello del mare, ovvero, ciò che torna lo stesso, che per fare abbassare il termometro di un grado, occorre una differenza d'altezza progressivamente maggiore, a misura che si sale più in alto (*).

I risultati delle osservazioni di James Glaisher hanno dato luogo ad importanti studî sulla costituzione fisica dell'atmosfera. Scopo della presente nota è il rendere conto di alcuni di essi dovuti a scienziati italiani: in ciò fare seguiremo naturalmente l'ordine cronologico.

In esso ci si presenta per primo il conte Paolo Ballada

(*) *An Account of Meteorological and Physical Observations in ... balloon Ascents made at the request of the Comittee* by JAMES GLAISHER (" Reports of the British Association for the Advancement of Science ", for 1862, 1863, 1864, 1865, 1866).

di Saint-Robert (*). Egli parte dalla seguente tabella di Glaisher, che riassume i risultati delle osservazioni istituite durante le otto ascensioni del 1862. Noi riproduciamo qui questa tabella perchè servì di base non solo agli studî di Saint-Robert, ma anche a quelli del colonnello Francesco Siacci, matematico esimio, dei quali dovremo discorrere a lungo in seguito (V. Tabella I).

In una sua prima memoria, Saint-Robert rappresentò i risultati delle prime otto ascensioni di Glaisher, delle sole quali egli si servì, colla formola

$$x = a\,(t_0 - t) - b\,(t_0^2 - t^2),$$

in cui t_0 e t sono le temperature assolute alle estremità dell'altezza x, a e b due costanti diverse per il cielo coperto e per il cielo chiaro in parte, e che egli determinò approssimativamente con un diagramma rappresentante le osservazioni di Glaisher. Per tener conto di future esperienze egli scrisse poi quella legge di decrescimento della temperatura così:

$$x = a\,(t_0 - t) - b\,(t_0^2 - t^2) + c\,(t_0^3 - t^3) + \text{etc.},$$

e di questa si valse per dedurre una formola barometrica.

Nel 1864 Glaisher pubblicò, nei Rendiconti delle adunanze della Società Britannica per l'avanzamento delle scienze, una nuova tabella contenente i risultati medi generali delle sue osservazioni istituite negli anni 1862, 63, 64, durante le ventidue ascensioni areostatiche da lui compiute in quel lasso di tempo. Questa tabella si riferisce al cielo coperto ed al cielo sereno: è curioso che di essa non si trovi menzione nè nei lavori di Saint-Robert, da lui medesimo raccolti nel 1874, nè nel Libro

(*) Conte Paolo Ballada di Saint-Robert, nato a Verzuolo (Piemonte) nel 1815, morto a Torino il 21 novembre 1888. Le sue memorie sulla livellazione barometrica, rifrazione atmosferica e costituzione fisica dell'atmosfera, sono contenute nel " Philosophical Magazine ", vol. 27, Londra 1864; in " Les Mondes, Revue hebdomadaire par M. l'Abbé Moigno ", tom. 6, Paris 1864; negli " Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino ", vol. II, dicembre 1866, vol. III, novembre 1867, e nelle " Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino ", serie II, tomo XXV. Questi lavori si trovano pure raccolti in un volume, che è il terzo dei *Mémoires Scientifiques* del Saint-Robert stesso. Torino, Bona, 1874.

TABELLA I, che Siacci chiama **Tabella Glaisher.**

Altezza calcolata colla formola di Laplace x	CIELO CHIARO IN PARTE		CIELO COPERTO	
	Perdita di temperatura $t_0 - t$	Umidità relativa dell'aria	Perdita di temperatura $t_0 - t$	Umidità relativa dell'aria
piedi (*)	gradi Fahr. (*)	centesimi	gradi Fahr.	centesimi
0	0	63	0	77
1000	7,2	68	4,5	77
2000	12,5	77	8,7	77
3000	17,1	76	12,8	80
4000	20,5	76	16,5	80
5000	23,2	69	19,6	83
6000	26,0	68		
7000	28,8	64		
8000	31,5	58		
9000	34,1	52		
10000	36,7	52		
11000	39,3	48		
12000	41,9	48		
13000	44,4	43		
14000	46,6	58		
15000	48,7	53		
16000	50,8	45		
17000	52,7	33		
18000	54,5	21		
19000	56,3	36		
20000	57,8	33		
21000	59,1	32		
22000	61,4	21		
23000	62,4	16		
24000	63,7			
25000	64,8			
26000	65,8			
27000	66,8			
28000	67,7			
29000	68,5			
30000	70,0			

(*) Un piede inglese equivale a m. 0,3048. Un grado Fahr. equivale a $^5/_9$ di grado centigrado.

di Grassi sulla livellazione barometrica, stampato nel 1876, nè nei recentissimi lavori di Siacci. Questa tabella del 1864 è completa per la perdita di temperatura fino a 30000 piedi inglesi (metri 9144) e per l'umidità relativa fino a 23000 piedi (m. 7010). Essa rivela un andamento molto più lento di quello che appare nella prima tabella, tanto nella perdita di temperatura quanto nell'umidità relativa.

È evidente che i risultati di Saint-Robert e Siacci sarebbero stati assai diversi, se essi si fossero serviti della tabella del 1864, tanto più completa di quella da essi impiegata, essendo il risultato di ben quindici ascensioni, anzi che di sette solamente quale è quella del 1862. La tabella 1864 di Glaisher fu riprodotta (con qualche leggiera inesattezza) da Enrico Hartl, in una recensione dei lavori di Saint-Robert pubblicata nella *Zeitschrift der Oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie*, XII. Band, 1877.

A proposito della tabella I (1862) da noi riprodotta, Siacci scrive quanto segue (*):

" In questa tabella mancano le temperature e le pressioni alle varie altezze, ossia mancano la temperatura e la pressione iniziali, colle quali le temperature e le pressioni successive si ricostituiscono facilmente. Noi adotteremo la pressione iniziale di 30 pollici inglesi, e la temperatura iniziale di 526°,2 Fahrenheit, assunte dal Saint-Robert.

" La pressione di 30 pollici corrisponde quasi esattamente alla pressione normale di 0,76 m., e la temperatura di 526°,2 è stata stabilita molto probabilmente dal Saint-Robert in questo modo. Siccome nella massima ascensione la minima temperatura osservata da Glaisher fu di — 5° Fahr. aggiungendo a questa la massima perdita notata nella tabella, cioè 70°, si ha per temperatura iniziale 65° Fahr. La temperatura del ghiaccio fondente è 32 Fahr. e quindi la temperatura iniziale è di 33° superiore

(*) *Sulla costituzione atmosferica quale risulta dalle osservazioni aereostatiche di James Glaisher e sopra una nuova formola barometrica* (" Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli ", Serie II, Vol. VIII, N° 11). Di questa importante memoria fu fatta un'ampia recensione nel fascicolo pel febbraio 1898 della " Meteorologische Zeitschrift ", e nella " Rivista di Topografia e Catasto " (Torino), Vol. X.

a quella del ghiaccio fondente. Aggiungendo a 33° la temperatura assoluta del ghiaccio fondente cioè 493°,2, risulta per temperatura assoluta iniziale 526°,2 „.

Dopo la tabella di Glaisher, Saint-Robert scrive quanto segue.

“ Afin d'éviter un cercle vicieux, on doit écarter les hauteurs calculées par la formule de Laplace, laquelle est fondée sur une loi du décroissement de la chaleur en contradiction avec les observations de M. Glaisher, et il faut trouver la pression qui correspond à chaque température et à chaque état d'humidité. A cet effet, il faut faire l'opération inverse de celle qu'a employée M. Glaisher pour calculer les hauteurs. L'altitude z étant connue, la pression qui y correspond est donnée par la formule

$$\log \frac{p}{p_0} = -\frac{z}{60159\left(1+\frac{\theta+\theta'-64}{900}\right)} \qquad (1)$$

où θ et θ' désignent les températures du thermomètre Fahrenheit.

“ En opérant de la sorte, nous avons obtenu le tableau suivant, qui présente les températures, les pressions et les densités rapportées aux éléments analogues au niveau de la mer, pris pour unité de chaque espèce (V. Tabella II).

“ Pour calculer la première et la deuxième colonne, on a supposé qu'au niveau de la mer on eût

$$t_0 = 526°,2,\ p_0 = 30 \text{ pouces.}$$

La troisième colonne a été calculée au moyen des tables de M. Regnault de la force élastique de la vapeur. La quatrième a été calculée au moyen de l'équation

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{t_0}{t}\left(\frac{p - m\omega}{p_0 - m\omega_0}\right),\ (*) \qquad (2)$$

$1 - m$ étant le rapport de la densité de la vapeur à la densité

(*) p e p_0 sono le pressioni dell'aria, t_0 e t (θ' e θ Fahr.) corrispondenti alla densità ρ_0 e ρ.

Tabella II, che Siacci chiama: **Tabella Glai**

CIELO CHIARO IN PARTE					
Temperatura	Pressione	Pressione del vapore	Densità dell'aria	Altezza calcolata colle qua	
				Senza riguardo alla variazione della gravità	Con alla v della
$\frac{t}{t_0}$	$\frac{p}{p_0}$	pollici	$\frac{\rho}{\rho_0}$	piedi x	p
1,0000	1,0000	0,39	1,0000	0	
0,9863	0,9648	0,33	0,9788	1002	1
0,9763	0,9305	0,30	0,9540	2001	2
0,9675	0,8971	0,25	0,9286	3000	3
0,9610	0,8648	0,22	0,9013	3994	3
0,9559	0,8335	0,18	0,8738	4987	4
0,9506	0,8032	0,16	0,8469	5978	5
0,9453	0,7737	0,14	0,8206	6974	6
0,9401	0,7453	0,11	0,7951	7964	7
0,9352	0,7177	0,09	0,7700	8957	8
0,9303	0,6911	0,08	0,7454	9945	9
0,9253	0,6652	0,07	0,7215	10939	10
0,9204	0,6402	0,06	0,6982	11931	11
0,9156	0,6161	0,05	0,6754	12919	12
0,9114	0,5928	0,06	0,6527	13907	13
0,9074	0,5703	0,05	0,6309	14894	14
0,9035	0,5486	0,04	0,6096	15879	15
0,8997	0,5277	0,03	0,5890	16861	16
0,8964	0,5076	0,015	0,5688	17839	17
0,8930	0,4879	0,02	0,5487	18832	18
0,8902	0,4694	0,02	0,5296	19798	19
0,8877	0,4515	0,02	0,5108	20767	20
0,8833	0,4338	0,01	0,4934	21760	21
0,8814	0,4172	0,008	0,4756	22725	22
0,8789	0,4011		0,4586	23696	23
0,8769	0,3857		0,4420	24659	24
0,8750	0,3709		0,4260	25619	25
0,8731	0,3566		0,4105	26582	26
0,8713	0,3429		0,3954	27539	27
0,8698	0,3297		0,3809	28497	28
0,8670	0,3167		0,3671	29476	29

…nt-Robert.

CIELO COPERTO					
…eratura	Pressione	Pressione del vapore	Densità dell'aria	Altezza calcolata colle quadrature — Senza riguardo alla variazione della gravità	Altezza calcolata colle quadrature — Con riguardo alla variazione della gravità
t	$\frac{p}{p_0}$	pollici	$\frac{\rho}{\rho_0}$	piedi x	piedi z
…00	1,000	0,48	1,000	0	0
…014	0,9649	0,41	0,9739	1002	1002
…35	0,9308	0,35	0,9476	2002	2002
…57	0,8976	0,31	0,9215	3003	3003
…86	0,8653	0,27	0,8952	4005	4006
…28	0,8341	0,25	0,8683	5002	5003

de l'air à la même température et à la même pression $\left(\text{selon Gay Lussac } m = \frac{3}{8}\right)$; et la cinquième au moyen de l'équation

$$x = h \int_p^{p_0} \frac{\rho_6}{\rho} d\left(\frac{p}{p_0}\right). \tag{3}$$

La sixième donne la valeur de $r_0 - r$ ou de l'altitude lorsqu'on n'a pas égard à la variation de la gravité „.

È curioso che l'intestazione della sesta colonna è “ En ayant égard à la variation de la pesanteur „, e contiene dati calcolati appunto in quella condizione, e come fece vedere Siacci secondo la formola

$$z = \frac{x}{l - \frac{x}{R}} \quad (R = 20888780 \text{ piedi}).$$

Saint-Robert continua così:

“ La hauteur d'une atmosphère homogène, à la température de la glace fondante, sous la pression de 30 pouces de mercure, a été supposée de 26254 pieds; de sorte qu'à la température absolue t_0, sous la pression p_0, et avec un mélange de vapeur à la pression ω_0, la hauteur sera

$$h = 26254 \frac{t_0 p_0}{493{,}2 (p_0 - m\omega_0)} \text{ „}.$$

Per il cielo sereno in parte risulta dai dati $h = 28148$; per il cielo coperto $h = 28180$. Con questi valori di h furono calcolate la colonna quinta e sesta della tabella II.

Saint-Robert deduce dalla tavola II che *in complesso* (*en somme*) le densità crescono quasi uniformemente al crescere dell'altezza. Per rappresentarle egli propone la formola

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - ax, \tag{A}$$

nella quale x è l'altezza ed $a = 0{,}00002266$ un coefficiente determinato col metodo dei minimi quadrati.

Saint-Robert pensava che agli scopi che egli si prefiggeva,

della livellazione barometrica cioè e della rifrazione terrestre, la legge della semplice proporzionalità adottata anche da Laplace nella determinazione della rifrazione terrestre bastava, essendo essa sensibilmente esatta dal livello del mare fino all'altezza di 30000 piedi. Egli ben vide le conseguenze fisicamente impossibili della sua legge e così si espresse al riguardo:

" Il s'ensuit que l'équilibre de la couche extrême ne saurait exister. Mais nous ne devons pas perdre de vue que, pour notre but de déterminer des hauteurs et des réfractions, il suffit que la loi adoptée représente la constitution de l'atmosphère dans la première enveloppe d'air près de la surface terrestre; et qu'il est inutile considérer les couches plus élevées qui n'ont aucune action sensible sur les quantités qu'il s'agit de déterminer ".

Con ciò resta bene assodato che il Saint-Robert ben conosceva le conseguenze cui conduceva la sua legge, accennate poi anche dal colonnello Siacci.

Il nostro autore dimostra poi che anche la formola di Laplace, estesa fino al limite dell'atmosfera, conduce a conclusioni tanto errate quanto la sua.

In quell'occasione avvertendo, come l'equilibrio dell'atmosfera esiga che la densità dell'aria vada diminuendo dal basso all'alto, dimostra che onde ciò si verifichi è necessario che il decrescimento della temperatura sia più lento di 1° ogni $29^{m},172$ d'innalzamento.

La legge che regola l'andamento della temperatura nell'ipotesi della variazione della densità data dalla formola risulta al Saint-Robert la seguente:

$$\frac{t}{t_0} = \frac{2h - 2x + ax^2}{2h(1 - ax)}. \qquad (B)$$

Evidentemente questa formola diviene infinita per $x = \frac{1}{a}$ cioè a 44131 piedi d'altezza pari a 13451 metri.

Dalla formola (B) e nei limiti ad essa assegnati dal suo autore si deduce che l'altezza della quale occorre innalzarsi affinchè la temperatura si abbassi di un grado cresce a misura che l'elevazione sul mare aumenta, come deve verificarsi conformemente alle osservazioni di Glaisher.

Per $x = \frac{1}{a}$, come notò il Saint-Robert, la densità è nulla, mentre la pressione è 0,2161 il che è fisicamente impossibile, cioè, come egli ripete, la sua formola non vale oltre i limiti assegnati da lui stesso.

II.

Il Saint-Robert, dopo aver studiato come vedemmo la costituzione fisica dell'atmosfera, viene ad occuparsi della rifrazione atmosferica. Egli dopo aver osservato con Biot che la rifrazione dipende essenzialmente dalla costituzione degli strati bassi dell'atmosfera, e per nulla da quella del resto dell'atmosfera e dopo aver svolte alcune considerazioni al riguardo così scrive:

" La conséquence à tirer de tout ce raisonnement, c'est que, quant à la réfraction astronomique, il suffit de connaître la constitution d'une enveloppe d'air d'une épaisseur comparativement petite. Les observations de M. Glaisher nous fournissent cette connaissance jusqu'à 30000 pieds, ce qui est bien suffisant pour notre but. Quant aux réfractions terrestres, on n'a jamais à observer des objets terrestres au delà des couches aériennes que M. Glaisher a explorées. Donc nous possédons des données suffisantes pour calculer les deux réfractions ".

Il nostro autore poi adottando l'opinione di Laplace, confermata sperimentalmente da Biot ed Arago, che l'effetto dell'umidità dell'aria sulla rifrazione è assai poco sensibile, conchiude che quanto al potere rifrangente dell'aria, si può sostituire l'aria secca all'aria umida alla medesima temperatura e pressione.

Su questo principio egli calcola una tavola dei decrescimenti della densità dell'aria, ritenuta secca, a varie altezze, da sostituirsi, quando si tratti degli effetti ottici dell'aria, a quella data prima. Da questa egli deduce, col metodo dei minimi quadrati un rapporto di decrescimento

$$a = 0{,}00002276,$$

invece di quello $a = 0{,}00002266$ trovato prima. Questi valori sono riferiti al piede inglese come unità di lunghezza, se invece per questa si addotta il metro, si ha per l'aria umida

$$a = 0{,}00007435,$$

come trovò il colonnello Hartl (*). Nel calcolare una sua tavola ipsometrica speditiva, Saint-Robert ha posto $a = 0{,}00008$, quando l'unità di lunghezza adoperata sia il metro. Nello studiare poi l'ipotesi sulla rifrazione adottata in geodesia, che cioè la rifrazione è proporzionale all'angolo formato al centro della terra dalle verticali dei due luoghi che si considerano, Saint-Robert ne dedusse $a = 0{,}00002275$, riferito a piedi inglesi.

Il colonnello Hartl in una sua recensione dei lavori di Saint-Robert, nel 1877, ebbe a dimostrare che la legge di questi sul decrescimento della densità non si adatta troppo alle osservazioni di Glaisher. Ma giova notare che a questo proposito Saint-Robert stesso scriveva quanto segue:

" En jetant les yeux sur la table III (quella delle densità), on voit que la loi de décroissement uniforme s'approche beaucoup de la loi réelle de décroissement. A la vérité, la diminution de densité est plus lente, à mesure qu'on monte; mais la loi de décroissement uniforme est sensiblement exacte depuis le niveau de la mer jusqu'à la hauteur de 30000 pieds; tandis que l'hypothèse de Bessel diffère encore plus de l'observation directe ".

Il conte Paolo di Saint-Robert applica poi la sua legge di densità alla formola barometrica ed alla rifrazione atmosferica: ma di ciò non è nostra intenzione il discorrere qui.

La legge di densità di Saint-Robert con $a = 0{,}00008$ fu adottata dal prof. Guido Grassi, attualmente professore di elettrotecnica nel R. Museo Industriale Italiano in Torino, nel suo saggio *Sulla misura delle altezze mediante il barometro* (Milano, Hoepli, 1876). In questo pregevole libro si hanno alcune note sull'equilibrio, temperatura e costituzione fisica dell'aria. Quest'ultima è studiata teoricamente dal punto di vista della teoria cinetica dei gas, con riguardo alla determinazione dell'altezza dell'atmosfera.

È bene rammentare qui il nome del genovese Balliani che nel 1630, intravedeva pel primo il peso dell'aria, e ne scriveva

(*) *Siacci's Formeln zur Darstellung der Resultate der Ballonfahrten Glaisher's* (" Meteorologische Zeitschrift ", 1898, p. 47).

a Galileo preparando e compiendo quasi quella famosa esperienza, per la quale levossi in tanto grido Torricelli (*).

Avendo accennato a speculazioni sull'altezza dell'atmosfera, è bene non dimenticare quelle dell'illustre Giovanni Schiaparelli. Questo insigne astronomo, dai fenomeni delle stelle cadenti è condotto ad ammettere che il limite superiore della nostra atmosfera si trovi oltre i 200 chilometri sul livello del mare. Opinione che egli trova confermata dalle ricerche di Liais, e dalle determinazioni istituite in America dell'altezza delle aurore boreali (**).

III.

Nella sua memoria già citata, Siacci, come si disse, parte dalle osservazioni di Glaisher, che egli riporta nella tabella originale di Glaisher medesimo, ed in quella modificata di Saint-Robert. Questa tabella fu ridotta ad essere espressa in gradi centesimali ed in misure metriche dal colonnello Hartl, nella recensione della memoria di Siacci già menzionata; ma soltanto *per il cielo coperto in parte.*

Siacci espone il contenuto e lo scopo della sua memoria, per quanto riguarda la costituzione fisica dell'atmosfera nei paragrafi seguenti, che costituiscono come l'introduzione alla parte seconda del lavoro che stiamo esaminando, oltre la quale noi non ci spingeremo, giacchè non intendiamo qui occuparci di formole di ipsometria barometrica.

" In questa memoria noi diamo due formole che legano le temperature e le tensioni del vapore, colle altitudini e colle pressioni, e che riproducono con grande esattezza le osservazioni di Glaisher. La principale è, naturalmente, quella delle temperature. Se si definisce *velocità di raffreddamento* il decremento di temperatura diviso per il corrispondente incremento dell'altezza, e si definisce *accelerazione di raffreddamento* il decremento

(*) Zanotti Bianco Ottavio, *Sulla livellazione barometrica,* 1874. — Govi Gilberto, *Intorno al primo scopritore della pressione atmosferica,* " Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino ", Vol. II, p. 562.

(**) Schiaparelli, *Entwurf einer Astronomischen Theorie der Sternschnuppen.* Stettin 1871.

di cotesta velocità diviso anche per il corrispondente incremento dell'altezza, la legge che deriva dalle osservazioni di Glaisher può enunciarsi così: *l'accelerazione di raffreddamento è uguale a 11 volte il quadrato della velocità, diviso per la temperatura assoluta*. Cotesto numero 11 probabilmente è proprio delle verticali di Glaisher, ma credo che se si generalizza dicendo, che l'accelerazione di raffreddamento è proporzionale al quadrato della velocità diviso per la temperatura assoluta, la legge possa applicarsi ad ogni verticale; ed il coefficiente di proporzionalità sarà positivo, se, come dalle osservazioni di Glaisher, la temperatura decresce meno rapidamente che non crescano le altezze.

" La formola del vapore corrisponde al seguente enunciato: *la tensione del vapore a qualunque altezza è proporzionale alla potenza* $4+\frac{1}{3}$ *della pressione dell'aria*, enunciato che combina perfettamente colle osservazioni di Glaisher.

" Quando si possederanno molte serie d'osservazioni comparabili, per accuratezza d'osservatori e per eccellenza d'istrumenti, alla serie di Glaisher, solo allora si potrà asserire se tali leggi valgano o no per tutte le verticali. Probabilmente non le leggi, ossia le formole, ma i soli numeri 11 e $4+\frac{1}{3}$ (che diremo in seguito *esponenti di raffreddamento e di umidità*) subiranno, secondo le diverse verticali, qualche cambiamento ".

Nel § 2: *Formole fondamentali*, il problema è così posto.

" Le formole fondamentali sono:

$$(1) \qquad \rho = \frac{p - m\omega}{ct}, \quad (II)\ dp = -g\rho dr,$$

ove ρ è la densità dell'aria, t la temperatura assoluta, p la pressione atmosferica, ω la tensione del vapore, $m = \frac{3}{8}$, g la gravità, r la distanza del punto considerato dal centro della terra, e c è un coefficiente costante che, dinotando τ la temperatura assoluta del ghiaccio fondente, è dato, secondo le più recenti determinazioni, in misure metriche da

$$(1) \qquad c\tau = \frac{(0,76)\,(13595,8)}{1,293052}\, G = (7991,02) \times (9,80604)\ (*).$$

(*) Nel coefficiente di G i numeri 13595,8 ed 1,293052 sono i pesi specifici del mercurio e dell'aria a 0° sotto la pressione di 0,76 m. — (*Tables météorologiques*, Paris 1890, p. 37 *A*).

In essa G è la gravità a 45° di latitudine ed al livello del mare. Sia $R = 6366786\, m$ il raggio terrestre alla latitudine di 45°. g_0 e g, le gravità sulla verticale della latitudine λ ed alle distanze r_0 ed r dal centro della terra pongo

$$\frac{r_0}{r}(r - r_0) = x, r - r_0 = z\ „.$$

A questo riguardo Siacci scrive: “ Notiamo che la vera altitudine è z se la stazione inferiore è al livello del mare, ed è $z + a$ se a è l'altitudine della stazione inferiore; x è alquanto minore di z, ma ne differisce ben poco, se z non è molto grande. A scanso d'equivoci noi riserviamo la parola *altitudine* esclusivamente ad $a + z$; e designamo la x colla parola *altezza* „.

Con queste notazioni si ottiene facilmente

$$dp = - g_0\, \rho\, dx.$$

Al § 3. *Nuove formole. Formola della temperatura.* Siacci così incomincia: “ Per determinare la costituzione atmosferica le formole (I) e (II) non sono sufficienti; occorrono, come si disse, due altre formole che esprimano la legge della temperatura e la legge della pressione del vapore. Noi proponiamo le seguenti:

$$\text{(III)} \qquad \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{n}{t}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2, \qquad \text{(IV)} \quad \frac{\omega}{p^{\mu+1}} = \text{cost.},$$

le quali con $n = 11$, e $\mu + 1 = 4 + \frac{1}{3}$ corrispondono agli enunciati dati in principio (*), e verificano, come vedremo, le osservazioni di Glaisher „.

Giova avvertire che Siacci *propone* le sue due equazioni, e fa vedere che con esse si soddisfa alle osservazioni di Glaisher, ma non espone i criteri e le ragioni che lo indussero a tale

(*) Infatti, per definizione, la velocità e l'accelerazione di raffreddamento sono date da: $-\frac{dt}{dx}$ e $\frac{d^2t}{dx^2}$.

Notiamo anche che la (III) equivale a questa:

$$\frac{d^2t}{\left(d\frac{1}{r}\right)^2} = \frac{n}{t}\left(\frac{dt}{d\frac{1}{r}}\right)^2.$$

proposta. Qui crediamo pregio dell'opera il trascrivere parte dell'introduzione del lavoro di Siacci.

" Se si considera l'atmosfera come un fluido in equilibrio, la pressione, la temperatura, l'umidità e la densità dell'aria lungo una verticale qualunque sono funzioni dell'altitudine. Le quattro prime quantità sono legate da un'equazione ben nota, ed è pur nota l'equazione differenziale dell'equilibrio. A determinare pertanto la costituzione atmosferica, anche limitata ad una data verticale, occorrono due altre equazioni.

" Mutando la verticale varieranno in generale anche queste due equazioni suppletive, ma è assai probabile, se non certo, che la loro forma non muti, come non muta per esempio la forma dell'equazione del moto dei pianeti, passando da un pianeta all'altro, sebbene varino le costanti arbitrarie. Nel caso di una verticale atmosferica, le costanti arbitrarie dipenderanno dalle condizioni fisiche della superficie terrestre al piede della verticale stessa, onde immaginando differenziate quante volte occorre le due equazioni suppletive per una data verticale, esse perderanno le costanti arbitrarie, e varranno allora per qualunque altra verticale. Tali equazioni differenziali, insieme alle due note, accennate in principio, rappresenteranno la costituzione generale dell'atmosfera.

" Ma per giungere a tale risultato occorrono osservazioni molte e sopratutto accurate, su molte verticali, alle più grandi altezze possibili, mentre le osservazioni che possediamo sono ancora ben lontane dalla quantità e specialmente dalla qualità necessaria. Possono tuttavia avviare alla formazione delle suddette equazioni differenziali le osservazioni fatte da Glaisher in otto ascensioni areostatiche, in una delle quali raggiunse l'altezza di circa 29000 piedi (circa 9000 metri) „.

Dall'equazione (III) con due integrazioni successive si ricava

$$t = t_0 \left\{ 1 + \frac{n-1}{k} \left(\frac{g_0}{ct_0} \right) \left(\frac{t_0}{\tau} \right) x^n \right\}^{-\frac{1}{n-1}} = \frac{526,2}{(1 + 0,00011x)^{\frac{1}{10}}}.$$

In questa c è la stessa costante dell'equazione (I). " La quantità k è una costante, il cui valore può variare da luogo a luogo, e può anche variare da un'epoca all'altra per le stesse

cause che fanno variare da un'epoca all'altra la temperatura, la pressione e l'umidità in un medesimo luogo „. In altre parole k è una funzione, variabile col tempo, colla latitudine, e forse coll'altezza, ma che si ammette costante, nell'ignoranza in cui si è della sua legge di variazione.

Per riprodurre le osservazioni di Glaisher, Siacci pone $k = 6{,}6$. Egli poi da una tabella nella quale sono registrati i valori di $t_0 - t$, perdite di temperatura, ottenute colla sua formola, con quella da noi già data di Saint-Robert, e con quella di Laplace $t = \sqrt{t_0^2 - \alpha x}$; in questa α è una costante, della quale Laplace non ha dato il valore, perchè si elimina nella sua formola barometrica. Siacci determinò α colla condizione che verifichi la temperatura iniziale $t_0 = 526{,}2$ e la temperatura $t = 526{,}2 - 70$ che compete ad $x = 29476$, che è il massimo valore di x nella tabella Glaisher-Saint-Robert. Così egli ottenne $t = \sqrt{t_0^2 - 2{,}3016\,x}$. È chiaro che α è anche essa variabile a seconda della serie d'osservazioni che si addotta per determinarla. La tabella dello Siacci fu da lui riprodotta con tre diagrammi in una tavola che accompagna la sua memoria, assieme ad un'altra sulla quale stanno disegnate dei diagrammi relativi alla densità dell'aria, ed alla tensione del vapore. Circa la sua formola per la temperatura, Siacci scrive quanto segue: " L'accordo della formola proposta colle osservazioni è quasi perfetto al disopra di 5000 piedi: i segni delle differenze si alternano più volte, o la differenza massima è di $1^\circ{,}2$ $\left(\frac{2}{3}\right.$ di grado centesimale$\left.\right)$ a 28497 piedi (8686 m.). Al disotto di 5000 piedi, dove la temperatura è perturbata dalle circostanze locali, le differenze sono alquanto più forti, ma sono di segno contrario. pel cielo in parte chiaro e pel cielo coperto.

La formola di Siacci espressa in gradi centigradi ed in metri è

$$t = \frac{292{,}33}{\left\{1 + 0{,}0003615x\right\}^{1/10}}.$$

Per la tensione del vapore Siacci si serve della formola

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{4+\frac{1}{3}}.$$

E con essa calcola una tabella nella quale sono notate le pressioni ω in pollici, provenienti da questa formola in confronto di quelle osservate, e notate nella tabella Glaisher-Saint-Robert, ed in confronto di quelle provenienti da altre formole „.

Queste altre formole sono quelle di Saint-Robert e Ruhlmann. Secondo Siacci la formola di Saint-Robert sarebbe $\omega = \frac{p}{75}$. Saint-Robert non la diede esplicitamente, ma al luogo citato da Siacci scrive (*):

“ Lorsque le degré d'humidité aux deux stations n'est pas connu, on peut employer la formule très simple

$$x = A \frac{H_0 - H}{\frac{H_0}{t_0} + \frac{H}{t}},$$

en augmentant quelque peu la constante A pour y comprendre la correction due à l'effet de l'humidité. Un accroissement de $\frac{1}{200}$ correspond à une force élastique de la vapeur aux deux stations de $\frac{1}{75}$ des pressions atmosphériques respectives „. H_0 ed H sono le due altezze del barometro ridotte alla temperatura del ghiaccio fondente, nelle due stazioni.

Le differenze che risultano tra le osservazioni e la formola di Siacci non ammontano che a 3 centesimi di pollice all'altezza di 5002 piedi col cielo coperto; col cielo in parte chiaro la differenza massima è di 2 centesimi di pollice: differenze ben piccole, un centesimo di pollice essendo eguale ad un quarto di millimetro. Siacci fa ancora notare che quantunque la sua formola discordi da quella ben nota di Hann per altitudini piuttosto considerevoli, essa fornisce risultati quasi esattamente coincidenti con quelli dati dalla formola di Hann, quando si ponga $\mu + 1 = 3$, cioè prendendo la tensione del vapore proporzionale al cubo della pressione atmosferica.

Per la relazione tra la pressione e la temperatura, Siacci dà la formola

$$\log \frac{p_0 + m'\omega_0}{p + m'\omega} = \frac{k}{nM} \left\{ \left(\frac{\tau}{t}\right)^n - \left(\frac{\tau}{t_0}\right)^n \right\},$$

(*) *Mémoires scientifiques*, vol. III, p. 195.

in cui

$$M = \frac{1}{\log e} = 2.302585\,; \quad m' = \frac{m}{\mu} = \frac{9}{80} = 0{,}1125,$$

$p_0 = 30$ pollici, $\omega_0 = 0{,}39$, $\tau = 493{,}2$, $n = 11$, $k = 6{,}6\ e\frac{ct_0}{g_0} = 28011$,

in cui g_0 è la gravità ad una latitudine λ, ed all'altezza $r_0 - R$ sulla superficie terrestre ed è $g_0 = G(1 - 0{,}0026 \cos 2\lambda)\left(\frac{R}{r_0}\right)^2$ ed $R = 6366786\,m = 20888780$ piedi è il raggio della Terra a 45° di latitudine.

Per la densità poi la formola di Siacci è la seguente, coi dati numerici già trascritti:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{t_0}{t} 10^{-L} \left\{ 1{,}00634 - (0{,}00634) 10^{-\frac{10L}{3}} \right\}$$

nella quale

$$L = 0{,}1278 \left\{ \left(\frac{t_0}{t}\right)^{11} - 1 \right\} \quad \text{e} \quad \frac{t_0}{t} = (1 + 0{,}00011x)^{\frac{1}{10}}.$$

Nelle quali le temperature sono assolute in gradi Fahrenheit e le lunghezze in piedi. Il signor Hartl le ha ridotte ad essere espresse in metri e gradi centesimali così:

$$\frac{t_0}{t} = (1 + 0{,}0003614x)^{\frac{1}{10}}, \quad L = 0{,}1229 \left\{ \left(\frac{t_0}{t}\right)^{11} - 1 \right\}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{t_0}{t} . 10^{-L} \left\{ 1{,}00634 - 0{,}00634 . 10^{-\frac{10}{3}L} \right\}.$$

È facile il vedere come diviene complicata la legge della variazione della densità in funzione dell'altezza solamente. Una tabella e dei diagrammi attestano che la nuova formola fornisce delle densità che camminano assai bene d'accordo con quelle osservate.

Il resto della memoria di Siacci è dedicato a stabilire una formola d'ipsometria barometrica, in base alla costituzione fisica dell'atmosfera, da lui proposta; ma dell'ipsometria già lo dicemmo non è nostro intendimento l'occuparci ora.

Siccome anche recentemente fu detto delle ascensioni di James Glaisher, come avvenute fra il 1850 ed il 1870 così giova avvertire che il *Catalogue of Scientific Papers Compiled by the Royal Society of London*, e che col supplemento stampato nel 1894 giunge fino al 1883, non ha cenno di scritti di Glaisher se non di quelli relativi ad ascensioni eseguite tra il 1862 ed il 1866, le relazioni delle quali sono stampate nei *Reports of the Meetings of the British Association for the Advancement of Science* per i detti anni. Mendelejeff che ha dedotto dalle osservazioni di James Glaisher una legge di decrescimento della temperatura coll'altezza, così scrive (*):

" On ne peut donc pas déduire une moyenne générale des différences obtenues dans les ascensions qui ont été exécutées dans des conditions très variables de température au niveau du sol; or, plus la température des couches d'air qui rasent le sol est élevée, plus la diversité des températures correspondantes à la même élévation au dessus de la terre est considérable. D'ailleurs les plus grandes hauteurs auxquelles M. Glaisher est parvenu dans ses nombreuses ascensions diffèrent beaucoup entre elles, et la moyenne des différences obtenues lors de ces ascensions sera, pour les couches inférieures, le véritable résumé de toutes les observations, tandis que pour les régions élevées cette moyenne ne pourra se rapporter qu'à quelques-unes des données expérimentales, ce qui fait qu'elle ne différera que davantage de sa valeur réelle.

" Il est donc impossible de se baser sur les moyennes obtenues par M. Glaisher. Elles ont le mérite d'être d'excellentes données démonstratives, mais n'ont point celui d'offrir un résumé numérique des faits observés ".

La legge di Mendelejeff che lega la temperatura alla pressione è la seguente

$$t = a + bp \quad \text{in cui} \quad a = -36^\circ\text{C} \quad \text{e} \quad b = (t_0 + 36^\circ)\frac{1}{p_0},$$

t_0 e p_0 essendo la temperatura e la pressione presso terra. Osservazioni posteriori fanno ritenere che il valore assoluto di a

(*) *De la température des couches supérieures de l'atmosphère* (" Archives des Sciences physiques et naturelles ". Genève, 1876, p. 233).

sia d'assai maggiore di quello assegnatogli da Mendelejeff. A proposito della formola di Mendelejeff, ne piace qui riportare l'opinione di un esimio meteorologo italiano, il dottor Luigi De Marchi (*). " È molto dubbio però se la formola di Mendelejeff, determinata colle osservazioni degli strati più bassi, sia estensibile anche alle più alte regioni dell'atmosfera. E non si sa comprendere come al limite dell'atmosfera possa essere $p=0$ per una temperatura così elevata al di sopra dello zero assoluto. Sarebbe necessario perciò supporre che i componenti dell'aria a quell'altezza cessassero di obbedire alla legge di Boyle e Gay Lussac; ma le esperienze di Pictet e Cailletet sulla liquefazione dell'ossigeno e dell'azoto dimostrarono che una tale eccezione non può per essi verificarsi che a temperature molto inferiori. D'altra parte si dimostra colla termodinamica che se la legge di Boyle-Gay Lussac potesse applicarsi fino al limite dell'atmosfera (ove sarebbe $p = 0$ e $T = 0$), questa non potrebbe avere un'altezza superiore ai 30 chilometri, mentre le osservazioni sulle stelle cadenti farebbero riconoscere densità sensibili dell'aria ad oltre 150 chilometri d'altezza. È quindi più naturale il supporre che la temperatura dell'aria invece di essere costante a partire da una certa altezza, vada continuamente, per quanto lentamente, diminuendo, e raggiunga valori molto inferiori a quello (temperatura critica) che permette la sua liquefazione, sicchè nonostante la piccola pressione, l'azoto (al quale soltanto si riduce forse l'aria a quell'altezza per la legge di Dalton) possa comportarsi come un vapore, liquefarsi o solidificarsi. Nessuna apparenza contrasta a questa ipotesi, perchè anche il vapore acqueo può solidificarsi nell'aria mantenendosi trasparente. Ammettendo tale possibilità Ritter calcolò che l'atmosfera potrebbe raggiungere 350 chilometri ".

Il Prof. Paolo Pizzetti ha adottato l'ipotesi di Mendelejeff sulla distribuzione verticale della temperatura nell'aria per calcolare la refrazione astronomica (**). In essa calcola alcuni valori del numero di metri di dislivello corrispondente a un grado centigrado di diminuzione di temperatura

(*) *Meteorologia Generale*. Milano, Hoepli, 1888, pp. 82-3.

(**) " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XXXIII, 1898.

per $t_0 = -10°$	. . . .	307 metri
0°	. . . .	222 „
10°	. . . .	174 „
20°	. . . .	150 „
30°	. . . .	134 „

Siacci nella memoria esaminata sopra, trovò dalle osservazioni di Glaisher che l'innalzamento necessario per passare dalla temperatura di 0°c a quella di — 1° è $193^m,24$.

Il Prof. Pizzotti avverte poi, come, calcolando le derivate della pressione e della temperatura rispetto all'altezza, per un valore qualunque di essa sia facile dimostrare che la pressione e la temperatura decrescono continuamente coll'altezza e che le velocità di decremento della pressione e della temperatura vanno diminuendo coll'altezza.

Il dottor Luigi De Marchi, già menzionato, nel suo lavoro „ *Le cause dell'êra glaciale* „, premiato dal R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, ebbe occasione di occuparsi della distribuzione verticale della temperatura. Egli giunse alla formola seguente

$$t = -c + (t_s + c)\frac{n}{m+n}$$

nella quale $-C = t_c + \frac{S+V}{mr\mu}$, ed m, n, r, μ, S, V quantità relative allo stato fisico termico dell'atmosfera che qui non occorre definire.

De Marchi osserva che la sua formola *presenta un'analogia sorprendente con quella di Mendelejeff*, di guisa che questa *si può considerare come espressione dell'equilibrio radiante del calore nell'atmosfera, quando si ammettono le seguenti tre condizioni:*

1ª che la temperatura media T presso terra differisca poco dalla temperatura media t_s del suolo;

2ª che sia $$t_c + \frac{S+V}{mr\mu} = -42°;$$

3ª che le frazioni $(1-n)$, $(1-m)$ di calore radiante, che sono assorbite dagli strati d'aria inferiore e superiore all'elemento considerato, si ritengano proporzionali alle rispettive

masse degli strati stessi, e che queste masse si ritengano misurate dai rispettivi pesi, che sono proporzionali alle pressioni p (per lo strato superiore) e $p_0 - p$ (per lo strato inferiore); che sia precisamente

$$(1 - m) = \frac{p}{p_0} \quad 1 - n = \frac{p_0 - p}{p_0}$$

donde

$$m + n = 1; \quad \frac{n}{m + n} = \frac{p}{p_0}.$$

Passeremmo oltre i limiti assegnati al presente scritto, se volessimo tenere dietro alla trattazione dell'argomento svolta dal dottor De Marchi: ci limitiamo perciò a trascrivere una parte della relazione, colla quale i signori Celoria, Taramelli, Schiaparelli (relatore), proposero all'Istituto Lombardo di conferire il premio Cagnola, al lavoro del dottore Luigi De Marchi.

" Per esempio la formula esprimente le variazioni della temperatura secondo l'altezza, presenta un'analogia grande con quelle stabilite da Mendelejeff e Oppolzer, sopra basi strettamente empiriche e dà delle medesime un'interpretazione teoretica plausibile, surrogando in quelle formule all'elemento pressione (Mendelejeff) o all'elemento densità (Oppolzer), l'elemento *trasparenza degli strati atmosferici*, di cui l'influsso sull'andamento verticale della temperatura è assai più sicuramente ammessibile. Non è possibile entrare qui nei particolari di questa trattazione teoretica delle temperature atmosferiche, malgrado il sommo interesse che presenta al lettore: dobbiamo limitarci ad esprimere la speranza che all'autore sia dato di continuare i suoi studi in questa materia, e di condurla anche per quanto concerne la forma e il metodo di esposizione, a quel grado di chiarezza e di perfezione, che farà di essa uno dei capitoli più importanti nei futuri trattati di meteorologia teorica ".

Ne piace qui menzionare ancora il lavoro del prelodato sig. dottore De Marchi intitolato: *Le formole di Mendelejef e di Herschel e le recenti misure di temperatura nelle alte regioni dell'atmosfera*, " Rendiconti dell'Istituto Lombardo ", 1897, nel quale è discusso il valore della formula di Mendelejef rispetto ai nuovi dati sperimentali.

Valgano questi disadorni e troppo incompleti appunti bibliografici (e delle involontarie ommissioni chiediamo venia), qui raccolti, ad attestare che l'Italia ha dato non piccolo contributo allo studio della costituzione fisica dell'atmosfera, in base alle osservazioni di James Glaisher, che oggi ancora forniscono a quello il materiale migliore, più completo e più esteso.

Un problema di geometria numerativa sulle varietà algebriche luogo di ∞^1 spazi.

Nota del D^r ALBERTO TANTURRI.

Nella memoria: *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche* (v. " Rendic. Palermo „, t. III, 1889, pag. 33) il sig. Castelnuovo dimostra che gli S_{q-1} di S_q (spazî lineari a $q-1$ dimensioni, od *iperpiani* di uno spazio lineare a q dimensioni) i quali contengono q generatrici di una rigata algebrica Γ_p^m (di ordine m e di genere p), appartenente ad esso spazio S_q, sono:

$$\sum_{0}^{} {}_h (-1)^h \binom{m-q+1-2h}{q-2h}\binom{p}{h} = \tag{1}$$

$$= \binom{m-q+1}{q} - \binom{m-q-1}{q-2}\binom{p}{1} + \binom{m-q-3}{q-4}\binom{p}{2} - \ldots,$$

ove la somma algebrica si estende sino ad un termine nullo.

Per dualità in S_q, alla Γ_p^m corrisponde una varietà algebrica (a $q-1$ dimensioni, o *forma;* o, come anche si dice, ipersuperficie) luogo di ∞^1 S_{q-2}, ancora di ordine m e di genere p: e la (1) dà pure il numero dei punti q-pli (*) (multipli secondo

---

(*) In particolare, per $q=3$, si considera una rigata Γ_p^m di S_3 e la forma che gli corrisponde per dualità, forma che è una rigata analoga. La espressione $\binom{m-2}{3} - \binom{m-4}{1}p$ dà tanto il numero dei piani che contengono tre generatrici di essa, quanto quello dei suoi punti tripli. Prima del sig. Castelnuovo (a quanto sembra) nessuno studiò neppure questo caso particolare: dipoi, il numero dei punti tripli di una rigata di S_3 fu dato dal WIMAN (ved. *Ueber die Doppelcurve auf den geradlinigen Flächen,* " Acta Math. „, XIX, 1895, pag. 65).

q, ossia tali che per ognuno di essi passino q S_{q-2} generatori) di essa forma. È quindi palese la importanza del risultato del sig. Castelnuovo: chi però volesse ulteriormente convincersi potrebbe guardare le applicazioni della (1) fatte dal prof. Segre nella memoria: *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* (v. " Math. Annalen ", 34, 1889, pagg. 14 e 21).

In vista di essa importanza, mi propongo un quesito più generale, cercando *quanti sono gli iperpiani che contengono il massimo numero di* S_k *generatori di una varietà algebrica* (a $k+1$ dimensioni) *luogo di* ∞^1 S_k. Il risultato finale (v. la formola del num. 11) può certamente condurre, per le varietà luogo di ∞^1 S_k, a teoremi analoghi a quelli già citati del prof. Segre (*).

1. — Una varietà algebrica, luogo di ∞^1 S_k ($k > 0$), la quale sia di ordine m e di genere p, si indica con $\Gamma_p^m\,[k+1]$.

Data, in S_n, una $\Gamma_p^m\,[k+1]$, il passare per qualcuno dei suoi S_k generatori è, per un S_{n-1}, condizione multipla secondo k. Esiste dunque, in generale, se $\frac{n}{k}$ è intero, un numero finito di iperpiani contenenti $\frac{n}{k}$ S_k generatori.

Orbene, noi porremo $\frac{n}{k} = q$ (intero, ≥ 1); ed, escluso il caso di $q = 1$, che non dà evidentemente luogo a ricerca (**), enuncieremo il problema di cui vogliamo occuparci così:

(*) Il Prof. Segre ha osservato che le costruzioni da lui adoperate per ottenere quelle curve *(direttrici)* di una rigata algebrica, le quali incontrano ogni generatrice in un sol punto, si possono estendere senza difficoltà alle varietà a $k+1$ dimensioni (M_{k+1}), luogo di ∞^1 S_k. Al posto di quelle curve si posson considerare, su una tale M_{k+1}, per esempio, le M_k che son luogo di ∞^1 S_{k-1} giacenti, ad uno ad uno, sugli ∞^1 S_k di quella. (Il caso $k=2$ sarà, come mi avverte lo stesso Prof. Segre, diffusamente trattato in una memoria del sig. C. Pagliano da pubblicarsi negli " Annali di Matematica ").
Però per la determinazione dell'*indice* spettante al sistema di tutte quelle M_k che hanno un dato ordine (cioè del numero di quelle M_k che passano per un conveniente gruppo di S_{k-1} giacenti sulla M_{k+1}) occorreva risolvere per una M_{k+1} di un ordine particolare la questione che qui è trattata in generale (ved. il 2° caso particolare. al num. 12 di questa nota). Da ciò appunto è nato il presente lavoro.

(**) Sul significato che conviene attribuire al problema per $q=1$, vedasi la fine del num. 9.

" *Dati i numeri interi* k *e* q $(k > 0,\ q > 1)$, *quanti* S_{kq-1} *contengono* $q\,S_k$ *generatori di una* $\Gamma_p^m\,[k+1]$ *in* S_{kq}*?* ".

Per. dualità in S_{kq}, si ha che *tanti sono pure i punti* q*-pli di una* $\Gamma_p^m\,[kq-k]$.

Noi indicheremo il numero in ricerca con $\Phi_p^m\,(k, q)$: così la (1) dà $\Phi_p^m\,(1, q)$.

2. — Per quanto sarà detto in seguito, conviene notare come, a principio della memoria già citata dei " Rendiconti di Palermo ", il sig. Castelnuovo giunge a notevoli risultati sul numero degli spazî plurisecanti di una curva algebrica, facendo uso delle considerazioni seguenti:

a) si suppone che il numero (si intende, finito) degli spazî plurisecanti di una data curva algebrica, dipenda (per quel che riguarda i caratteri della curva) solo dall'ordine e dal genere di essa;

b) un sistema *connesso*, costituito da t curve

di ordini $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_t$

e di generi $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_t$

può riguardarsi come una curva d'ordine:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_t$$

e di genere:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_t - (t-1) + i,$$

i essendo il numero delle intersezioni (semplici) delle curve parziali (*).

Ad es., per calcolare il numero (finito) degli spazî plurisecanti di una data curva d'ordine m e di genere p, può sostituirsi ad essa:

b_1) una curva d'ordine $m-1$ e di genere p, con una unisecante;

b_2) una curva d'ordine $m-l$ e di genere $p-1$, con un sistema di l rette:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l,$$

(*) Ved. Noether, *Ueber die reductiblen algebraischen Curven*, " Acta Math. ", VIII, 1886, pag. 182.

la cui posizione generica si limita solo col fatto che, ognuna, a partire dalla seconda inclusa, si appoggia solo alla retta precedente; la prima e l'ultima retta soltanto essendo appoggiate alla curva;

c) eseguito (per il computo del numero degli spazî plurisecanti) uno spezzamento della curva data, conforme è detto in *b*), nel numero da calcolarsi non vanno compresi quegli spazî che passano per punti comuni alle linee d'ordine minore sostituite alla data.

Delle stesse considerazioni precedenti si fa uso, allorchè, per calcolare il numero degli spazî plurisecanti di una curva algebrica, si sostituisce:

b') ad una curva razionale d'ordine m un sistema di m rette *consecutive*, vale a dire *in ordine determinato* (o contrassegnate coi numeri 1, 2, ..., m), *e la cui posizione generica si limita solo col fatto che, a partire dalla seconda, inclusa, ognuna si appoggia solo alla precedente;*

b'') ad una curva ellittica d'ordine m, il sistema stesso nel quale però prima ed m^{ma} retta abbiano un punto a comune (*).

3. — Ciò premesso, il sig. Castelnuovo giunge alla (1) facendo uso, per le rigate, di ipotesi analoghe alle *a*) e *c*) e di una proposizione analoga alla *b*). Così, ad una $\Gamma_p^m[2]$ (rigata di ordine m e di genere p) sostituisce:

β_1) una $\Gamma_p^{m-1}[2]$ ed un fascio di raggi, avente con essa un elemento a comune. E si trova allora la formola di riduzione:

$$\Phi_p^m(1, q) = \Phi_p^{m-1}(1, q) + \Phi_p^{m-2}(1, q-1), \tag{2}$$

l'ultimo termine ottenendosi mediante proiezione dal centro del fascio su un iperpiano;

β_2) una $\Gamma_{p-1}^{m-2}[2]$, con due fasci di raggi, aventi tra loro un elemento a comune, ed ognuno un elemento a comune con la rigata $\Gamma_{p-1}^{m-2}[2]$. E si trova allora l'altra formola di riduzione:

$$\Phi_p^m(1, q) = \Phi_{p-1}^{m-2}(1, q) + 2\,\Phi_{p-1}^{m-3}(1, q-1). \tag{3}$$

(*) Di questi spezzamenti mi sono valso, con profitto, in un lavoro, che vedrà prossimamente la luce negli " Annali di Matematica ".

Per $q=2$, si ha:

$\Phi_p^m(1, 2) =$ numero delle tangenti doppie di un inviluppo piano di classe m e di genere p,

$$= \binom{m-1}{2} - p; \tag{4}$$

espressione questa che soddisfa alla (2) ed alla (3), purchè si ritenga $\Phi_p^m(1, 1) = m$ (v. al num. 9) (*).

Per procedere innanzi, in analogia a quanto è detto in b') ed in b'') (v. num. precedente), riterremo che:

β') è per noi una $\Gamma_0^m[k+1]$ un sistema di m fasci di S_k, *consecutivi* tra loro: vale a dire *fasci in ordine determinato e tali che la loro posizione generica sia limitata solo dall'avere ognuno di essi* (a partire dal secondo, incluso) *un elemento* (S_k) *a comune col precedente.* In seguito, per brevità, diremo che i sostegni:

$$a_1, a_2, \ldots, a_m,$$

di essi fasci (soddisfacenti alla condizione che a_i giace sempre in un S_k con a_{i-1} $(i=2, 3, \ldots, m)$) formano un *sistema semplice.*

β'') è per noi una $\Gamma_1^m[k+1]$ lo stesso sistema precedente, solo che, inoltre, primo ed ultimo fascio hanno un elemento a comune.

4. — Nel caso di una varietà razionale, noi consideriamo dunque gli m S_{k-1}:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m;$$

(*) Se si fa una tale convenzione, bastano le (2) e (3) per scrivere la (1), purchè si ammetta che $\Phi_0^{2(q-1)}(1, q) = 0$, o che $\Phi_0^{2(q-1)+1}(1, q) = 1$.

Basta anzi la sola (3) (senza nemmeno far la convenzione sopra accennata) se, — come fa il sig. Castelnuovo, — si suppone già calcolato $\Phi^m{}_0(1,q)$.

Crediamo opportuno aggiungere che, con le sole (8), (11), (12), di questo nostro lavoro, si può risolvere il problema generale, purchè si dimostri direttamente che

$$\Phi_0{}^{(k+1)(q-1)}(k, q) = 0 \quad \text{o che} \quad \Phi_0{}^{(k+1)(q-1)+1}(k, q) = 1.$$

Che se poi si suppone nota la formola risolutiva per le varietà razionali (vale a dire la formola (5)) basta la sola (12) per giungere alla formola generale.

i quali, poichè a_i giace sempre in un S_k con a_{i-1} $(i=2,\dots,m)$, dànno luogo agli $m-1$ S_{k-2} (*):

$$a_1 a_2,\ a_2 a_3,\ a_3 a_4,\ a_4 a_5,\ \dots,\ a_{m-2} a_{m-1},\ a_{m-1} a_m.$$

E poichè, ad es., gli S_{k-2} $a_1 a_2$, $a_2 a_3$ stanno nello S_{k-1} a_2 (e sono generici) si avrà lo S_{k-3} $a_1 a_2 a_3$; e, con esso gli altri $m-3$ S_{k-3}:

$$a_2 a_3 a_4,\ a_3 a_4 a_5,\ \dots,\ a_{m-2} a_{m-1} a_m.$$

In modo analogo si vede che compaiono gli $m-3$ S_{k-4}:

$$a_1 a_2 a_3 a_4,\ \dots,\ a_{m-3} a_{m-2} a_{m-1} a_m;$$

e così via. Si giungerà sino agli $m-k+1$ S_0 (punti):

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_k,\ a_2 a_3 a_4 \dots a_{k+1},\ \dots,\ a_{m-k+1} a_{m-k+2} \dots a_m.$$

Facciamo ora la osservazione seguente.

Un iperpiano generico contiene un elemento di un fascio solo quando passa per l'asse di questo: e contiene tutto il fascio se ne contiene due elementi. Fatta dunque la ipotesi (analoga alla *c)* del num. 2) che *non contano gl'iperpiani contenenti* S_k *comuni a due fasci*, per vedere quanti S_{kq-1} di S_{kq} contengono q degli S_k generatori, basterà vedere quante volte accade che un iperpiano contiene q dei sostegni dei fasci in cui noi abbiamo spezzata la varietà (**). Ma, se uno dei nostri iperpiani contiene a_i esso non deve contenere nessuno dei k (eventuali) sostegni *che seguono* a_i (e, per conseguenza, nessuno dei k eventuali sostegni *che precedono* a_i). Difatti, se contenesse (con a_i) soltanto *il più lontano* a_{i+k} (supposto esistente), conterrebbe un punto di a_{i+1} (il punto cioè $a_{i+1} a_{i+2} \dots a_{i+k}$), oltre allo $S_{k-2} a_i a_{i+1}$: esso non andrebbe dunque contato, perchè, contenendo (con a_i) tutto a_{i+1}, conterrebbe lo S_k comune ai due fasci a_i ed a_{i+1} (***).

(*) Scrivendo l'uno dopo l'altro i simboli di più spazi, intendiamo qui rappresentare lo spazio loro intersezione.

(**) Gl'iperpiani per due (o più) elementi di uno stesso fascio non contano, perchè (contenendo tutto il fascio) contengono lo S_k comune ad esso ed all'*adiacente* (ed un fascio *adiacente* ad uno dato vi è sempre).

(***) I $k+1$ S_{k-1} $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$, costituenti un *sistema semplice* individuano un S_{2k-1}. Dati dunque, in S_{2k-1}, due *generici* S_{k-1} (a_1 ed a_{k+1}),

Da ciò segue immediatamente:

$\Phi_0^m(k, q)$ = numero delle combinazioni di classe q (o con q elementi) dei primi m numeri naturali, fatte in guisa che, in ognuna di esse, la presenza di un numero porti l'esclusione degli eventuali k numeri che lo seguono e degli eventuali k numeri che lo precedono.

L'ordine di successione di essi m numeri è l'*ordinario* soltanto: così m ed 1 *non* sono consecutivi, nè, per $k > 1$, è da considerarsi 2 come uno dei k successivi ad m, ecc.

5. — Per le varietà ellittiche valgono considerazioni analoghe. E si giunge a questo risultato:

$\Phi_1^m(k, q)$ = numero delle combinazioni, come sopra; solo che l'ordine di successione di essi m numeri è il *ciclico:* così m ed 1 sono consecutivi, e, per $k > 1$, è da considerarsi 2 come uno dei k successivi ad m, ecc. (*).

---

non si può con meno di $k-1$ S_{k-1} *intermedi* formare con quelli un sistema semplice. Con $k-1$ S_{k-1} intermedi si può in infiniti modi: ed occorrerà, in seguito, saper risolvere esso problema. *Dati*, cioè, *in* S_{2k-1}, *due* S_{k-1} (a_1 ed a_{k+1}), occorre *costruire* $k-1$ S_{k-1} $a_2, a_3, \dots a_k$, *tali che il sistema*

$$(a_1, a_2, a_3, \dots a_{k-1}, a_k, a_{k+1})$$

risulti semplice. Daremo un metodo per questa costruzione.

Intanto, per $k = 1$, problema non v'è. Per $k = 2$ (lo spazio ambiente è allora un S_3) è subito costruita una retta a_2 appoggiata a due date a_1 ed a_3. Sia ora $k > 2$. Procedendo per *induzione completa*, conduciamo un iperpiano per a_1 ed un altro per a_{k+1}: si avrà come intersezione un $S_{2(k-1)-1}$, sul quale a_1 ed a_{k+1} avranno come tracce due S_{k-2}, b_1 e b_k. Costruiamo b_2, $b_3, \dots, b_{k-1}$ in modo che il sistema $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ risulti semplice, *il che si suppone di saper fare.*

Sarà semplice il sistema (a_1, a_2 = spazio congiungente b_1 con b_2, a_3 = spazio congiungente b_2 con $b_3, \dots, a_k$ = spazio congiungente b_{k-1} con b_k, a_{k+1}), perchè ognuno degli S_{k-1} $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$, — a partire dal 2° incluso, — ha un S_{k-2} a comune col precedente, e quindi giace con esso in un S_k.

(*) Nel mio scritto, di cui è parola all'ultima nota del num. 2, si considera il numero $V^m{}_0(k+2)$ delle combinazioni di classe $k+2$ dei primi m numeri naturali, fatte in guisa che in ogni combinazione non entrino mai due numeri consecutivi, m ed 1 essendo pensati come non consecutivi; ed il numero $V^m{}_1(k+2)$ delle combinazioni stesse, m ed 1 essendo pensati come consecutivi.

E si dimostra che gli $S_k(k+2)$-secanti di una curva d'ordine m in $S_{2(k+1)}$ sono appunto

6. — In questo numero e nel successivo, parlando di $\Phi_0^m(k, q)$ e di $\Phi_1^m(k, q)$ ci riferiremo per l'appunto al significato aritmetico stabilito nei num. precedenti.

Per calcolare $\Phi_0^m(k, q)$, occupiamo i quadretti successivi di una orizzontale di un foglio quadrettato con i numeri $1, 2, \ldots, m$; indi rappresentiamo ciascuna delle nostre combinazioni con q tratti di una orizzontale posti nelle verticali intestate con gli elementi di essa.

Due tratti *consecutivi* in una qualunque di esse combinazioni (i quali, essendo $k > 0$, non stanno mai in due verticali intestate con numeri consecutivi) sono separati da $k + h$ $(h \geq 0)$ quadretti in bianco: orbene, noi terremo fisso il primo elemento di ogni combinazione, e sposteremo gli altri a sinistra in modo che due tratti *consecutivi* già separati da $k + h$ quadretti in bianco lo siano, a spostamento compiuto, solo da h. Basteranno allora $m - k(q - 1)$ verticali per rappresentare tutte le nostre combinazioni, $q - 1$ essendo gl'*intervalli*, e portando ognuno di essi una riduzione di k unità.

E poichè il quadro primitivo conteneva *tutte* le combinazioni sopra definite, il nuovo (quello, cioè, ottenuto dopo gli spostamenti) conterrà *tutte* le *ordinarie* combinazioni di classe q dei primi $m - k(q-1)$ numeri naturali: ed, evidentemente, ognuna di esse comparirà una volta sola.

È dunque:

$$\Phi_0^m(k, q) = \binom{m - k(q-1)}{q}. \tag{5}$$

$V^m_0(k+2)$, se la curva è razionale
$V^m_1(k+2)$, „ ellittica (ved. num. 10 di quella mia nota).

Confrontiamo ora le definizioni di $V^m_0(k+2)$ e di $V^m_1(k+2)$ rispettivamente con quelle (aritmetiche) di $\Phi^m_0(k, q)$, $\Phi^m_1(k, q)$.

È, evidentemente,

$$V^m_0(k+2) = \Phi^m_0(1, k+2)$$
$$V^m_1(k+2) = \Phi^m_1(1, k+2).$$

Quindi il fatto segnalato dal sig. Castelnuovo (ved. la memoria citata in principio) che gli S_{k+1} contenenti $k+2$ raggi di una $\Gamma^m_p[2]$ in S_{k+2} sono tanti quanti gli S_k $(k+2)$-secanti di una curva d'ordine m e di genere p in $S_{2(k+1)}$ (fatto che sarebbe utile saper dimostrare direttamente) trova, almeno per $p = 0$ e per $p = 1$, una *ragione di essere aritmetica*.

Tanti sono gli S_{kq-1} di S_{kq} i quali contengono q S_k generatori di una varietà razionale, d'ordine m, luogo di ∞^1 S_k.

7. — Veniamo ora a calcolare $\Phi_1^m(k, q)$. Si osservi che, delle combinazioni così indicate, $\Phi_0^{m-2k-1}(k, q-1)$ cominciano con 1, come si vede astraendo gli elementi:

$$1;\ 2, 3, \ldots, k+1;\ m-k+1,\ m-k+2, \ldots, m\ (^*).$$

Altrettante cominciano con 2, con 3, ..., con $k+1$, come si vede analogamente. Ad es., riguardo alle combinazioni iniziate con $k+1$, bisogna astrarre gli elementi:

$$k+1;\ \ k+2,\ \ k+3, \ldots, 2k+1;\ \ 1, 2, \ldots, k.$$

Analogo fatto non può più dirsi per $k+2$, nè per $k+3, \ldots$; perchè, ad es., per $k+2$, bisognerebbe astrarre:

$$k+2;\ \ k+3, k+4, \ldots, 2k+2;\ \ 2, 3, \ldots, k+1,$$

e, delle (nostre) combinazioni ottenute astraendo questi elementi, alcune conterrebbero 1, e sarebbero quindi già state computate.

Si osservi però che le combinazioni iniziate con $k+2$, o con numeri successivi, sono tutte e sole le $\Phi_0^{m-k-1}(k, q)$ combinazioni (*ad intervalli*, secondo la nostra definizione) dei numeri:

$$k+2,\ k+3, \ldots, m-1, m.$$

Onde è:

$$\Phi_1^m(k, q) = (k+1)\Phi_0^{m-2k-1}(k, q-1) + \Phi_0^{m-k-1}(k, q) \tag{6}$$

(v. num. 10, in fondo).

Ne segue che:

$$\Phi_1^m(k, q) = \frac{m}{q}\binom{m-kq-1}{q-1}. \tag{7}$$

(*) La presenza del numero 1 in una di esse combinazioni porta non solo l'esclusione dei k numeri $2, 3, \ldots k+1$, ma anche quella degli altri k $m, m-1, \ldots, m-k+1$, per quanto si è detto al num. 5. Astraendo, con essi numeri, anche il numero 1, restano $m-2k-1$ elementi, da combinarsi, in modo ben noto, a $q-1$ a $q-1$.

Tanti sono gli S_{kq-1} di S_{kq} i quali contengono q S_k generatori di una varietà ellittica, d'ordine m, luogo di ∞^1 S_k.

8. — La via tenuta nei precedenti num.[1] (da 4 a 7), per giungere alle notevoli formole (5) e (7) si raccomanda certamente per la sua semplicità. D'altra parte, ammessi i principî su cui si basa la ricerca, più volte menzionata, del sig. Castelnuovo, il metodo nostro non può dar luogo a dubbio di sorta.

Procederemo ora alla ricerca di formole di riduzione, le quali, mentre serviranno a convalidare i precedenti risultati, ne daranno mezzo (il che importa assai di più) di risolvere il nostro problema per varietà di genere qualunque.

Le formole di riduzione che noi daremo sono due: una relativa all'ordine (la (8) del num. 9; e, per $q=2$, la (11) dello stesso num. 9), l'altra relativa al genere (la (12) del num. 10).

9. — Spezzando una $\Gamma_p^m[k+1]$ in una $\Gamma_p^{m-1}[k+1]$ ed in un fascio di S_k avente un elemento a comune con essa (l'asse del fascio è dunque un S_{k-1} appartenente ad un S_k generatore della $\Gamma_p^{m-1}[k+1]$), gli S_{kq-1} di S_{kq} i quali contengono q S_k generatori della $\Gamma_p^m[k+1]$ così spezzata, o ne contengono q della $\Gamma_p^{m-1}[k+1]$, o $q-1$ di questa ed uno del fascio.

Quindi:

$\Phi_p^m(k, q) = \Phi_p^{m-1}(k, q) +$ numero L degli iperpiani di S_{kq} i quali contengono $q-1$ S_k generatori di una $\Gamma_p^{m-1}[k+1]$ e passano per un S_{k-1} di un S_k generatore generico. Se si proietta da esso S_{k-1} (sopra un $S_{k(q-1)}$) si trova che L vale il numero degli $S_{k(q-1)-1}$ contenenti $q-1$ S_k generatori di una $\Gamma_p^{m-k-1}[k+1]$ (*) in $S_{k(q-1)}$. Onde è

$$\Phi_p^m(k, q) = \Phi_p^{m-1}(k, q) + \Phi_p^{m-k-1}(k, q-1). \tag{8}$$

Questa formola fa riscontro alla (2) del num. 3.

Osserviamo però, che, per $q=2$, il ragionamento precedente non è più valido (**): e, d'altra parte, non avrebbe signi-

(*) Lo S_{k-1} *centro di proiezione* è individuabile con k punti dello S_k generatore su cui giace; onde la proiezione da esso produce, nell'ordine, una riduzione di k unità.

(**) Si otterrebbe difatti, a proiezione compiuta, una varietà luogo di $\infty^1 S_k$, in S_k.

ficato la espressione $\Phi_p^{m-k-1}(k, 1)$. Procediamo dunque alla ricerca diretta del numero degli S_{2k-1} di S_{2k} i quali contengono due S_k generatori di una $\Gamma_p^m[k+1]$.

Spezzando questa varietà come sopra, si ottiene:

$$\Phi_p^m(k, 2) = \Phi_p^{m-1}(k, 2) + L' \tag{9}$$

ove L' indica il numero degli S_{2k-1}, di S_{2k}, passanti per un generico S_{k-1} di un S_k generatore (di una $\Gamma_p^{m-1}[k+1]$) e contenenti inoltre un S_k generatore sempre della stessa varietà. Ora, lo S_{k-1} dato ed un S_k generatore individuano un S_{2k-1} solo se hanno un punto a comune: L' è dunque il numero degli S_k generatori che incontrano lo S_{k-1} già scelto; o, che è lo stesso, è l'ordine della linea luogo delle tracce, sullo S_k generatore che si considera, dei rimanenti S_k generatori (*). Ne segue che la ricerca di L' è ricondotta all'altra: " *è data una* $\Gamma_p^{m-1}[k+1]$ *in* S_{2k}. *Quale è l'ordine* (L') *della linea luogo delle tracce degli* S_k *generatori su un* S_k *generatore generico?* ".

Per risolvere questo problema, sechiamo la $\Gamma_p^{m-1}[k+1]$ con un generico S_{2k-1}. Si otterrà una $\Gamma_p^{m-1}[k]$, sulla quale un S_{k-1} generatore generico sarà incontrato da altri L' S_{k-1} generatori. Ora questo numero L' vale $m-3$, per $k=2$; e ciò qualunque sia p. Ammesso quindi che L' sia indipendente da p; e, ponendo, nella (9), $p=0$, avremo: (v. formola (5))

$$\binom{m-k}{2} = \binom{m-k-1}{2} + L',$$

donde $L' = m-k-1$. Oppure, ponendo, nella stessa (9), $p=1$, avremo: (v. formola (7))

$$\frac{m}{2}\binom{m-2k-1}{1} = \frac{m-1}{2}\binom{m-2k-2}{1} + L',$$

donde ancora $L' = m-k-1$ (**).

(*) Questa linea è pure traccia, sul generico S_k generatore, della *superficie doppia* (luogo delle mutue intersezioni degli S_k generatori) della $\Gamma_p^{m-1}[k+1]$.

(**) Non è però necessario ammettere l'indipendenza di L' da p per trovare il valore di esso L'. Si può infatti dimostrare direttamente che:

La (9) si scrive dunque definitivamente così:

$$\Phi_p^m(k, 2) = \Phi_p^{m-1}(k, 2) + m - k - 1 \qquad (10),$$

formola ottenibile immediatamente dalla (8), se si conviene di porre:

$$\Phi_p^m(k, 1) = m \qquad (11)$$

10. — Veniamo ora alla formola di riduzione per il genere. Siano Σ_1 e Σ_2 due S_k generatori generici di una $\Gamma_{p-1}^{m-k-1}[k+1]$, ed assumasi, sul primo, un S_{k-1} a_1; e, sul secondo, un S_{k-1} a_{k+1}. Nello S_{2k-1} $\}a_1, a_{k+1}\{$ (*) si costruiscano gli S_{k-1} $a_2, a_3, \ldots a_k$, tali che il sistema:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1})$$

risulti *semplice* (v. nota 3ª, al num. 4). Indi si assumano $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}$, come assi di fasci di S_k, in modo che:

al fascio a_1 appartengano gli S_k Σ_1 ed $\}a_1, a_2\{$,
" a_2 " $\}a_2, a_1\{$ " $\}a_2, a_3\{$,
" a_3 " $\}a_3, a_2\{$ " $\{a_3, a_4\{$,
. . . .

In S_{2k+1}, *un* S_k *generatore di una* $\Gamma^m\{k+1]$ *è incontrato da* $m-k-1\,S_k$ *generatori.* Ciò fu dimostrato *direttamente* (dal Prof. Segre) così:

Un iperpiano condotto per uno spazio generatore A_k seca ulteriormente la $\Gamma^m[k+1]$ secondo una $\Gamma^{m-1}[k]$: ed *ogni* S_k generatore della varietà data contiene un S_{k-1} generatore della $\Gamma^{m-1}[k]$. Noi diremo α_{k-1} quello degli S_{k-1} (generatori della varietà sezione) che sta in A_k. Dopo ciò il numero richiesto vale quello degli S_{k-1} generatori di una $\Gamma^{m-1}[k]$ (di S_{2k}) i quali si appoggiano ad uno spazio A_k condotto per un S_{k-1} generatore α_{k-1}. E se da un punto generico di A_k si proietta su un S_{2k-1}, si trova che il numero richiesto vale quello degli S_{k-1} generatori di una $\Gamma^{m-1}[k]$, in S_{2k-1}, appoggiati ad uno generico di essi (quello che è proiezione di α_{k-1}). Il numero richiesto non cambia dunque scemando simultaneamente di 1 m e k. Dettolo quindi $[m, k]$, sarà

$$[m, k] = [m-1, k-1] = \ldots = [m-k+1, 1] = (m-k+1) - 2 = m-k-1.$$

(*) Leggasi: che congiunge a_1 con a_{k+1}.

al fascio a_k appartengano gli S_k $\} a_k, a_{k-1} \{$ ed $\} a_k, a_{k+1} \{$,

" a_{k+1} " $\} a_{k+1}, a_k \{$ e Σ_2 ;

il che si può, evidentemente.

Dopo ciò, gl' iperpiani contenenti q S_k generatori della $\Gamma_p^m [k+1]$ costituita dalla $\Gamma_{p-1}^{m-k-1} [k+1]$ data e dai sopradetti fasci:

α) o contengono q S_k della $\Gamma_{p-1}^{m-k-1} [k+1]$ primitiva,

α_1) o $q-1$ di essa ed uno del fascio a_1

α_2) " " a_2

. . . .

α_k) o $q-1$ di essa varietà $\Gamma_{p-1}^{m-k-1} [k+1]$ ed uno del fascio a_k,

α_{k+1}) " " a_{k+1}.

Quanto agli iperpiani che contengono due S_k, uno di un fascio ed uno di un altro, è subito visto che non contano, perchè, anche se contenessero solo i due sostegni estremi, a_1 ed a_{k+1}, passerebbero per un S_k comune a due dei fasci (*) (v. c) al numero 2).

Ora:

α) gl'iperpiani contenenti q S_k generatori della $\Gamma_{p-1}^{m-k-1} [k+1]$ sono $\Phi_{p-1}^{m-k-1} (k, q)$.

α_1, α_{k+1}) quelli contenenti $q-1$ S_k generatori della $\Gamma_{p-1}^{m-k-1} [k+1]$ ed uno del fascio a_1 (o del fascio a_{k+1}) sono $\Phi_{p-1}^{m-2k-1} (k, q-1)$ (**), come si vede proiettando da a_1 (o da a_{k+1}), su un generico $S_{k(q-1)}$.

$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$) quelli contenenti $q-1$ S_k generatori della $\Gamma_{p-1}^{m-k-1} [k+1]$ e passanti per a_i ($i = 2, 3, \ldots, k$) si possono contare facilmente, se si proietta da a_i su un generico $S_{k(q-1)}$. Poichè a_i ha a comune con a_1 lo S_{k-i} (***) $a_1 a_2 a_3 \ldots a_i$ (ossia intersezione degli S_{k-1} $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i$), e con a_{k+1} lo S_{i-2} $a_i a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_{k+1}$, si avrà come varietà proiezione una $\Gamma_{p-1}^{m-2k-1} [k+1]$

(*) Un iperpiano per a_1 ed a_{k+1} contiene, ad es., a_{k+1} ed il punto $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$. Esso contiene dunque un punto di a_k, oltre allo S_{k-2} $a_k a_{k+1}$: contiene dunque tutto a_k, e quindi lo $S_k \} a_k, a_{k+1} \{$.

(**) Per aver ragione del numero $m-2k-1$ ved. la nota 1ª del num. 9.

(***) Trattasi proprio di un S_{k-i}, come risulta subito dal num. 4.

Quindi $z = (\nu - 1)\ (\nu' - 1) - p$ (*); ed i punti doppi della nostra rigata sono dunque:

$$\binom{\nu}{2} - p + \binom{\nu'}{2} - p + (\nu - 1)(\nu' - 1) - p = \binom{m-2}{2} - 3p$$

(essendo $m = \nu + \nu'$).

2° CASO PARTICOLARE.

Per $m = k(q - 1 + p) + q$ si ha:

$$\Phi_p^{k(q-1+p)+q}(k, q) = \sum_0^q {}_i k^i \binom{p}{i} = 1 + k\binom{p}{1} + k^2\binom{p}{2} + \ldots + k^q\binom{p}{q}.$$

Il prof. Segre fu indotto a scrivere (per il primo) questa formola (che dà appunto l'*indice* relativo ad un sistema di M_t giacenti su una $\Gamma[k + 1]$, nel senso accennato in nota, alla fine della prefazione) da quella già nota per il caso delle rigate (**), e dalle espressioni di $\Phi_p^m(k, 2)$ e di $\Phi_p^m(k, 3)$ (***), che io gli comunicai. E la formola del prof. Segre mi fu poi di aiuto a scrivere la formola finale (del num. 11).

(*) Cfr. il num. 35 della memoria sopra citata del Prof. Segre.

(**) Ved. la memoria dei " Math. Annalen „ (34), citata nella introduzione di questo mio scritto.

(***) Le mie espressioni di ${\Phi^m}_p(k, 2)$ e di ${\Phi^m}_p(k, 3)$ sono le seguenti:

$${\Phi^m}_p(k, 2) = \binom{m-k}{2} - \binom{k+1}{2} p$$

$${\Phi^m}_p(k, 3) = \binom{m-2k}{3} - \left\{ \binom{k+1}{2} m - \binom{2k+2}{3} \right\} p.$$

Come si vede, esse non hanno *aspetto* tale da far presagire la formola del Prof. Segre.

Analoga ad esse due è l'altra

$${\Phi^m}_p(k, 4) = \binom{m-3k}{4} - \frac{1}{6}\binom{k+1}{2} \left\{ 3m^2 - 11 \binom{2k+1}{1} m + 9\binom{3k+2}{2} \right\} \binom{p}{1} + \binom{k+1}{2}^2 \binom{p}{2}$$

Sopra le corrispondenze (p, p) esistenti sulle curve di genere p a moduli generali;

Nota di GAETANO SCORZA.

È ben nota la teoria delle corrispondenze (algebriche) (1, 1) esistenti sopra le curve ellittiche (*) (ossia di genere $p = 1$) a modulo generale, ed è anche nota l'estensione che di tale teoria è stata fatta dal prof. Castelnuovo alle curve di genere p e a moduli generali, considerando le corrispondenze univoche tra i gruppi di p punti delle curve medesime (**). Ma una tale estensione può eseguirsi anche in un altro senso, proponendosi cioè la ricerca delle corrispondenze algebriche (p, p) esistenti sopra le curve di genere p e a moduli generali.

Si incontrano così alcuni risultati, i quali, per quanto dedotti assai facilmente, pure non sono del tutto privi di interesse.

§ I.

1° Fra due punti x ed y di una curva algebrica C (o della corrispondente superficie Riemanniana R) di genere p e *a moduli generali* sia stabilita una corrispondenza (algebrica) tale

(*) Cfr. per una trattazione completa dell'argomento la Nota del prof. Segre: *Le corrispondenze univoche nelle curve ellittiche* (" Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XXIV, 1889), nella quale sono anche contemplati i casi delle curve singolari. A proposito di questa e della denominazione adoperata nel testo di curve a moduli generali avvertiamo che esse hanno un significato preciso; quello stabilito nel § 2 della Nota del sig. Hurwitz: *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip* (" Berichte sächs. Ges. d. W. ", 1886; e " Math. Ann. ", Bd. 28).

(**) Castelnuovo: *Le corrispondenze univoche tra gruppi di p punti sopra una curva di genere p* (" Rendiconti del R. Istit. Lombardo "; serie II, vol. XXX, 1892).

che ad ogni posizione del punto x corrispondano β posizioni del punto $y, y', y'' \dots y^{(\beta)}$, in generale diverse fra loro e diverse dal punto x, e ad ogni posizione del punto y corrispondano α posizioni del punto $x, x' \dots x^{(\alpha)}$, diverse in generale fra loro e da y.

Allora se si indicano con $u_1(x), u_2(x) \dots u_p(x)$ i valori nel posto x dei p integrali normali di 1ª specie della superficie Riemanniana R, per un noto ragionamento del sig. Hurwitz (*), si ha:

$$\sum_{i=1}^{i=\beta} u_k(y^{(i)}) + \gamma u_k(x) \equiv \pi_k \qquad (k = 1 \dots p) \tag{1}$$

essendo γ un numero intero (positivo o negativo) e π_k una costante indipendente (come γ) dal punto x (**).

Il numero γ si dice *valenza* della corrispondenza.

Se γ è positivo, le (1) esprimono, per il teorema d'Abel, che gli ∞^1 gruppi di $p + \gamma$ punti di C costituiti da un punto qualunque x contato γ volte e dai β punti y corrispondenti appartengono a una medesima serie lineare, e, come ha mostrato il prof. Segre (***), basta questa osservazione per dedurre geometricamente in tal caso che il numero delle coincidenze è dato da $\alpha + \beta + 2p\gamma$.

Se invece γ è negativo, indichiamone con γ' il valore assoluto e diciamo $y_1' \dots y_1^{(\beta)}$ i punti corrispondenti alla posizione x_1 del punto x: le formule (1) assumeranno l'aspetto:

$$\sum_{i=1}^{i=\beta} u_k(y^{(i)}) \equiv \gamma' u_k(x) + \pi_k \qquad (k = 1 \dots p) \tag{2}$$

(*) Loc. cit.

(**) Insieme alle (1) vanno tenute presenti le formule perfettamente analoghe che legano ogni punto y ai punti x corrispondenti. Si ha:

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha} u_k(x^{(i)}) + \gamma u_k(y) \equiv \rho_k \qquad (k = 1 \dots p)$$

ρ_k essendo una nuova costante indipendente da y.

(***) Segre: *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (" Ann. di Mat. ", serie 2ª, vol. 22).

e insieme ad esse si avranno le altre:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{i=\beta} u_k(y_1^{(i)}) \equiv \gamma' u_k(x_1) + \pi_k \qquad (k=1\ldots p).$$

Allora sarà:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{i=\beta} u_k(y^{(i)}) + \gamma' u_k(x_1) \equiv \sum_{i=1}^{i=\beta} u_k(y_1^{(i)}) + \gamma' u_k(x) \quad (k=1\ldots p)$$

e quindi, per il teorema di Abel:

In ogni corrispondenza a valenza negativa $-\gamma'$ *esistente sopra una curva algebrica qualsiasi* (*), *due punti qualunque* x *ed* x_1 *della curva contati ciascuno* γ' *volte e presi, il punto* x *insieme ai punti corrispondenti ad* x_1, *e il punto* x_1 *insieme ai punti corrispondenti ad* x, *costituiscono due gruppi di punti equivalenti o corresiduali.*

Reciprocamente è chiaro che:

Se in una corrispondenza esistente sopra una curva algebrica due punti qualunque x *ed* x_1 *della curva contati ciascuno* γ' *volte e presi, il punto* x *insieme ai punti corrispondenti a* x_1 *e il punto* x_1 *insieme ai punti corrispondenti ad* x *costituiscono due gruppi di punti corresiduali, la corrispondenza è a valenza negativa* $-\gamma'$.

Infatti dalle (2) e (4) combinate insieme risultano le (3).

2° Ciò posto, consideriamo una corrispondenza (p, p) esistente sopra la curva C e supponiamo dapprima che essa sia a valenza positiva.

Detta γ la valenza, i gruppi di $p+\gamma$ punti costituiti dai punti di C, contati γ volte ciascuno, insieme ai loro p punti corrispondenti apparterranno a una serie lineare $g_{p+\gamma}$ (con un punto γ-plo in ogni punto di C e quindi) di dimensione $r \geqq \gamma$, e se supponiamo che tali gruppi non siano speciali sarà $r=\gamma$ $(\gamma>0)$ e $g_{p+\gamma}$ sarà una serie completa.

Allora i punti y corrispondenti a un dato punto x di C si otterranno costruendo il gruppo di $g_{p+\gamma}$ che ha in x un punto γ-plo e considerando come punti y i rimanenti p punti del

(*) A moduli generali, o non.

gruppo; e i punti x corrispondenti a un dato punto y saranno tanti quanti sono i gruppi della $g_{p+\gamma}$ che contengono y ed hanno (altrove) un punto γ-plo. Ma questi gruppi sono notoriamente (*) $p\gamma^2$, quindi la corrispondenza fra x e y è una (p, p) solo quando $\gamma = 1$.

Segue da tutto ciò che:

Una classe di ∞^p corrispondenze (p, p) a valenza positiva si ottiene considerando le ∞^p g^1_{p+1} complete non speciali esistenti sopra la curva C. Ognuna di esse dà luogo a una corrispondenza simmetrica (p, p) di valenza 1, quando si facciano corrispondere a ogni punto x di C i p punti che insieme ad esso dànno un gruppo della serie g^1_{p+1} considerata; e queste corrispondenze sono le sole corrispondenze (p, p) esistenti sopra C per le quali si verifichi che ogni punto della curva contato un numero di volte eguale alla valenza dia insieme ai suoi p punti corrispondenti un gruppo non speciale.

§ II.

3° Per brevità di discorso diciamo *speciale* una corrispondenza (p, p) di valenza positiva γ, per la quale accada che ogni (**) punto di C contato γ volte insieme ai suoi p punti corrispondenti dia un gruppo speciale (per modo che sia $\gamma \leq p-2$): allora perchè si possano dire determinate tutte le corrispondenze (p, p) di valenza positiva esistenti sopra C occorrerà, grazie al teorema precedente, determinare ancora le sole corrispondenze speciali.

Fra queste si presenteranno naturalmente le corrispondenze (p, p) che nascono dalle g^1_{p+1} speciali (incomplete), come le non speciali dalle g^1_{p+1} non speciali (complete), ma, al contrario del caso precedente, esse non esauriranno tutte le possibili corrispondenze speciali.

Caratterizzare tutte le corrispondenze speciali è un problema che in generale non pare facilmente risolubile: qui trattiamo soltanto alcuni casi particolari i quali varranno a metterne in luce tutto l'interesse.

(*) SEGRE: *Introduzione*, ecc., n° 42.

(**) Si osservi che se questo accade per un punto di C allora accade per ogni altro.

4° Poichè per $p=1$ e $p=2$ non esistono evidentemente corrispondenze speciali, incominciamo dal considerare il caso $p=3$, e, per fissar le idee, supponiamo (come è sempre possibile applicando una conveniente trasformazione birazionale) che la curva C sia una quartica piana (generale).

Una corrispondenza (3, 3) speciale esistente sopra la quartica C avrà la valenza γ minore di 2 e quindi nulla o uguale ad 1.

Se la valenza fosse zero le terne di punti y corrispondenti ai varii punti x di C costituirebbero una g_3^1 i gruppi della quale sarebbero riferiti biunivocamente ai punti della curva C, dunque resta possibile la sola ipotesi $\gamma=1$.

Se $\gamma=1$ le rette contenenti le quaterne di punti costituite dai punti x di C insieme ai tre punti corrispondenti formeranno un inviluppo della 4ª classe (*) (in corrispondenza biunivoca *prospettiva* colla quartica C) che potrà essere semplice o composto.

Se si spezza in un fascio contato 4 volte la corrispondenza (3, 3) nasce nel modo noto da una g_4^1 speciale (incompleta), dunque casi nuovi (se possibili) non potranno aversi che dal supporre quell'inviluppo di 4ª classe spezzato in uno di 2ª classe contato due volte, oppure irriducibile. Ma entrambi questi casi sono impossibili perchè nel primo la quartica sarebbe iperellittica, e nel secondo la corrispondenza biunivoca prospettiva esistente tra la quartica e l'inviluppo sarebbe contenuta in una reciprocità (non degenere) del piano (**), per cui solo i punti di una certa conica stanno nei raggi corrispondenti, dunque:

Sopra le curve di genere 3 a moduli generali non esistono corrispondenze speciali oltre le ∞^2 date dalla g_4^1 speciali.

5° Se $p=4$ si vede come prima che non possono esistere sulla curva C corrispondenze (4,4) di valenza nulla, dunque bisognerà discutere soltanto i casi $\gamma=1$, $\gamma=2$.

Pel caso $\gamma=1$ cominciamo dall'osservare che le quintuple date dai punti x di C insieme ai quattro punti corrispondenti apparterranno a una g_5^2 (completa) della curva, dunque, rappresentando, mediante questa g_5^2, la curva C sopra una quintica

(*) Cfr. Segre: *Introduzione*, ecc., n° 46.

(**) Cfr. Segre: *Introduzione*, ecc., n° 57.

piana, che diremo ancora C, con due punti doppii M ed N, potremo supporre che quelle quintuple di punti siano quintuple di punti allineati, ed avremo che le rette contenenti tali quintuple costituiranno un inviluppo Γ di 5ª classe in corrispondenza biunivoca prospettiva con la curva C.

Se Γ si spezza in un fascio contato 5 volte, la (4,4) considerata nasce da una g_5^1 speciale, dunque, per fare un caso nuovo, supponiamo che Γ sia irriducibile, cioè sia un vero e proprio inviluppo di 5ª classe con due tangenti doppie m ed n.

La corrispondenza biunivoca che intercede fra C e Γ muterà i gruppi della g_5^2 segnata sopra C dalle rette del piano (che diremo π) nei gruppi di una g_5^2 segnata sopra Γ da un tessuto di coniche tangenti ad m, n e a una terza tangente p di Γ; e muterà i gruppi della g_5^2 di Γ costituiti dai gruppi di tangenti passanti pei varii punti del piano nei gruppi di una g_5^2 segnata sopra C da una rete di coniche passanti per M, N e un terzo punto P di C: dunque è contenuta in una trasformazione quadratica Σ del piano punteggiato π nel piano rigato avente il medesimo sostegno.

Ora in una trasformazione quadratica generale di un piano punteggiato in un piano rigato ad esso sovrapposto solo i punti di una cubica (*) si trovano nei raggi corrispondenti dunque per quella trasformazione Σ ogni punto di π si muta in un raggio passante per esso.

Allora *data* la curva C si dovrà procedere nel modo seguente per costruire un inviluppo Γ di 5ª classe in corrispondenza biunivoca prospettiva con la curva C. Si incomincierà dal considerare la rete delle coniche passanti per M, N, P, P essendo un punto arbitrario di C, e si stabilirà una corrispondenza proiettiva tra queste coniche e i punti (considerati come centri di fasci di raggi) del piano rigato π in modo che la corrispondenza quadratica che ne risulta fra le rette del piano rigato π e i punti del piano punteggiato sovrapposto faccia corrispondere ad ogni raggio un punto su di esso, e poi trasformando C mediante

(*) Questa osservazione serve come punto di partenza al sig. Th. Tuch nella sua nota: *Eine Cremona'sche Punkt-Gerade Werwandtschaft zweiter Ordnung* u. s. w. (Jena, 1890) per una trattazione delle proprietà dei 24 triangoli inscritti e circoscritti a una cubica generale.

questa corrispondenza quadratica si otterrà *appunto* un inviluppo della 5ª classe che potrà assumersi come inviluppo Γ. Fissato il triangolo MNP vi sono (*) ∞^1 corrispondenze quadratiche di quella natura, dunque, tenendo conto delle considerazioni precedenti e ricordando che ogni curva di genere 4 contiene ∞^1 g_5^2 (complete) speciali si ha che:

Ogni curva di genere 4 contiene ∞^3 corrispondenze speciali di valenza 1 diverse dalle ∞^3 che si ottengono considerando le serie g_3^1 esistenti sulla curva. Quest'ultime sono simmetriche, quelle altre no.

6° Le nuove corrispondenze speciali (4,4) di valenza 1 che così si ottengono sopra una qualunque curva algebrica di genere 4 si organizzano in ∞^1 sistemi di ∞^2 corrispondenze ciascuno, ogni sistema essendo coordinato a una g_5^2 speciale (completa) della curva.

Noi vogliamo considerare più davvicino le proprietà delle ∞^2 corrispondenze del sistema coordinato a una certa g_5^2 della curva, rappresentando come prima la curva sopra una quintica piana C con due punti doppii M ed N e la g_5^2 mediante la serie tagliata sulla quintica dalle rette del suo piano π.

Avremo che una di quelle ∞^2 corrispondenza si otterrà trasformando prima quadraticamente (in modo opportuno) la curva C in un inviluppo della 5ª classe Γ riferito ad esso biunivocamente e prospettivamente, e poi chiamando corrispondenti due punti x ed y di C quando y si trova sulla tangente di Γ corrispondente al punto x e uscente da x.

(*) Assumiamo il triangolo MNP come triangolo fondamentale in una determinazione parametrica dei punti e delle rette del piano mediante coordinate omogenee. Dicendo $x_1x_2x_3$ le coordinate di punti e $\xi_1\xi_2\xi_3$ quella di retta, le ∞^1 corrispondenze in questione sono tutte e sole quelle date dalle formule:

$$\xi_1 = \lambda x_2 x_3$$

$$\xi_2 = \mu x_3 x_1$$

$$\xi_3 = -(\lambda + \mu) x_1 x_2$$

al variare del parametro $\frac{\lambda}{u}$.

Il triangolo fondamentale, nel piano punteggiato, sarà formato dai punti M ed N e da un certo terzo punto P di C (*), e il trilatero fondamentale sul piano rigato sarà dato dalle tre rette

$$m = \mathrm{NP} \quad n = \mathrm{PM} \quad p = \mathrm{MN}$$

M ed m, N ed n, P e p essendo gli elementi omologhi.

Allora la curva C si trasformerà in un inviluppo Γ della 5ª classe con due tangenti doppie nelle rette m ed n, e con una tangente semplice nella retta p, e nella corrispondenza biunivoca prospettiva intercedente fra C e Γ, p sarà la retta corrispondente all'ulterior punto di intersezione della retta MN colla quintica C, m ed n corrisponderanno rispettivamente alle coppie di punti secondo cui esse tagliano la curva C fuori dei punti M, N, P e le rette corrispondenti a uno dei due punti doppii, per es. M, saranno le due ulteriori tangenti di Γ passanti per M, oltre n e p. Ciò significa, riportandosi alla corrispondenza (4,4) individuata da Γ sopra C, che in essa al punto ove p taglia C fuori di M ed N corrispondono i quattro punti della curva che cadono nei due punti doppii, al punto doppio M (o N) considerato come appartenente ad uno dei due rami della curva passanti per esso corrisponde (insieme ad altri tre) il punto stesso considerato come appartenente all'altro, e che le coppie di punti secondo cui PM e PN tagliano ulteriormente la curva C sono coppie involutorie della corrispondenza. Queste due coppie insieme a quelle date dai punti doppii esauriscono le coppie involutorie della corrispondenza.

Abbiamo adunque:

Per le ∞^2 *corrispondenze (4,4) coordinate a una medesima serie lineare* g_5^2 *della curva* C, *al punto che costituisce il resto*

(*) Il punto P può caratterizzarsi facilmente rispetto alla corrispondenza (4, 4) considerata. Le quintuple date dai punti x di C insieme ai quattro punti y corrispondenti appartengono a una medesima serie g_5^2 tagliata sopra C dalle rette del piano, e che quindi ha per resto rispetto alla serie canonica il punto ove C è tagliata ulteriormente dalla retta MN: invece le quintuple date dai punti y di C insieme ai quattro punti x corrispondenti appartengono a una serie g_5^2, il cui resto rispetto alla serie canonica è proprio il detto punto P.

di g_2^2 rispetto alla serie canonica corrispondono sempre i quattro punti che insieme ad esso completano due gruppi delle due g_3^1 appartenenti alla curva, e questi quattro punti si dividono relativamente alle due g_3^1 in due coppie di punti che in esse si corrispondono sempre involutoriamente. Ognuna delle ∞^2 corrispondenze dette contiene altre due coppie involutorie le quali insieme a un determinato punto (*) *della curva dànno due terne delle due g_3^1* (**).

7° Adesso, per esaurire la discussione nel caso $p = 4$, supponiamo che sulla curva C (sempre di genere 4) esista una corrispondenza Σ (4,4) di valenza $\gamma = 2$, e supponiamo che la curva C sia una sestica gobba di genere 4 dello spazio ordinario. Si osserverà subito che Σ è necessariamente una corrispondenza simmetrica. Infatti se ciò non fosse, la corrispondenza, che si otterrebbe ripetendola due volte di seguito sarebbe una (16,16) di valenza -4 (***) e quindi sarebbe priva di coincidenze, mentre essa ha almeno le 24 coincidenze della (4,4) (****).

Ora il piano che tocca C in un suo punto qualunque e contiene gli altri quattro punti ad esso corrispondenti per Σ genera al variare di x una vera e propria sviluppabile di sesta

(*) Vedi nota precedente.

(**) Il lettore osserverà che queste ed altre proprietà possono dedursi subito ammettendo l'esistenza delle corrispondenze in questione senza servirsi della loro effettiva costruzione e osserverà pure come questo enunciato diventa intuitivo quando si assuma a rappresentante della curva C (vedi testo n° seg.) la sestica di genere 4 dello spazio ordinario.

(***) Si verifica subito partendo dalle formule fondamentali (1) del sig. Hurwitz che il *prodotto* di una corrispondenza (α, β) di valenza γ e di una corrispondenza (α', β') di valenza γ' è una $(\alpha\alpha', \beta\beta')$ di valenza $-\gamma\gamma'$.

(****) Veramente il ragionamento del testo prova soltanto che detti $y' \ldots y^{IV}$ i quattro punti y corrispondenti per Σ a un punto x, uno dei quattro punti y corrispondenti a *qualcuno* dei punti $y' \ldots y^{IV}$, considerato come punto x, coincide con x: ma questa è una obbiezione che si toglie senza alcuna difficoltà.

Infatti se ciò accadesse e la corrispondenza (4, 4) non fosse simmetrica, essa si *spezzerebbe* in due corrispondenze: una sarebbe una (α, α) simmetrica e l'altra una $(4-\alpha, 4-\alpha)$ *non* simmetrica, e, non potendo essere $\alpha = 1$ ed $\alpha = 3$ perchè $p > 1$ e la curva C è a moduli generali. sarebbe $\alpha = 2$. Esisterebbe quindi sopra C una (2, 2) non simmetrica a valenza positiva (altrimenti il numero delle sue coincidenze sarebbe negativo). Ora ciò è impossibile per le cose dette qui e nel testo, dunque, ecc.

classe Γ (*) in corrispondenza biunivoca prospettiva con C, e questa corrispondenza è contenuta in una reciprocità dello spazio, dunque per l'osservazione precedente Γ corrisponde a C in un sistema nullo o nella polarità rispetto alla (*sola*) quadrica contenente C (**).

Un piano di Γ *tocca* la curva C nel punto corrispondente, e però se Γ corrispondesse a C in un sistema nullo le tangenti di C apparterrebbero a un complesso lineare. Ma ciò è impossibile, perchè allora le tre tangenti di C situate in uno dei suoi piani tritangenti passerebbero per un medesimo punto e toccherebbero la conica (non degenere) secondo cui quel piano taglia *la* quadrica passante per C, dunque Γ non può essere altra cosa che la sviluppabile di 6ª classe polare reciproca di C rispetto alla quadrica che la contiene.

Ne segue il teorema:

Sopra ogni curva algebrica di genere 4 a moduli generali esiste una sola corrispondenza (4,4) di valenza 2 (speciale). Essa è simmetrica e si ottiene facendo corrispondere a ogni punto della curva quei quattro che insieme ad esso completano due gruppi delle due g_3^1 esistenti sulla curva (***).

(*) Infatti per un ragionamento precedente (n° 2) le sestuple date dai punti di C contati due volte ciascuno insieme ai quattro punti loro corrispondenti per Σ non possono essere contenute in una g_6^2.

(**) È ben noto che una curva speciale normale d'ordine $2p-2$ e genere p di S_{p-1} è contenuta in $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ quadriche linearmente indipendenti. Cfr. ad es. NÖTHER: *Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen* (" Math. Ann. ", Bd. 17).

(***) Pel caso $p=5$ non siamo riusciti a dare una discussione completa come pel caso $p=4$. Possiamo però far osservare che sopra una curva C di genere 5 a moduli generali non esistono corrispondenze speciali di valenza 0, 2 o 3. Pel caso della valenza nulla si applica la solita considerazione del testo dopo aver osservato che sopra C una serie completa (speciale) d'ordine 5 ha la dimensione 1. Quanto a quelle di valenza 2 o 3 si dimostra dapprima che esse sono necessariamente simmetriche, poi, rappresentando la curva C rispettivamente sopra una curva C^7 (speciale, normale) del 7° ordine dello spazio ordinario, o sopra una curva C^8 (speciale, normale) dell'8° ordine dell'S_4, si osserva come la nostra asserzione si riduca all'altra: che le tangenti di C^7 non possono appartenere a un complesso lineare e che gli iperpiani tangenti a una delle ∞^2 quadriche passanti per C^8 nei punti di C^8 non possono aver tutti contatto tripunto con C^8.

Che le tangenti di C^7 non possono appartenere a un complesso lineare

§ III.

8° Passiamo adesso a considerare le corrispondenze (p,p) di valenza negativa, e quindi uguale a -1, esistenti sopra la curva C di genere p e a moduli generali. Vedremo che, al contrario di quanto accade per le corrispondenze a valenza positiva, qui si riesce a caratterizzarle completamente e a costruirle tutte nel caso di p qualunque in una maniera geometrica semplice.

Infatti sia Σ una tal corrispondenza. Se x ed x_1 sono due punti di C e $y' \ldots y^{(p)}, y'_1 \ldots y_1^{(p)}$ i gruppi di punti ad essi corrispondenti per Σ, i due gruppi $(x_1 y' \ldots y^{(p)})$ ed $(xy'_1 \ldots y_1^{(p)})$ sono corresiduali, ossia appartengono a una medesima serie lineare d'ordine $p+1$.

Ora dico che qualunque sia il punto x il gruppo dei p punti corrispondenti $y' \ldots, y^{(p)}$ non può essere speciale.

---

si dimostra subito. Infatti se ciò non fosse la classe della sviluppabile bitangente a C^7 sarebbe (contrariamente a quanto risulta dalle note formule di Cayley) uguale all'ordine della linea nodale della rigata (sviluppabile) costituita dalle sue tangenti, perchè ogni piano bitangente di C^7 passante per un punto x dello spazio darebbe col punto d'intersezione delle due tangenti di C^7 in esso contenute un punto della linea nodale situato nel piano polare di x rispetto al sistema nullo individuato dal complesso in questione, e, dualmente, ogni punto della linea nodale situato in un piano ξ dello spazio darebbe un piano bitangente di C^7 passante pel polo di ξ.

Quanto alla proprietà accennata di C^8 essa può dimostrarsi nel modo che ora diremo, indicatoci gentilmente dal prof. Segre.

Se gli iperpiani tangenti nei punti di C^8 a una M^2_3, passante per C_8, avessero tutti contatto tripunto colla curva, le tangenti di C^8 apparterrebbero alla M^2_3, e allora, proiettando stereograficamente la M^2_3 da un suo punto O sopra un S_3, la C^8 si proietterebbe in una γ^8 dello spazio ordinario le cui tangenti sarebbero tutte appoggiate a una conica λ avente otto punti comuni con γ^8. Quindi λ sarebbe linea 12-pla per la rigata di 24° grado costituita dalle tangenti di γ^8. Ora γ^8 è situata sopra una superficie cubica passante per λ (proiezione della superficie del 4° ordine comune alle M^2_3 passanti per C^8 e per O) e la residua intersezione di questa superficie e di quella rigata, oltre γ^8 e λ, è tutta composta di rette, dunque quella superficie (che è affatto generale) conterrebbe $3.24-2.8-2.12=32$ rette: ciò che è assurdo.

Infatti supponiamo che ciò non sia, e indichiamo con g_p^r la serie speciale completa cui appartiene il gruppo $y' \dots y^{(p)}$. Se x_1 è un punto generico della curva C, la serie g_{p+1}^r, ottenuta aggiungendo x_1 ai gruppi di g_p^r, è ancora completa (*) e quindi il gruppo costituito da x e dai punti $y'_1 \dots y_1^{(p)}$ corrispondenti a x_1 dovrà appartenere a quella g_{p+1}^r, e dei p punti $g'_1 \dots y_1^{(p)}$ uno dovrà coincidere con x_1. Ora ciò è assurdo, se, come supponiamo i p punti corrispondenti per Σ a un punto generico di C sono diversi dal punto medesimo.

Da questo ragionamento segue che la serie lineare completa d'ordine $p+1$ cui appartengono i gruppi $(x_1 y' \dots y^{(p)})$ ed $(xy'_1 \dots y_1^{(p)})$ ha la dimensione uguale all'unità, e che quindi la corrispondenza Σ è pienamente individuata quando sia assegnato il gruppo (non speciale) di p punti corrispondenti a un punto qualunque x.

9° Ciò posto è facile dimostrare che esiste sempre una corrispondenza Σ, della specie considerata nel n° precedente, che faccia corrispondere a un punto qualunque x di C un gruppo qualunque (non speciale) di p punti $y' \dots y^{(p)}$.

Infatti sia x_1 un punto di C diverso da x e facciamo corrispondere ad x_1 quel gruppo di p punti $y'_1 \dots y_1^{(p)}$ che insieme a x dà un gruppo corresiduale al gruppo $(x_1 y' \dots y^{(p)})$. La corrispondenza Σ, che così si ottiene, fa corrispondere al punto x i punti $y' \dots y^{(p)}$, è a valenza -1, ed è priva di coincidenze, perchè se il punto x_2, per es., coincidesse con uno dei suoi p punti corrispondenti, per es., con y'_2, dall'essere corresiduali i due gruppi $(xx_2 y''_2 \dots y_2^{(p)})$ e $(x_2 y' \dots y^{(p)})$ si ricaverebbe la corresidualità dei gruppi $(y' \dots y^{(p)})$ e $(xy''_2 \dots y_2^{(p)})$ e il gruppo $(y' \dots y^{(p)})$ sarebbe speciale. Conseguentemente la corrispondenza Σ è una (p,p) di valenza -1 e si ha il teorema:

Le corrispondenze (p,p) di valenza (negativa e quindi) -1, o anche, *le corrispondenze (p,p) prive di coincidenze esistenti sopra una curva di genere p a moduli generali sono ∞^p: e una qualunque di esse è pienamente individuata quando sia assegnato*

(*) Per il *teorema di riduzione* dovuto al sig. Noether. Cfr. Bertini: *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* (" Ann. di Mat. ", serie II^a, vol. 22).

(in modo arbitrario) il gruppo (non speciale) dei p punti corrispondenti a un punto qualunque della curva.

10° Per brevità diciamo Σ una corrispondenza (p,p) a valenza -1, e cerchiamo quante di queste corrispondenze Σ sono simmetriche.

Sia Σ' una tale corrispondenza simmetrica e siano $y' \dots y^{(p)}$ i punti corrispondenti per essa al punto x: se diciamo $z'_i \dots z_i^{(p)}$ i punti corrispondenti a $y^{(i)}$, uno dei punti $z'_i \dots z_i^{(p)}$ dovrà coincidere con x.

Se poniamo $x = z'_i$ si avranno delle formule del tipo:

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{j=p} u_k(y^{(j)}) \equiv u_k(x) + \pi_k \qquad (k = 1 \dots p)$$

$$(6) \qquad u_k(x) + \sum_{j=2}^{j=p} u_k(z_i^{(j)}) \equiv u_k(y^{(i)}) + \pi_k \qquad (k = 1 \dots p)$$

e quindi, sommando, sarà:

$$(7) \qquad \sum_{j=2}^{j=p} [u_k(y^{(j)}) + u_k(z_i^{(j)})] = 2\pi_k \qquad (k = 1 \dots p),$$

ossia, i gruppi di $2p-2$ punti costituiti dai punti corrispondenti per Σ' a un punto qualunque x e a uno qualunque dei suoi punti corrispondenti $y^{(i)}$, eccettuati x ed $y^{(i)}$, appartengono a una medesima serie lineare d'ordine $2p-2$, g_{2p-2}.

I $p-1$ gruppi di g_{2p-2} passanti per y', ad es., e costituiti dai p punti corrispondenti ad x tranne $y^{(i)}$ $(i \neq 1)$ e dai p punti corrispondenti ad $y^{(i)}$ tranne x sono linearmente indipendenti, perchè $p-2$ qualunque di essi hanno comune un punto che non fa parte del rimanente, quindi individuano una serie lineare ∞^{p-2} contenuta in g_{2p-2} e avente un punto fisso nel punto y'. Ora y' è un punto generico di C, quindi la dimensione della serie g_{2p-2} è $p-1$ (non potendo essere maggiore di $p-1$) ed essa è proprio la *serie canonica* di C.

Ora consideriamo insieme ai punti $y' \dots y^{(p)}$ corrispondenti a x i punti $y'_1 \dots y_1^{(p)}$ corrispondenti a un altro punto qualunque x_1: sarà:

(8) $$\sum_{i=1}^{i=p} u_k(y^{(i)}) \equiv u_k(x) + \pi_k \qquad (k = 1 \dots p)$$

(9) $$\sum_{i=1}^{i=p} u_k(y_1^{(i)}) \equiv u_k(x_1) + \pi_k \qquad (k = 1 \dots p)$$

e quindi:

(10) $$\sum_{i=1}^{i=p} [u_k(y^{(i)}) + u_k(y_1^{(i)})] \equiv u_k(x) + u_k(x_1) + 2\pi_k : (k = 1 \dots p):$$

ma se si considera un gruppo qualunque della serie canonica la somma dei valori dell'integrale u_k nei suoi punti è congrua a $2\pi_k$, dunque:

Due punti qualunque di C *insieme a un gruppo qualunque della serie canonica dànno un gruppo di* $2p$ *punti corresiduale a quello costituito dai punti ad essi corrispondenti per* Σ'.

In particolare:

Un punto di C *contato due volte insieme a un gruppo qualunque della serie canonica dà un gruppo di* $2p$ *punti corresiduale a quello costituito dai suoi punti corrispondenti contato ciascuno due volte.*

Ora un punto x di C, contato due volte, insieme a un gruppo qualunque della serie canonica individua una serie completa g^p_{2p} con 2^{2p} gruppi (*) costituiti da p punti doppii, e di questi 2^{2p} gruppi, $2^{p-1}(2^p - 1)$ (*) sono costituiti dal punto x contato due volte insieme ai punti di un gruppo della serie canonica dato da $p - 1$ punti doppii, dunque il gruppo di p punti corrispondenti a x per una corrispondenza simmetrica Σ' (se esiste) è uno dei rimanenti:

$$2^{2p} - 2^{p-1}(2^p - 1)$$

gruppi di p punti doppii di quella g^p_{2p}.

11° Ebbene sia $y' \dots y^{(p)}$ uno di questi gruppi (certo non speciale) e consideriamo la corrispondenza Σ' (p,p) e a va-

(*) Cfr. ad es. Clebsch: *Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie* („Crelle's Journal„, Bd. 63).

lenza -1 (determinata), che fa corrispondere ad x i punti $y'\dots y^{(p)}$. Per essa varranno formule del tipo:

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} u_k(y^{(i)}) \equiv u_k(x) + \pi_k \qquad (k=1\dots p)$$

e, per ipotesi, la costante π_k sarà determinata da ciò che il suo doppio $2\pi_k$ deve essere una quantità congrua alla somma dei valori dell'integrale u_k nei punti di un gruppo qualunque della serie canonica: quindi se $y'_1\dots y_1^{(p)}$ sono i punti corrispondenti per Σ' a un altro punto qualunque x_1 di C, il gruppo $y'_1\dots y_1^{(p)}$ avrà con x_1 la stessa relazione che il gruppo $y'\dots y^{(p)}$ ha col punto x.

Inoltre supponiamo che quando x prende la posizione del punto y' i suoi punti corrispondenti siano $z'\dots z^{(p)}$: insieme alle (11) sarà:

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} u_k(z^{(i)}) \equiv u_k(y') + \pi_k \qquad (k=1\dots p)$$

e quindi:

$$u_k(y'') + \dots + u_k(y^{(p)}) + u_k(z') + \dots + u_k(z^{(p)}) \equiv u_k(x) + 2\pi_k.$$

Ciò significa, pel teorema d'Abel, che il gruppo $y''\dots y^{(p)}z'\dots z^{(p)}$ è corresiduale a tutti i gruppi costituiti dal punto x insieme ai punti di un gruppo qualunque della serie canonica: ma questi gruppi dànno evidentemente una g_{2p-1}^{p-1} completa, dunque dei punti $y''\dots y^{(p)}z'\dots z^{(p)}$ uno certamente coincide con x. Un tal punto non può essere uno dei punti $y^{(i)}$, dunque sarà uno dei punti $z^{(i)}$ e la corrispondenza Σ' sarà una corrispondenza simmetrica. Abbiamo con ciò il teorema:

Le corrispondenze (p,p) prive di coincidenze e simmetriche esistenti sopra una curva di genere p e a moduli generali sono in numero di $2^{2p} - 2^{p-1}(2^p - 1)$ *e si ottengono tutte nel modo detto sopra.*

12° Se nell'enunciato precedente si fa $p=1$, si ottiene il teorema ben noto che sopra una curva ellittica a modulo generale esistono solo tre involuzioni prive di coincidenze; se

invece si fa $p=3$, si trova che sopra una curva di genere 3 a moduli generali esistono soltanto 36 corrispondenze (3,3) simmetriche e prive di coincidenze.

Ora in una mia breve nota inserita nei *Mathematische Annalen* (*) ho dimostrato che ogni quartica piana generale può pensarsi come covariante S di altre 36, e sopra il covariante S di una quartica si ha subito una corrispondenza simmetrica (3,3) priva di coincidenze quando si considerino come corrispondenti due punti avuti per conica polare mista una retta doppia, dunque ricordando che la quartica piana è appunto di genere 3, possiamo dire che:

Le 36 corrispondenze (3,3) simmetriche e prive di coincidenze determinate sopra una quartica piana dalle altre 36 di cui essa è covariante S *sono le sole corrispondenze di quella natura esistente su di essa.*

Nella detta nota, per stabilire la proprietà citata, si parte dalla considerazione dei sistemi di cubiche seitangenti alla quartica piana e si mostra una stretta relazione fra le 36 quartiche di cui la data è covariante S e i suoi 36 sistemi di cubiche seitangenti di 2ª specie (cioè tali che mai i sei punti di contatto di una qualunque di esse giacciano sopra una conica): ora il lettore può verificare che tale processo presenta delle analogie con quello che qui si adopera pel caso generale di p qualunque, e che i teoremi che là si dànno sui triangoli polohessiani si deducono facilmente da quelli stabiliti qui al n° 10 e da considerazioni analoghe.

13° Un altro teorema sui triangoli polohessiani che segue subito da quello generale del n° 1 sulle corrispondenze a valenza negativa è il seguente:

Detti x ed x_1 due punti del covariante S *di una quartica e yzt, $y_1z_1t_1$ i loro rispettivi triangoli polohessiani, le due quaterne di punti $xy_1z_1t_1$ e x_1yzt possono assumersi come punti-base di due fasci di coniche proiettivi generanti il covariante medesimo.*

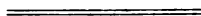
Esso permette di costruire una quartica Q quando si sappia che due suoi punti x od x_1 devono avere per triangoli polohes-

(*) Scorza: *Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali* (" Math. Ann. ", Bd. 52).

siani rispetto a un'altra quartica (non data), di cui Q deve essere covariante S, i due triangoli yzt, $y_1z_1t_1$ (inscritti in una medesima conica) e che inoltre essa deve passare per un nono punto u_1 (non situato sulla retta xx_1).

Infatti, per uno di quei teoremi a cui poco fa si alludeva, la quartica Q deve passare pei punti u_2, u_3 ove la conica circoscritta ai triangoli yzt, $y_1z_1t_1$ taglia la retta xx_1, e allora per quel che or ora abbiamo affermato la quartica Q è generata dai fasci di coniche aventi per punti-base i punti $xy_1z_1t_1$ e x_1yzt e riferiti proiettivamente, così che alle coniche del primo fascio passanti per u_1, u_2, u_3 corrispondano rispettivamente le coniche del secondo fascio passanti pei medesimi punti.

14° Infine osserviamo che, se si rappresenta la curva C di genere p sopra la curva speciale normale d'ordine $2p-2$ dello spazio S_{p-1}, si ottengono su questa $2^{2p}-2^{p-1}(2^p-1)$ corrispondenze fra i punti della curva e dei p-goni storti inscritti in essa perfettamente analoghe alle 36 corrispondenze fra i punti di una quartica e i loro triangoli polohessiani rispetto alle quartiche di cui quella data è covariante S.

Ma su ciò crediamo inutile insistere più oltre.

Sulle equazioni delle vibrazioni dei corpi elastici in coordinate curvilinee.

Nota del Prof. ORAZIO TEDONE.

1. — Riferiamo lo spazio ad un sistema di coordinate curvilinee, ortogonali, qualunque (q_1, q_2, q_3) e sia

$$ds^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2 \tag{1}$$

il quadrato dell' elemento lineare. Se indichiamo, allora, con $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ le componenti dello spostamento di un punto di un corpo elastico omogeneo ed isotropo, poniamo:

$$\left\{\begin{aligned} &\theta = \frac{1}{\nabla}\left(\frac{\partial Q_2 Q_3 \kappa_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_3 Q_1 \kappa_2}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_1 Q_2 \kappa_3}{\partial q_3}\right), \quad \nabla = Q_1 Q_2 Q_3 \\ &\varpi = \frac{1}{2Q_2Q_3}\left(\frac{\partial Q_3 \kappa_3}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2 \kappa_2}{\partial q_3}\right), \quad \chi = \frac{1}{2Q_3Q_1}\left(\frac{\partial Q_1 \kappa_1}{\partial q_3} - \frac{\partial Q_3 \kappa_3}{\partial q_1}\right), \\ &\rho = \frac{1}{2Q_1Q_2}\left(\frac{\partial Q_2 \kappa_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1 \kappa_1}{\partial q_2}\right), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

ed indichiamo con F_1, F_2, F_3 le componenti della forza applicata a ciascuna particella del corpo elastico, le equazioni indefinite delle vibrazioni di questo corpo, al tempo t, si potranno porre sotto la forma seguente:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial t^2} - \frac{b^2}{Q_1}\frac{\partial \theta}{\partial q_1} - \frac{2a^2}{Q_2Q_3}\left(\frac{\partial Q_2 \chi}{\partial q_3} - \frac{\partial Q_3 \rho}{\partial q_2}\right) - F_1 = 0 \\ &\frac{\partial^2 \kappa_2}{\partial t^2} - \frac{b^2}{Q_2}\frac{\partial \theta}{\partial q_2} - \frac{2a^2}{Q_3Q_1}\left(\frac{\partial Q_3 \rho}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1 \varpi}{\partial q_3}\right) - F_2 = 0 \\ &\frac{\partial^2 \kappa_3}{\partial t^2} - \frac{b^2}{Q_3}\frac{\partial \theta}{\partial q_3} - \frac{2a^2}{Q_1Q_2}\left(\frac{\partial Q_1 \varpi}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2 \chi}{\partial q_1}\right) - F_3 = 0 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

nelle quali a^2 e b^2 rappresentano, notoriamente, i quadrati delle velocità delle onde trasversali e longitudinali.

2. — In questa nota mi propongo di costruire, per $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ delle espressioni analitiche, in funzione di q_1, q_2, q_3 e t, analoghe a quelle date nella mia memoria: *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei ed isotropi* (*), per le componenti dello spostamento di un punto di un corpo elastico secondo tre assi cartesiani ortogonali e con metodo perfettamente analogo.

Consideriamo perciò lo spazio *euclideo* a quattro dimensioni di cui il quadrato dell'elemento lineare sia

$$dt_2 + Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2.$$

In questo spazio un punto è individuato da un sistema di valori delle coordinate t, q_1, q_2, q_3 ed ogni varietà a tre dimensioni $t =$ cost, immersa in esso, può essere identificata con lo spazio ordinario. Sia ora S_4 una porzione finita, qualunque di questo spazio a quattro dimensioni, limitata dalla varietà Σ a tre dimensioni, chiamiamo n la direzione della normale a Σ diretta verso l'interno di S_4, e poniamo:

$$(4)\quad \begin{cases} U_1 = \frac{\partial \kappa_1}{\partial t}\cos(nt) - b^2\theta\cos(nq_1) - 2a^2(\chi\cos(nq_3) - \rho\cos(nq_2)) \\ U_2 = \frac{\partial \kappa_2}{\partial t}\cos(nt) - b^2\theta\cos(nq_2) - 2a^2(\rho\cos(nq_1) - \hat{\omega}\cos(nq_3)) \\ U_3 = \frac{\partial \kappa_3}{\partial t}\cos(nt) - b^2\theta\cos(nq_3) - 2a^2(\hat{\omega}\cos(nq_2) - \chi\cos(nq_1)). \end{cases}$$

Se $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$; $\kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3$ sono due sistemi di funzioni regolari in S_4, le quali, interpretate come componenti di spostamenti, corrispondano ai due sistemi di forze F_1, F_2, F_3; F'_1, F'_2, F'_3 che sieno, esse pure, funzioni regolari in S_4 e, se supponiamo che Σ soddisfi alle solite condizioni generali rispetto all'iperpiano tangente, col solito processo di integrazioni per parti, si stabilisce agevolmente la formola fondamentale seguente:

$$(5)\quad \begin{cases} \int_{S_4}(F_1\kappa'_1 + F_2\kappa'_2 + F_3\kappa'_3)dS_4 - \int_{S_4}(F'_1\kappa_1 + F'_2\kappa_2 + F'_3\kappa_3)dS_4 \\ = \int_\Sigma(U'_1\kappa_1 + U'_2\kappa_2 + U'_3\kappa_3)\,d\Sigma - \int_\Sigma(U_1\kappa'_1 + U_2\kappa'_2 + U_3\kappa'_3)\,d\Sigma. \end{cases}$$

(*) " Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino „, anno 1896-97.

3. — Si vede, intanto, subito, che si soddisfa alle equazioni (3) ponendo:

$$(6) \qquad \kappa_1 = \frac{1}{Q_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \qquad \kappa_2 = \frac{1}{Q_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}, \qquad \kappa_3 = \frac{1}{Q_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}$$

purchè sia:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - b^2\Delta^2\varphi = 0, \qquad F_1 = F_2 = F_3 = 0$$

dove, come al solito:

$$\Delta^2\varphi = \frac{1}{\nabla}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_2Q_3}{Q_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3Q_1}{Q_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_1Q_2}{Q_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right].$$

Possiamo quindi porre

$$\varphi = \frac{b^2(t'-t)^2}{r} + r$$

dove r indica la distanza fra il punto fisso (t', q'_1, q'_2, q'_3) ed il punto variabile (t', q_1, q_2, q_3). Chiamiamo $\kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3$ questo sistema di integrali particolari delle equazioni (3) e distinguiamo, in generale, con un apice le quantità costruite con $\kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3$ dalle analoghe costruite con $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$. Si avrà allora:

$$(7) \qquad \kappa'_1 = \left[1 - \frac{b^2(t'-t)^2}{r^2}\right]\frac{1}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1}, \qquad \kappa'_2 = \left[1 - \frac{b^2(t'-t)^2}{r^2}\right]\frac{1}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_2},$$

$$\kappa'_3 = \left[1 - \frac{b^2(t'-t)^2}{r^2}\right]\frac{1}{Q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3};$$

$$\theta' = \frac{2}{r}, \qquad \hat{\omega}' = \chi' = \rho' = 0;$$

$$(8) \qquad \begin{cases} U'_1 = \dfrac{2b^2(t'-t)}{r^2}\dfrac{1}{Q_1}\dfrac{\partial r}{\partial q_1}\cos(nt) - \dfrac{2b^2}{r}\cos(nq_1) \\ U'_2 = \dfrac{2b^2(t'-t)}{r^2}\dfrac{1}{Q_2}\dfrac{\partial r}{\partial q_2}\cos(nt) - \dfrac{2b^2}{r}\cos(nq_2) \\ U'_3 = \dfrac{2b^2(t'-t)}{r^2}\dfrac{1}{Q_3}\dfrac{\partial r}{\partial q_3}\cos(nt) - \dfrac{2b^2}{r}\cos(nq_3) \end{cases}$$

Facciamo poi coincidere i valori $\kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3$ che compaiono nella formola fondamentale (5) con i valori (7) e, nella stessa formola, scegliamo S_4 come nella memoria citata, per la determinazione di θ, in modo, cioè, che sia limitato fra la varietà conica di rotazione B avente il vertice nel punto fisso (t', q'_1, q'_2, q'_3), l'asse di rotazione α parallelo all'asse t e di equazione $b(t'-t) - r = 0$, ed una porzione di una varietà qualunque, a tre dimensioni Σ. Come allora, chiameremo $S_{4,b}$ l'S_4 così determinato e con Σ_b la porzione di Σ che le appartiene come contorno. Per semplicità, supporremo che in tutti i punti di $S_{4,b}$ sia $t' > t$. Poichè $\kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3$ diventano infinite in $S_{4,b}$, per poter applicare la (5) al nostro caso, escluderemo, dapprima, da $S_{4,b}$ quella sua porzione che è compresa nella varietà cilindrica di rotazione intorno alla stessa retta α, di equazione $r = \epsilon$, dove ϵ è una costante piccola ad arbitrio, e che chiameremo la varietà C. Le parti che allora rimangono di $S_{4,b}$ e di Σ_b le chiameremo $S'_{4,b}$ e Σ'_b, mentre chiameremo Σ_b'' e Σ_b''' le parti di B e di C che insieme a Σ'_b formano il contorno completo di $S'_{4,b}$. Scegliendo ora la direzione positiva della normale al contorno di $S'_{4,b}$, com'è stato già detto, si avrà nei punti di Σ_b'':

$$(9)\quad \begin{cases} \cos(nt) = -\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}, \quad \cos(nq_1) = -\dfrac{1}{Q_1}\dfrac{\partial r}{\partial q_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}, \\[2mm] \cos(nq_2) = -\dfrac{1}{Q_2}\dfrac{\partial r}{\partial q_2}\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}, \quad \cos(nq_3) = -\dfrac{1}{Q_3}\dfrac{\partial r}{\partial q_3}\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}, \end{cases}$$

mentre nei punti di C si avrà:

$$(10)\quad \begin{cases} \cos(nt) = 0, \\[2mm] \cos(nq_1) = \dfrac{1}{Q_1}\dfrac{\partial r}{\partial q_1}, \quad \cos(nq_2) = \dfrac{1}{Q_2}\dfrac{\partial r}{\partial q_2}, \quad \cos(nq_3) = \dfrac{1}{Q_3}\dfrac{\partial r}{\partial q_3}. \end{cases}$$

Di qui discende subito che nei punti Σ_b'' è:

$$(11)\quad \begin{cases} \kappa'_1 = \kappa'_2 = \kappa'_3 = 0 \\[2mm] U'_1 = -\dfrac{2}{Q_1}\dfrac{\partial r}{\partial q_1}\dfrac{b^2}{r\sqrt{1+b^2}}\left[\dfrac{b(t'-t)}{r} - 1\right] = 0, \quad U'_2 = U'_3 = 0, \end{cases}$$

mentre nei punti di C è:

$$(12)\left\{\begin{array}{l}\kappa'_1=\left[1-\frac{b^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right]\frac{1}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1},\\ \kappa'_2=\left[1-\frac{b^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right]\frac{1}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_2},\quad \kappa'_3=\left[1-\frac{b^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right]\frac{1}{Q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\end{array}\right.$$

$$(13)\quad U'_1=-\frac{2b^2}{\epsilon}\frac{1}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1},\quad U'_2=-\frac{2b^2}{\epsilon}\frac{1}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_2},\quad U'_3=-\frac{2b^2}{\epsilon}\frac{1}{Q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}$$

$$(14)\left\{\begin{array}{l}U_1=-b^2\frac{\theta}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1}-2a^2\left(\frac{\chi}{Q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}-\frac{\rho}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)\\ U_2=-b^2\frac{\theta}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}-2a^2\left(\frac{\rho}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1}-\frac{\varpi}{Q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)\\ U_3=-b^2\frac{\theta}{Q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}-2a^2\left(\frac{\varpi}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}-\frac{\chi}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1}\right).\end{array}\right.$$

Nella formola (5), e nelle ipotesi fatte in questo numero, gli integrali estesi a Σ_b'' svaniscono identicamente. Nella formola rimanente facciamo poi tendere ϵ a zero. Chiamando t_0 il valore di t che corrisponde al punto d'incontro dell'asse a con la varietà Σ, si trova subito

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma_b'''}(U'_1\kappa_1+U'_2\kappa_2+U'_3\kappa_3)\,d\Sigma_b'''$$
$$=-2b^2\int_{t_0}^{t'}dt\lim_{\varepsilon=0}\epsilon\int_{\omega}d\omega\left(\frac{\kappa_1}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1}+\frac{\kappa_2}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}+\frac{\kappa_3}{Q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)=0,$$
$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma_b'''}(U_1\kappa'_1+U_2\kappa'_2+U_3\kappa'_3)\,d\Sigma_b'''=4\pi b^4\int_{t_0}^{t'}(t'-t)^2\theta(t,q'_i)\,dt$$

per cui abbiamo la formola

$$(15)\quad 4\pi b^4\int_{t_0}^{t'}(t'-t)^2\theta(t,q'_i)\,dt$$
$$=\int_{S_{4,b}}\left[\frac{b^2(t'-t)^2}{r^2}-1\right]\left(\frac{F_1}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1}+\frac{F_2}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}+\frac{F_3}{Q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)dS_{4,b}$$
$$+\int_{\Sigma_b}\left[\frac{b^2(t'-t)^2}{r^2}-1\right]\left(\frac{U_1}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1}+\frac{U_2}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}+\frac{U_3}{Q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)d\Sigma_b$$
$$+2b^2\int_{\Sigma_b}\frac{t'-t}{r^2}\cos(nt)\left(\frac{\kappa_1}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1}+\frac{\kappa_2}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}+\frac{\kappa_3}{Q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)d\Sigma_b$$
$$-2b^2\int_{\Sigma_b}[\kappa_1\cos(nq_1)+\kappa_2\cos(nq_2)+\kappa_3\cos(nq_3)]\frac{d\Sigma_b}{r}.$$

4. — Sia ora (x, y, z) un sistema di coordinate cartesiane ortogonali a cui possiamo sempre riferire lo spazio ordinario, in modo che

$$Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Allora un altro sistema di integrali particolari delle equazioni (3) si avrà ponendo:

$$(16) \qquad \kappa_1 = \frac{1}{Q_2 Q_3}\frac{d(\psi x)}{d(q_2 q_3)}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{Q_3 Q_1}\frac{d(\psi x)}{d(q_3 q_1)}, \quad \kappa_3 = \frac{1}{Q_1 Q_2}\frac{d(\psi x)}{d(q_1 q_2)} \; (*)$$

dove

$$\frac{d(\psi x)}{d(q_2 q_3)} = \frac{\partial \psi}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3} - \frac{\partial \psi}{\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_2}, \; \ldots\ldots$$

nella ipotesi che sia:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - a^2 \Delta^2 \psi = 0, \qquad F_1 = F_2 = F_3 = 0.$$

(*) Della verità di quanto asseriamo potremmo convinverci facilmente osservando che le espressioni (16) di $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ si possono ottenere esprimendo il secondo gruppo degli integrali particolari (6) della memoria acc. nelle coordinate q_1, q_2, q_3 e poi, interpretate queste espressioni come componenti di un segmento secondo gli assi x, y, z, prendendo le componenti, di questo stesso segmento, secondo le direzioni q_1, q_2, q_3. Qui vogliamo far vedere come la stessa cosa si possa dimostrare direttamente il che non ci sembra del tutto inutile. Perciò osserviamo che quando le κ sono date dalle formole (16) è:

$$\theta = 0; \quad 2\varpi = \frac{1}{Q_2 Q_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3}{Q_1 Q_2}\frac{d(\psi x)}{d(q_1 q_2)}\right) - \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_2}{Q_3 Q_1}\frac{d(\psi x)}{d(q_3 q_1)}\right)\right], \; 2\chi = \ldots, \; 2\rho = \ldots$$

quindi:

$$a) \quad 2\left(\frac{\partial Q_2 \chi}{\partial q_3} - \frac{\partial Q_3 \rho}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial}{\partial q_3}\left\{\frac{Q_2}{Q_3 Q_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_1}{Q_2 Q_3}\frac{d(\psi x)}{d(q_2 q_3)}\right) - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_3}{Q_1 Q_2}\frac{d(\psi x)}{d(q_1 q_2)}\right)\right]\right\}$$

$$- \frac{\partial}{\partial q_2}\left\{\frac{Q_3}{Q_1 Q_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_2}{Q_3 Q_1}\frac{d(\psi x)}{d(q_3 q_1)}\right) - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_1}{Q_2 Q_3}\frac{d(\psi x)}{d(q_2 q_3)}\right)\right]\right\}.$$

Osserviamo poi che la seconda parte di questa espressione si ottiene dalla prima permutando gli indici 2 e 3 e cambiando il segno, possiamo

Per ψ possiamo prendere quindi la funzione

$$\frac{a^2(t'-t)^2}{r}+r$$

dove r ha lo stesso significato di prima. I valori di $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$

---

quindi limitarci a trasformare la prima parte. Questa si può subito porre sotto la forma

$$b)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{1}{\nabla}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_1Q_2}{Q_3}\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\right]+\frac{\partial^2\psi}{\partial q_2\partial q_3}\frac{1}{\nabla}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_1Q_2}{Q_3}\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{Q^2_2}{Q^2_3}\frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q^2_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)\right]$$
$$-\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{1}{\nabla}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_1Q_2}{Q_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right]-\frac{\partial^2 x}{\partial q_2\partial q_3}\frac{1}{\nabla}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_1Q_2}{Q_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{Q^2_2}{Q^2_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q^2_2}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\right]$$
$$-\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{1}{\nabla}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_2Q_3}{Q_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)\right]-\frac{\partial^2 x}{\partial q_2\partial q_3}\frac{1}{\nabla}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_2Q_3}{Q_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{Q^2_2}{Q^2_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q^2_2}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\right]$$
$$+\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{1}{\nabla}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_2Q_3}{Q_1}\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)\right]+\frac{\partial^2\psi}{\partial q_2\partial q_3}\frac{1}{\nabla}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_2Q_3}{Q_1}\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{Q^2_2}{Q^2_1}\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q^2_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)\right].$$

Osserviamo ora che i termini della prima colonna di questa espressione fanno parte dello sviluppo di $\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}(\Delta^2 x)-\frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_3}(\Delta^2\psi)$. Aggiungendo e sottraendo contemporaneamente, nella $b)$ gli altri termini che sono necessarii per completare l'ultima espressione scritta ed osservando anche che nella $b)$ possiamo trascurare ogni termine od ogni gruppo di termini, il quale resti inalterato permutando gli indici 2 e 3 poichè si distruggerebbe con il termine, od il gruppo di termini, corrispondenti dello sviluppo della seconda parte di $a)$, resta per la espressione $b)$ l'altra:

$$c)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}(\Delta^2 x)-\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}(\Delta^2\psi)+\frac{1}{Q^2_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial q_1\partial q_2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_3}-\frac{2}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)$$
$$-\frac{1}{Q^2_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial q_1\partial q_3}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_2}-\frac{2}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)$$

costruiti, per mezzo delle (16), con questa funzione speciale, li indicheremo con κ_1'', κ_2'', κ_3'', e così distingueremo con un doppio

---

$$+2\frac{\partial^2\psi}{\partial q_2\partial q_3}\left[\frac{1}{Q^2_3}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2_3}-\frac{1}{Q^2_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_3}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)\frac{\partial x}{\partial q_3}-\frac{1}{Q^2_1 Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_1}\right]$$

$$-\frac{2}{Q^3_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_2}-\frac{2}{Q^2_3}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2_3}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_2\partial q_3}-\frac{2}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)$$

$$+\frac{2}{Q^2_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\left[\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial^2 x}{\partial q_2\partial q_3}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial q_1\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)\frac{\partial x}{\partial q_2}\right]$$

$$+2\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\left[\frac{1}{Q^3_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial^2 x}{\partial q_2}-\frac{1}{Q^2_3 Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2_2}+\frac{1}{Q^2_1 Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_3}\right.$$

$$-\frac{1}{Q_2 Q_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)\frac{\partial x}{\partial q_3}-\frac{1}{Q^2_1 Q_2}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial q_1\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{1}{Q_2 Q^2_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_3}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)\frac{\partial x}{\partial q_3}$$

$$\left.+\frac{1}{Q^2_1 Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)\frac{\partial x}{\partial q_1}\right]$$

$$+\frac{2}{Q^2_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\left[\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_3}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial q_2\partial q_3}+\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)\frac{\partial x}{\partial q_2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{Q_2 Q^2_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_3}\right)\frac{\partial x}{\partial q_2}\right].$$

In questa espressione scambiamo gli indici 2 e 3 ed il risultato col segno cambiato aggiungiamolo alla stessa *c*). Tenendo presenti le relazioni:

$$\Delta^2 x = 0$$

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial q_2\partial q_3}=\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2},\quad \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)+\frac{1}{Q^2_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}=0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q_2\partial q_3}=\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial q^2_1}=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_1}-\frac{Q_1}{Q^2_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_2}-\frac{Q_1}{Q^2_0}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_3}$$

e le altre relazioni che si deducono da queste permutando circolarmente gli indici 1, 2, 3, si trova subito che svaniscono i coefficienti di tutte le derivate di ψ e resta

$$2\left(\frac{\partial Q_2\chi}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3\rho}{\partial q_2}\right)=\frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_2}(\Delta^2\psi)-\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_3}(\Delta^2\psi),$$

donde si ricava facilmente la dimostrazione del nostro asserto.

apice le quantità costruite con $\kappa_1'', \kappa_2'', \kappa_3''$ dalle corrispondenti costruite con $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$. Avremo allora:

$$(17)\left\{\begin{aligned} &\kappa_1''=\frac{1}{Q_2Q_3}\frac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}\right],\quad \kappa_2''=\frac{1}{Q_3Q_1}\frac{d(rx)}{d(q_3q_1)}\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}\right],\\ &\kappa_3''=\frac{1}{Q_1Q_2}\frac{d(rx)}{d(q_1q_2)}\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}\right],\end{aligned}\right.$$

$$(18)\qquad U_1''=\frac{2a^2}{Q_2Q_3}\frac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\frac{t'-t}{r^2}\cos(nt)$$

$$-a^2\left\{\frac{\cos(nq_3)}{Q_3Q_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_1}{Q_2Q_3}\frac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\right)-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_3}{Q_2Q_1}\frac{d(rx)}{d(q_1q_2)}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(nq_2)}{Q_1Q_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_2}{Q_3Q_1}\frac{d(rx)}{d(q_3q_1)}\right)-\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_1}{Q_3Q_2}\frac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\right)\right]\right\}\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}\right]$$

$$-2a^4\left\{\frac{\cos(nq_3)}{Q_3Q_1}\left[\frac{Q_1}{Q_2Q_3}\frac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\frac{\partial r}{\partial q_3}-\frac{Q_3}{Q_2Q_1}\frac{d(rx)}{d(q_1q_2)}\frac{\partial r}{\partial q_1}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(nq_2)}{Q_1Q_2}\left[\frac{Q_2}{Q_3Q_1}\frac{d(rx)}{d(q_3q_1)}\frac{\partial r}{\partial q_1}-\frac{Q_1}{Q_3Q_2}\frac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\frac{\partial r}{\partial q_2}\right]\right\}\frac{(t'-t)^2}{r^2},$$

. . . .

ed omettiamo di scrivere i valori di U_2'', U_3'' perchè si deducono subito dal valore di U_1'', permutando circolarmente gli indici 1, 2, 3.

Facciamo ora nella formola (5), coincidere $\kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3$ con i valori di $\kappa_1'', \kappa_2'', \kappa_3''$ dati dalle (17) e scegliamo S_4 come abbiamo fatto nella memoria più volte citata, per la determinazione di $\hat{\omega}$, in modo cioè che sia limitato fra la varietà conica di rotazione A avente lo stesso vertice e lo stesso asse di rotazione α della varietà B, di equazione $a(t'-t)-r=0$, e la porzione Σ_a della stessa varietà Σ di prima. Chiamiamo $S_{4,a}$ la porzione di spazio a quattro dimensioni così determinata e con $S'_{4,a}$ la porzione di $S_{4,a}$ che resta quando facciamo astrazione da quella sua parte che è compresa nella varietà cilindrica C. Indichiamo ancora con Σ'_a la porzione di Σ_a che resta dopo questa esclusione e con Σ_a'', Σ_a''' le parti di A e di C che insieme a Σ'_a formano il contorno completo di $S'_{4,a}$. In $S'_{4,a}$, $\kappa_1'', \kappa_2'', \kappa_3''$ restano

finite e possiamo applicare la (5). Tenendo conto ora che nei punti di Σ_ϵ'':

$$
(19)\quad \begin{cases} \cos(nt) = -\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}\,, \qquad \cos(nq_1) = -\dfrac{1}{Q_1}\dfrac{\partial r}{\partial q_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,, \\[2ex] \cos(nq_2) = -\dfrac{1}{Q_2}\dfrac{\partial r}{\partial q_2}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,, \qquad \cos(nq_3) = -\dfrac{1}{Q_3}\dfrac{\partial r}{\partial q_2}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,, \end{cases}
$$

si trova subito che nei punti di Σ_ϵ'' è:

$$
(20)\quad \begin{cases} \kappa_1'' = \kappa_2'' = \kappa_3'' = 0 \\[1ex] U_1'' = -\dfrac{2a^2}{Q_2Q_3}\dfrac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\dfrac{t'-t}{r^2}\left[1-\dfrac{a(t'-t)}{r}\right] = 0, \quad U_2'' = U_3'' = 0 \end{cases}
$$

giacchè

$$
\frac{d(rx)}{d(q_1q_2)}\frac{\partial r}{\partial q_2}\frac{\partial r}{\partial q_1} + \frac{d(rx)}{d(q_3q_1)}\frac{\partial r}{\partial q_3}\frac{\partial r}{\partial q_1} = -\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2\frac{d(rx)}{d(q_2q_3)}.
$$

Così, tenendo conto che nei punti di C valgono le (10) si trova che negli stessi punti è:

$$
(21)\quad \begin{cases} \kappa_1'' = \dfrac{1}{Q_2Q_3}\dfrac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\left[1-\dfrac{a^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right], \\[2ex] \kappa_2'' = \dfrac{1}{Q_3Q_1}\dfrac{d(rx)}{d(q_3q_1)}\left[1-\dfrac{a^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right], \quad \kappa_3'' = \dfrac{1}{Q_1Q_2}\dfrac{d(rx)}{d(q_1q_2)}\left[1-\dfrac{a^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right], \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
(22)\quad U_1'' = &-\frac{a^2}{Q_2Q_3}\left[\left(\frac{1}{Q_3^2}\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_3}x\right)}{d(q_2q_3)} - \frac{1}{Q_1^2}\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}x\right)}{d(q_1q_2)}\right)\frac{\partial r}{\partial q_3}\right. \\
&\left.-\left(\frac{1}{Q_1^2}\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}x\right)}{d(q_3q_1)} - \frac{1}{Q_2^2}\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_2}x\right)}{d(q_2q_3)}\right)\frac{\partial r}{\partial q_2}\right]\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right] \\
&-\frac{a^2}{Q_2Q_3}\left[\left(\frac{1}{Q_3^2}\frac{d\left(r\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)}{d(q_2q_3)} - \frac{1}{Q_1^2}\frac{d\left(r\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)}{d(q_1q_2)}\right)\frac{\partial r}{\partial q_3}\right. \\
&\left.-\left(\frac{1}{Q_1^2}\frac{d\left(r\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)}{d(q_3q_1)} - \frac{1}{Q_2^2}\frac{d\left(r\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)}{d(q_2q_3)}\right)\frac{\partial r}{\partial q_2}\right]\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$-\frac{a^2}{Q_1}\left\{\frac{1}{Q^2_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\left[\frac{d(rx)}{d(q_2 q_3)}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_1}{Q_2 Q_3}\right)-\frac{d(rx)}{d(q_1 q_2)}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_3}{Q_2 Q_1}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{Q^2_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}\left[\frac{d(rx)}{d(q_3 q_1)}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_2}{Q_3 Q_1}\right)-\frac{d(rx)}{d(q_2 q_3)}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_1}{Q_2 Q_3}\right)\right]\right\}\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right]$$

$$-\frac{2a^4}{Q_2 Q_3}\frac{d(rx)}{d(q_2 q_3)}\frac{(t'-t)^2}{\epsilon^3}$$

. . . .

Il primo gruppo di termini di U_1'' si può poi trasformare, opportunamente, come segue, quando si tenga conto della relazione:

$$\frac{1}{Q^2_1}\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{Q^2_2}\left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{Q^2_3}\left(\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)^2=1.$$

Si ha intanto

$$\left(\frac{1}{Q^2_2}\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_3}x\right)}{d(q_2 q_3)}-\frac{1}{Q^2_1}\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}x\right)}{d(q_1 q_2)}\right)\frac{\partial r}{\partial q_3}-\left(\frac{1}{Q^2_1}\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}x\right)}{d(q_3 q_1)}-\frac{1}{Q^2_2}\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_2}x\right)}{d(q_2 q_3)}\right)\frac{\partial r}{\partial q_2}$$

$$=\frac{1}{Q^2_1}\frac{\partial x}{\partial q_1}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial r}{\partial q_3}-\frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_3}\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)$$

$$-\frac{\partial x}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q^2_1}\frac{\partial^2 r}{\partial q^2_1}\frac{\partial r}{\partial q_3}+\frac{1}{Q^2_2}\frac{\partial^2 r}{\partial q_2 \partial q_3}\frac{\partial r}{\partial q_2}+\frac{1}{Q^2_3}\frac{\partial^2 r}{\partial q^2_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)$$

$$+\frac{\partial x}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q^2_1}\frac{\partial^2 r}{\partial q^2_1}\frac{\partial r}{\partial q_2}+\frac{1}{Q^2_2}\frac{\partial^2 r}{\partial q^2_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}+\frac{1}{Q^2_3}\frac{\partial^2 r}{\partial q_2 \partial q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)$$

$$=\frac{1}{Q^2_1}\left[\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}r\right)}{d(q_2 q_3)}+\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}r\right)}{d(q_3 q_1)}+\frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}r\right)}{d(q_1 q_2)}\right]$$

$$-\frac{\partial x}{\partial q_2}\left[\frac{1}{Q^3_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{Q^3_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{Q^3_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_3}\left(\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)^2\right]$$

$$+\frac{\partial x}{\partial q_3}\left[\frac{1}{Q^3_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{Q^3_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{Q^3_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\left(\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)^2\right].$$

Inoltre:

$$\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}r\right)}{d(q_2 q_3)}=\frac{d\left(\Sigma\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1},r\right)}{d(q_2 q_3)}=\Sigma\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}r\right)}{d(q_2 q_3)}+\Sigma\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial x}r\right)}{d(q_2 q_3)}$$

dove la sommatoria va estesa alle lettere x, y, z;

$$\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial x} r\right)}{d(q_2 q_3)} = \frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial x} r\right)}{d(xy)} \frac{d(xy)}{d(q_2 q_3)} + \frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial x} r\right)}{d(yz)} \frac{d(yz)}{d(q_2 q_3)} + \frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial x} r\right)}{d(zx)} \frac{d(zx)}{d(q_2 q_3)}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{d(xy)}{d(q_2 q_1)} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{d(zx)}{d(q_2 q_3)} \frac{\partial r}{\partial z}\right]$$

per essere:

$$\frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial x} r\right)}{d(xy)} = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial x} r\right)}{d(yz)} = 0, \quad \frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial x} r\right)}{d(zx)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Quindi

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1} r\right)}{d(q_2 q_3)} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1} r\right)}{d(q_3 q_1)} + \frac{\partial x}{\partial q_3} \frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1} r\right)}{d(q_1 q_2)}$$

$$= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{d\left(x \frac{\partial x}{\partial q_1} r\right)}{d(q_1 q_2 q_3)} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d\left(x \frac{\partial y}{\partial q_1} r\right)}{d(q_1 q_2 q_3)} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{d\left(x \frac{\partial z}{\partial q_1} r\right)}{d(q_1 q_2 q_3)} + \frac{\nabla}{r}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial r}{\partial y}\right)$$

$$= \sum_1^3 {}_i \frac{1}{Q^2_i} \frac{\partial r}{\partial q_i}\left[\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{d\left(x \frac{\partial x}{\partial q_1} r\right)}{d(q_1 q_2 q_3)} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{d\left(x \frac{\partial y}{\partial q_1} r\right)}{d(q_1 q_2 q_3)} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{d\left(z \frac{\partial z}{\partial q_1} r\right)}{d(q_1 q_2 q_3)}\right] + \frac{Q^2_1}{r} \frac{d(rx)}{d(q_2 q_3)}$$

e finalmente:

$$-\frac{a^2}{Q_2 Q_3}\left[\left(\frac{1}{Q^2_3} \frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_3} x\right)}{d(q_2 q_3)} - \frac{1}{Q^2_1} \frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1} x\right)}{d(q_1 q_2)}\right) \frac{\partial r}{\partial q_3}\right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{Q^2_1} \frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_1} x\right)}{d(q_2 q_1)} - \frac{1}{Q^2_2} \frac{d\left(\frac{\partial r}{\partial q_2} x\right)}{d(q_2 q_3)}\right) \frac{\partial r}{\partial q_2}\right]\left[1 - \frac{a^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right]$$

$$= \frac{a^2}{Q_2 Q_3}\left\{\frac{\partial x}{\partial q_2}\left[\frac{1}{Q^3_1} \frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{Q^3_2} \frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{Q^3_3} \frac{\partial Q_3}{\partial q_3}\left(\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)^2\right]\right.$$

$$\left. -\frac{\partial x}{\partial q_3}\left[\frac{1}{Q^3_1} \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{Q^3_2} \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{Q^3_3} \frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\left(\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)^2\right]\right\}\left[1 - \frac{a^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right]$$

$$
-\frac{a^2}{Q_1\nabla}\sum_1^3{}_i\frac{1}{Q^2_i}\frac{\partial r}{\partial q_i}\left[\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{d\left(x\frac{\partial x}{\partial q_1}r\right)}{d(q_1q_2q_3)}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{d\left(x\frac{\partial y}{\partial q_1}r\right)}{d(q_1q_2q_3)}\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{d\left(x\frac{\partial z}{\partial q_1}r\right)}{d(q_1q_2q_3)}\right]\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right]
$$

$$
-\frac{a^2}{Q_2Q_3}\frac{1}{\epsilon}\frac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right].
$$

Notiamo, in ultimo, che i valori di U_1, U_2, U_3 su C sono sempre dati dalle (14).

Possiamo ora calcolare facilmente quello che diventa la formola (5) quando ϵ tende a zero. Intanto in virtù delle (20) gli integrali estesi a Σ_a'' si annullano identicamente, mentre è:

$$
\tag{23}\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma_a'''}(U_1\kappa_1''+U_2\kappa_2''+U_3\kappa_3'')\,d\Sigma_a'''
$$

$$
=\frac{16\pi}{3}a^4\int_{t_0}^{t'}(t'-t)^2dt\left[\frac{1}{(Q_1)}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)\hat{\omega}(t,q'_i)+\frac{1}{(Q_2)}\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\chi(t,q'_i)\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{(Q_3)}\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\rho(t,q'_i)\right]
$$

e le quantità del secondo membro sotto l'integrale, messe fra parentesi, vanno prese per $q_i=q'_i$. Si ha pure egualmente:

$$
a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma''_a}\left\{\frac{\partial x}{\partial q_3}\left[\frac{1}{Q^3_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{Q^3_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{Q^3_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_3}\left(\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)^2\right]\right.
$$

$$
-\frac{\partial x}{\partial q_3}\left[\frac{1}{Q^3_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\left(\frac{\partial r}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{Q^3_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\left(\frac{\partial r}{\partial q_2}\right)^2\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{1}{Q^3_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\left(\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)^2\right]\right\}\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right]\frac{\kappa_1}{Q_2Q_3}\,d\Sigma_a'''
$$

$$
=-\frac{4\pi a^4}{3}\int_{t_0}^{t'}(t'-t)^2dt\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\left[\frac{1}{(Q_1)}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)+\frac{1}{(Q_2)}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)+\frac{1}{(Q_3)}\left(\frac{\partial Q_3}{\partial q_3}\right)\right]\right.
$$

$$
\left.-\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\left[\frac{1}{(Q_1)}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)+\frac{1}{(Q_2)}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\right)+\frac{1}{(Q_3)}\left(\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\right)\right]\right\}\frac{\kappa_1(t,q'_i)}{(Q_2)(Q_3)};
$$

$$
-a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma_a'''}\sum_1^3{}_i\frac{1}{Q^2_i}\frac{\partial r}{\partial q_i}\left[\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{d\left(x\frac{\partial x}{\partial q_1}r\right)}{d(q_1q_2q_3)}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{d\left(x\frac{\partial y}{\partial q_i}r\right)}{d(q_1q_2q_3)}\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{d\left(x\frac{\partial z}{\partial q_1}r\right)}{d(q_1q_2q_3)}\right]\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{\epsilon^2}\right]\frac{\kappa_1}{Q_1\nabla}\,d\Sigma_a'''
$$

$$= \frac{4\pi a^4}{3}\int_{t_0}^{t'}(t'-t)^2 dt\left[-\frac{d\left(xy\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)}{d(xyz)}+\frac{d\left(x\frac{\partial z}{\partial q_1}z\right)}{d(xyz)}\right]\frac{\kappa_1(t,q'_i)}{(Q_1)}$$

$$= \frac{8\pi a^4}{3}\int_{t_0}^{t'}(t'-t)^2 dt\left[\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)-\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\right]\frac{\kappa_1(t,q'_i)}{(\nabla)};$$

$$-a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma_\varepsilon'''}\frac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{\varepsilon^2}\right]\frac{\kappa_1}{\varepsilon Q_2Q_3}\,d\Sigma_\varepsilon'''$$

$$= \frac{4\pi a^4}{3}\int_{t_0}^{t'}\frac{(t'-t)^2 dt}{(\nabla)}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\frac{\partial (Q_1)\kappa_1(t,q'_i)}{\partial q'_2}-\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\frac{\partial (Q_1)\kappa_1(t,q'_i)}{\partial q'_3}\right] (^*);$$

$$-a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma_\varepsilon'''}\left[\left(\frac{1}{Q^2_3}\frac{d\left(r\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)}{d(q_2q_3)}-\frac{1}{Q^2_1}\frac{d\left(r\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)}{d(q_1q_2)}\right)\frac{\partial r}{\partial q_2}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{Q^2_1}\frac{d\left(r\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)}{d(q_3q_1)}-\frac{1}{Q^2_2}\frac{d\left(r\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)}{d(q_2q_3)}\right)\frac{\partial r}{\partial q_3}\right]\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{\varepsilon^2}\right]\frac{\kappa_1}{Q_2Q_3}d\Sigma_\varepsilon'''=0;$$

$$-a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma_\varepsilon'''}\left\{\frac{1}{Q^2_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\left[\frac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_1}{Q_2Q_3}\right)-\frac{d(rx)}{d(q_1q_2)}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_3}{Q_2Q_1}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{Q^2_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}\left[\frac{d(rx)}{d(q_3q_1)}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_2}{Q_3Q_1}\right)-\frac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_1}{Q_2Q_3}\right)\right]\right\}\left[1-\frac{a^2(t'-t)^2}{\varepsilon^2}\right]\frac{\kappa_1}{Q_1}\,d\Sigma_\varepsilon'''$$

$$= -\frac{4\pi a^4}{3}\int_{t_0}^{t'}(t'-t)^2 dt\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{(Q_1)}{(Q_2)(Q_3)}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{(Q_1)}{(Q_2)(Q_3)}\right)\right]\frac{\kappa_1(t,q'_i)}{(Q_1)};$$

(*) Per rendersi conto esatto di questo passaggio al limite è necessario tener presente che se σ è la superficie ed S il volume di una sfera ordinaria di raggio ϵ e di centro $(q'_1 q'_2 q'_3)$ è

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_\sigma \varphi\frac{\partial r}{\partial q_i}\frac{\partial\sigma}{\epsilon^2}=\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\epsilon^3}\int_\sigma Q_i\nabla\varphi\cos(rq_i)\frac{d\sigma}{\nabla}$$

$$=\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\epsilon^3}\int_S\frac{\partial}{\partial q_i}(\nabla\varphi)\frac{dS}{\nabla}=\frac{4\pi}{3}\left[\frac{1}{\nabla}\frac{\partial}{\partial q_i}(\nabla\varphi)\right]_{q_i=q'_i}.$$

$$-2a^4\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma_a'''}\frac{d(rx)}{d(q_2q_3)}\,\frac{(t'-t)^2}{\varepsilon^3}\,\frac{\kappa_1}{Q_2Q_3}\,d\Sigma_a'''$$

$$=-\frac{8\pi a^4}{3}\int_{t_0}^{t'}\frac{(t'-t)^2dt}{(\nabla)}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\frac{\partial(Q_1)\kappa_1(t,q'_i)}{\partial q'_2}-\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\frac{\partial(Q_1)\kappa_1(t,q'_i)}{\partial q'_3}\right].$$

Tenendo presenti tutti i risultati che si deducono dai precedenti con lo scambio degli indici 1, 2, 3 e sommandoli insieme si trova:

$$\text{(24)}\qquad \lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma_a'''}(U_1''\kappa_1+U_2''\kappa_2+U_3''\kappa_3)\,d\Sigma_a'''$$

$$=-\frac{8\pi a^4}{3}\int_{t_0}^{t'}(t'-t)^2dt\left[\frac{1}{(Q_1)}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)\hat\omega(t,q'_i)+\frac{1}{(Q_2)}\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\chi(t,q'_i)+\frac{1}{(Q_3)}\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\rho(t,q'_i)\right]$$

Dalla (5) abbiamo dunque, per $\epsilon=0$:

$$\text{(25)}\quad 8\pi a^4\int_{t_0}^{t'}(t'-t)^2dt\left[\frac{1}{(Q_1)}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)\hat\omega(t,q'_i)+\frac{1}{(Q_2)}\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\chi(t,q'_i)+\frac{1}{(Q_3)}\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\rho(t,q'_i)\right]$$

$$=\int_{S_{4,a}}\left[\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}-1\right]\sum_1^3{}_i\,Q_iF_i\,\frac{d(rx)}{d(q_{i+1}q_{i+2})}\,\frac{dS_{4,a}}{\nabla}$$

$$+\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}-1\right]\sum_1^3{}_i\,Q_iU_i\,\frac{d(rx)}{d(q_{i+1}q_{i+2})}\,\frac{d\Sigma_a}{\nabla}$$

$$+2a^2\int_{\Sigma_a}\frac{t'-t}{r^2}\cos(nt)\sum_1^3{}_i\,Q_i\kappa_i\,\frac{d(rx)}{d(q_{i+1}q_{i+2})}\,\frac{d\Sigma_a}{\nabla}$$

$$-a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma_a'}\sum_1^3{}_i\,\kappa_i\left\{\frac{\cos(nq_{i-2})}{Q_{i+2}Q_i}\left[\frac{\partial}{\partial q_{i+2}}\left(\frac{Q_i}{Q_{i+1}Q_{i+2}}\,\frac{d(rx)}{d(q_{i+1}q_{i+2})}\left(1-\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}\right)\right)\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{Q_{i+2}}{Q_{i+1}Q_i}\,\frac{d(rx)}{d(q_iq_{i+1})}\left(1-\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}\right)\right)\right]$$

$$-\frac{\cos(nq_{i+1})}{Q_iQ_{i+1}}\left[\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{Q_{i+1}}{Q_{i+2}Q_i}\,\frac{d(rx)}{d(q_{i+2}q_i)}\left(1-\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}\right)\right)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial q_{i+1}}\left(\frac{Q_i}{Q_{i+2}Q_{i+1}}\,\frac{d(rx)}{d(q_{i+1}q_{i+2})}\left(1-\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}\right)\right)\right]\right\}d\Sigma'_a$$

nella cui formola gli indici i sono i resti rispetto al modulo 3.

5. — Vogliamo adesso trasformare l'ultimo integrale della formola (25) in modo che in essa vi compaiano soltanto integrali proprii. Perciò osserviamo che, indicando con x', y', z' i valori di $x\,y\,z$ corrispondenti a $q'_1\,q'_2\,q'_3$, si avrà

$$\frac{Q_i}{Q_{i+1}\,Q_{i+2}}\,\frac{d(rx)}{d(q_{i+1}\,q_{i+2})} = -\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial q_i} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial q_i} = \frac{\partial r}{\partial y'}\frac{\partial z}{\partial q_i} - \frac{\partial r}{\partial z'}\frac{\partial y}{\partial q_i};$$

$$\mathrm{K}_i\,\frac{\cos(nq_{i+2})}{Q_{i+2}\,Q_i}\,\frac{\partial}{\partial q_{i+2}}\left(\frac{Q_i}{Q_{i+1}\,Q_{i+2}}\,\frac{d(rx)}{d(q_{i+1}\,q_{i+2})}\left(1-\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y'}\left[\mathrm{K}_i\,\frac{\cos(nq_{i+2})}{Q_{i+2}\,Q_i}\,\frac{\partial}{\partial q_{i+2}}\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\left(r+\frac{a^2(t'-t)^2}{r}\right)\right)\right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial z'}\left[\mathrm{K}_i\,\frac{\cos(nq_{i+2})}{Q_{i+2}\,Q_i}\,\frac{\partial}{\partial q_{i+2}}\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\left(r+\frac{a^2(t'-t)^2}{r}\right)\right)\right];$$

$$\int_{\Sigma'_a} \mathrm{K}_i\,\frac{\cos(nq_{i+2})}{Q_{i+2}\,Q_i}\,\frac{\partial}{\partial q_{i+2}}\left(\frac{Q_i}{Q_{i+1}\,Q_{i+2}}\,\frac{d(rx)}{d(q_{i+1}\,q_{i+2})}\left(1-\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}\right)\right)d\Sigma'_a$$

$$= \frac{\partial}{\partial y'}\int_{\Sigma'_a} \mathrm{K}_i\,\frac{\cos(nq_{i+2})}{Q_{i+2}\,Q_i}\,\frac{\partial}{\partial q_{i+2}}\left[\frac{\partial z}{\partial q_i}\left(r+\frac{a^2(t'-t)^2}{r}\right)\right]d\Sigma'_a$$

$$- \frac{\partial}{\partial z'}\int_{\Sigma'_a} \mathrm{K}_i\,\frac{\cos(nq_{i+2})}{Q_{i+2}\,Q_i}\,\frac{\partial}{\partial q_{i+2}}\left[\frac{\partial y}{\partial q_i}\left(r+\frac{a^2(t'-t)^2}{r}\right)\right]d\Sigma'_a;$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\int_{\Sigma'_a} \mathrm{K}_i\,\frac{\cos(nq_{i+2})}{Q_{i+2}\,Q_i}\,\frac{\partial}{\partial q_{i+2}}\left[\frac{\partial z}{\partial q_i}\left(r+\frac{a^2(t'-t)^2}{r}\right)\right]d\Sigma'_a$$

$$= \frac{\partial}{\partial y'}\int_{\Sigma_a} \mathrm{K}_i\,\frac{\cos(nq_{i+2})}{Q_{i+2}\,Q_i}\,\frac{\partial}{\partial q_{i+2}}\left[\frac{\partial z}{\partial q_i}\left(r+\frac{a^2(t'-t)^2}{r}\right)\right]d\Sigma_a$$

$$- \frac{\partial}{\partial y'}\int_{S} \mathrm{K}_i\,\frac{\cos(nq_{i+2})}{Q_{i+2}\,Q_i}\,\frac{\partial}{\partial q_{i+2}}\left[\frac{\partial z}{\partial q_i}\left(r+\frac{a^2(t'-t)^2}{r}\right)\right]\frac{dS}{\cos(nt)}$$

dove S è lo spazio limitato dalla sfera ordinaria di raggio ϵ comune alla varietà C, ed all'iperpiano $t = t_0$. Chiamando σ poi la superficie di questa sfera, si ha pure:

$$\lim_{\epsilon=0} \frac{\partial}{\partial y'}\int_{S} \frac{\mathrm{K}_i\cos(nq_{i+2})}{Q_{i+2}\,Q_i}\,\frac{\partial}{\partial q_{i+2}}\left[\frac{\partial z}{\partial q_i}\left(r+\frac{a^2(t'-t)^2}{r}\right)\right]\frac{dS}{\cos(nt)}$$

$$= a^2 \lim_{\varepsilon=0} \frac{\partial}{\partial y'} \int_\sigma \frac{\kappa_i \cos(nq_{i+2})}{Q_i Q_{i+2} \cos(nt)} \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{(t'-t)^2}{r} \frac{\partial r}{\partial q_{i+2}} d\sigma$$

$$= - a^2 \lim_{\varepsilon=0} \int_\sigma \frac{\kappa_i \cos(nq_{i+2})}{Q_i Q_{i+2} \cos(nt)} \frac{\partial z}{\partial q_i} (t'-t)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial q_{i+2}} \right) d\sigma$$

$$= \frac{4\pi a^2}{3} (t'-t_0)^2 \frac{\kappa_{i,0} \cos(n_0 q_{i+2})}{(Q_i)(Q_{i+2}) \cos(n_0 t)} \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial q_{i+2}} \right)$$

dove in questa formola $\kappa_{i,0}$ indica il valore di κ_i nel punto (t_0, q'_i), ed n_0 la normale a Σ_a nello stesso punto.

Tenendo presenti questi risultati e tutti quelli analoghi si potrà subito porre la (25) sotto la forma:

$$(26) \quad 8\pi a^4 \int_{t_0}^{t'} (t'-t)^2 dt \left[\frac{1}{(Q_1)} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \tilde{\omega}(t, q'_i) + \frac{1}{(Q_2)} \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \right) \chi(t, q'_i) + \frac{1}{(Q_3)} \left(\frac{\partial x}{\partial q_3} \right) \rho(t, q'_i) \right]$$

$$= \frac{8\pi a^4}{3} \frac{(t'-t_0)^2}{\cos(n_0 t)} \sum_1^3{}_i \frac{1}{(Q_i)} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right) \left[\kappa_{i+2,0} \cos(n_0 q_{i+1}) - \kappa_{i+1,0} \cos(n_0 q_{i+2}) \right]$$

$$+ \int_{S_{t,a}} \left[\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2} - 1 \right] \sum_1^3{}_i Q_i F_i \frac{d(rx)}{d(q_{i+1} q_{i+2})} \frac{dS_{t,a}}{\nabla}$$

$$+ \int_{\Sigma_a} \left[\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2} - 1 \right] \sum_1^3{}_i Q_i U_i \frac{d(rx)}{d(q_{i+1} q_{i+2})} \frac{d\Sigma_a}{\nabla}$$

$$+ 2a^2 \int_{\Sigma_a} \frac{t'-t}{r^2} \cos(nt) \sum_1^3{}_i Q_i \kappa_i \frac{d(rx)}{d(q_{i+1} q_{i+2})} \frac{d\Sigma_a}{\nabla}$$

$$+ a^2 \frac{\partial}{\partial y'} \int_{\Sigma_a} \left[\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2} - 1 \right] \sum_1^3{}_i \kappa_i \left[\frac{\cos(nq_{i+2})}{Q_i Q_{i+2}} \frac{d(rz)}{d(q_{i+2} q_i)} - \frac{\cos(nq_{i+1})}{Q_i Q_{i+1}} \frac{d(rz)}{d(q_i q_{i+1})} \right] d\Sigma_a$$

$$- a^2 \frac{\partial}{\partial z'} \int_{\Sigma_a} \left[\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2} - 1 \right] \sum_1^3{}_i \kappa_i \left[\frac{\cos(nq_{i+2})}{Q_i Q_{i+2}} \frac{d(ry)}{d(q_{i+2} q_i)} - \frac{\cos(nq_{i+1})}{Q_i Q_{i+2}} \frac{d(ry)}{d(q_i q_{i+2})} \right] d\Sigma_a .$$

In modo perfettamente analogo possiamo ricavare altre due formole che si deducono dalla precedente scambiando ciclicamente le lettere x, y, z. Se poi moltiplichiamo la (26) per $\frac{1}{(Q_1)}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)$ e le analoghe in y e z, rispettivamente per $\frac{1}{(Q_1)}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)$, $\frac{1}{(Q_1)}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)$ e sommiamo i risultati, troviamo subito

$$(27)\qquad 8\pi a^4\int_{t_0}^{t'}(t'-t)^2\,\hat{\omega}(t, q'_i)dt$$

$$=\frac{8\pi a^4}{3}\frac{(t'-t_0)^3}{\cos(n_0 t)}\left(\kappa_{3,0}\cos(n_0 q_2)-\kappa_{2,0}\cos(n_0 q_3)\right)$$

$$+\int_{S_{t,a}}\left[\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}-1\right]\sum_1^3{}_i F_i\left(\frac{\cos(q'_i q_{i+2})}{Q_{i+1}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+1}}-\frac{\cos(q'_i q_{i+1})}{Q_{i+2}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}\right)dS_{t,a}$$

$$+\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}-1\right]\sum_1^3{}_i U_i\left(\frac{\cos(q'_i q_{i+2})}{Q_{i+1}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+1}}-\frac{\cos(q'_i q_{i+1})}{Q_{i+2}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}\right)d\Sigma_a$$

$$+2a^2\int_{\Sigma_a}\frac{t'-t}{r^2}\cos(nt)\sum_1^3{}_i \kappa_i\left(\frac{\cos(q'_i q_{i+2})}{Q_{i+2}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}-\frac{\cos(q'_i q_{i+1})}{Q_{i+2}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}\right)d\Sigma_a$$

$$+\frac{a^2}{(Q_2)(Q_3)}\frac{\partial}{\partial q'_2}\int_{\Sigma_a}(Q_2)\left[\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}-1\right]\sum_1^3{}_i \kappa_i\left[\cos(nq_{i+2})\left(\frac{\cos(q'_3 q_i)}{Q_{i+2}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\cos(q'_3 q_{i+2})}{Q_i}\frac{\partial r}{\partial q_i}\right)-\cos(nq_{i+1})\left(\frac{\cos(q'_3 q_{i+1})}{Q_i}\frac{\partial r}{\partial q_i}-\frac{\cos(q'_3 q_i)}{Q_{i+1}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+1}}\right)\right]d\Sigma_a$$

$$-\frac{a^2}{(Q_2)(Q_3)}\frac{\partial}{\partial q'_3}\int_{\Sigma_a}(Q_2)\left[\frac{a^2(t'-t)^2}{r^2}-1\right]\sum_1^3{}_i \kappa_i\left[\cos(nq_{i+2})\left(\frac{\cos(q'_2 q_i)}{Q_{i+2}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\cos(q'_2 q_{i+2})}{Q_i}\frac{\partial r}{\partial q_i}\right)-\cos(nq_{i+1})\left(\frac{\cos(q'_2 q_{i+1})}{Q_i}\frac{\partial r}{\partial q_i}-\frac{\cos(q'_2 q_i)}{Q_{i+1}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}\right)\right]d\Sigma_a$$

nella cui formola con $\cos(q'_i q_{i+2})$ indichiamo l'espressione

$$\frac{1}{(Q_i)\,Q_{i+2}}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)\frac{\partial x}{\partial q_{i+2}}+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)\frac{\partial y}{\partial q_{i+2}}+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)\frac{\partial z}{\partial q_{i+2}}\right].$$

6. — Derivando tre volte le formole (15) e (27) rapporto a t' troviamo subito i valori di θ e $\hat{\omega}$ nel punto (t', q'_i) espressi

in funzione dei valori che acquistano nei punti di Σ_a: $\theta, \hat{\omega}, \chi, \rho$ e le componenti dello spostamento: $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, e dei valori che F_1, F_2, F_3 acquistano in tutti i punti di $S_{4,a}$.

Le espressioni di χ e di ρ si deducono da quelle di $\hat{\omega}$ con le solite permutazioni circolari degli indici 1, 2, 3.

Se deriviamo invece le (15) e (27) una sola volta rispetto a t', troviamo:

$$(28)\quad 4\pi b^2\int_{t_0}^{t'}(t'-t)\theta(t,q'_i)dt=\int_{S_{4,b}}\frac{t'-t}{r}\left(\frac{F_1}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1}+\frac{F_2}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}+\frac{F_3}{Q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)dS_{4,b}$$

$$+\int_{\Sigma_b}\frac{t'-t}{r^2}\left(\frac{U_1}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1}+\frac{U_2}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}+\frac{U_3}{Q_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\right)d\Sigma_b$$

$$+\frac{\partial}{\partial t'}\int_{\Sigma_b}\frac{t'-t}{r^2}\cos(nt)\left(\frac{x_1}{Q_1}\frac{\partial r}{\partial q_1}+\frac{x_2}{Q_2}\frac{\partial r}{\partial q_3}+\frac{x_3}{Q_3}\frac{\partial r_2}{\partial q_3}\right)d\Sigma_b$$

$$-\frac{\partial}{\partial t'}\int_{\Sigma_b}[\kappa_1\cos(nq_1)+\kappa_2\cos(nq_2)+\kappa_3\cos(nq_3)]\frac{d\Sigma_b}{r}.$$

$$(29)\quad 8\pi a^2\int_{t_0}^{t'}(t'-t)\hat{\omega}(t,q'_i)dt=\frac{8\pi a^2}{3}\frac{t'-t_0}{\cos(n_0t)}(\kappa_{3,0}\cos(n_0q_2)-\kappa_{2,0}\cos n_0q_3))$$

$$+\int_{S_{4,a}}\frac{t'-t)}{r^2}\sum_1^3{}_iF_i\left(\frac{\cos(q'_iq_{i+2})}{Q_{i+2}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}\ \frac{\cos(q'_iq_{i+1})}{Q_{i+2}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}\right)dS_{4,a}$$

$$+\int_{\Sigma_a}\frac{t'-t}{r^2}\sum_1^3{}_iU_i\left(\frac{\cos(q'_iq_{i+2})}{Q_{i+1}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+1}}-\frac{\cos(q'_iq_{i+1})}{Q_{i+2}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}\right)d\Sigma_a$$

$$+\frac{\partial}{\partial t'}\int_{\Sigma_a}\frac{t'-t}{r^2}\cos(nt)\sum_1^3{}_i\kappa_i\left(\frac{\cos(q'_iq_{i+2})}{Q_{i+1}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}-\frac{\cos(q'_iq_{i+1})}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}\right)d\Sigma_a$$

$$+\frac{a^2}{(Q_2)(Q_3)}\frac{\partial}{\partial q'_2}\int_{\Sigma_a}\frac{(Q_3)(t'-t)}{r^2}\sum_1^3{}_i\kappa_i\left[\cos(nq_{i+2})\left(\frac{\cos(q'_2q_i)}{Q_{i+2}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+2}}-\frac{\cos(q'_3q_{i+2})}{Q_i}\frac{\partial r}{\partial q_i}\right)\right.$$

$$\left.-\cos(nq_{i+1})\left(\frac{\cos(q'_3q_{i+1})}{Q_i}\frac{\partial r}{\partial q_i}-\frac{\cos(q'_2q_i)}{Q_{i+1}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+1}}\right)\right]d\Sigma_a$$

$$-\frac{a^2}{(Q_2)(Q_3)}\frac{\partial}{\partial q'_3}\int_{\Sigma_a}\frac{(Q_2)(t'-t)}{r^2}\sum_1^3{}_i\kappa_i\left[\cos(nq_{i+2})\left(\frac{\cos(q'_2q_i)}{Q_{i+2}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+3}}-\frac{\cos(q'_2q_{i+2})}{Q_i}\frac{\partial r}{\partial q_i}\right)\right.$$

$$\left.-\cos(nq_{i+1})\left(\frac{\cos(q'_2q_{i+2})}{Q_i}\frac{\partial r}{\partial q_i}-\frac{\cos(q'_2q_i)}{Q_{i+1}}\frac{\partial r}{\partial q_{i+1}}\right)\right]d\Sigma_a.$$

Da queste formole possiamo subito ricavare le espressioni di

$$b^2\int_{t_0}^{t'}(t'-t)\,\theta\,(t,q'_i)\,dt\,,\quad 2a^2\int_{t_0}^{t'}(t'-t)\,\hat{\omega}\,(t,q'_i)\,dt$$

che indicheremo con T e P. Analogamente poi chiameremo Q ed R le espressioni che stanno a χ e ρ come P sta a $\hat{\omega}$. Da queste espressioni, per ricavare i valori degli spostamenti $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, come abbiamo fatto in tutti i casi analoghi, cominceremo ad osservare che

$$\frac{1}{(Q_1)}\frac{\partial T}{\partial q'_1}+\frac{1}{(Q_2)(Q_3)}\left(\frac{\partial (Q_2)Q}{\partial q'_3}-\frac{\partial (Q_3)R}{\partial q'_2}\right)$$

$$=\int_{t_0}^{t'}(t'-t)\,dt\left[\frac{b^2}{(Q_1)}\frac{\partial\theta(t,q'_i)}{\partial q'_1}+\frac{2a^2}{(Q_2)(Q_3)}\left(\frac{\partial(Q_2)\chi(t,q'_i)}{\partial q'_3}-\frac{\partial(Q_3)\rho(t,q'_i)}{\partial q'_2}\right)\right]$$

$$+\frac{t'-t_0}{\cos(n_0t)}\left[b^2\theta_0\cos(n_0q_1)+2a^2(\chi_0\cos(n_0q_3)-\rho_0\cos(n_0q_2))\right]$$

$$=\int_{t_0}^{t'}(t'-t)\left[\frac{\partial^2\kappa_1(t,q'_i)}{\partial t^2}-F_1\right]dt$$

$$+\frac{t'-t_0}{\cos(n_0t)}\left[b^2\theta_0\cos(n_0q_1)+2a^2(\chi_0\cos(n_0q_3)-\rho_0\cos(n_0q_2))\right]$$

da cui essendo

$$\int_{t_0}^{t'}(t'-t)\frac{\partial^2\kappa_1(t,q'_i)}{\partial t^2}\,dt=\kappa_1(t',q'_i)-\kappa_{1,0}-(t'-t_0)\left(\frac{\partial\kappa_1}{\partial t}\right)_0$$

si ha subito:

$$\kappa_1(t',q'_i)=\kappa_{1,0}\tag{30}$$

$$+\frac{t'-t_0}{\cos(n_0t)}\left[\left(\frac{\partial\kappa_1}{\partial t}\right)_0\cos(n_0t)-b^2\theta_0\cos(n_0q_1)-2a^2(\chi_0\cos(n_0q_3)-\rho_0\cos(n_0q_2))\right]$$

$$+\frac{1}{(Q_1)}\frac{\partial T}{\partial q'_1}+\frac{1}{(Q_2)(Q_3)}\left(\frac{\partial(Q_2)Q}{\partial q'_3}-\frac{\partial(Q_3)R}{\partial q'_2}\right)+\int_{t_0}^{t'}(t'-t)F_1dt$$

e formole analoghe valgono per κ_2 e κ_3.

Le formole che abbiamo ottenuto, che devono ritenersi come le trasformate in coordinate generali delle corrispondenti date nella memoria citata, sono di una grandissima generalità e

di una grande simmetria per cui ho creduto utile notarle. S'intende poi facilmente che si può costruire una serie di formole della stessa generalità e corrispondenti a quelle che abbiamo date nella memoria citata più volte. È anche chiaro che formole della stessa generalità si possono trovare per gli spazii lineari ad n dimensioni.

Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie.

Nota del Prof. GIUSEPPE LAURICELLA.

Il prof. MORERA in una Nota (*), che porta lo stesso titolo della presente, calcola i due limiti delle derivate normali di una funzione potenziale di superficie, quando col punto potenziato si va ad un punto della superficie, muovendosi sulla normale in questo punto dalle due parti della superficie stessa, ammettendo che la densità soddisfi ad una condizione, per cui *non è sufficiente la continuità.*

Una semplice estensione della prima parte dei calcoli del prof. MORERA, riduce questo studio a quello analogo dei limiti della funzione potenziale di doppio strato, per il quale studio, come è noto, *basta la continuità della densità nel punto che si considera.*

Ho creduto opportuno di esporre in un primo articolo della presente Nota uno studio sulla funzione potenziale di doppio strato, fatto secondo il metodo del Poincaré nel suo recente libro: *Théorie du Potentiel Newtonién* (**); e di esporre in un secondo articolo il mio risultato. In tal modo resta completamente esposto l'intero seguito di considerazioni che conducono ad ammettere come sola condizione la continuità della densità nel teorema fondamentale delle funzioni potenziali di superficie.

(*) " Rendiconti dell'Istituto Lombardo ", serie II, vol. XX (1887).
(**) §§ 100...103.

In una breve Appendice alla presente Nota, come complemento allo studio in essa fatto della funzione potenziale di doppio strato, tratto delle derivate normali di detta funzione potenziale. Servendomi appunto del risultato ottenuto sulle derivate normali della funzione potenziale di superficie, dimostro l'esistenza e l'uguaglianza dei limiti verso cui tendono le derivate normali della funzione potenziale di doppio strato, quando il punto potenziato si avvicina ad un punto della superficie dalle due parti di essa, *ammessa ancora qui la sola continuità della densità del doppio strato.*

Questo teorema, per quanto è a mia conoscenza, viene dimostrato ordinariamente con considerazioni poco rigorose od ammettendo per la densità delle condizioni per cui la sola continuità non basta.

Sarebbe superfluo richiamare qui l'importanza dei precedenti teoremi nel campo della Fisica-matematica e dell'Analisi. Per altro credo utile di far rilevare che il noto *metodo di Neumann* dà l'espressione della soluzione (che io chiamerò *di Neumann*) del *problema di Dirichlet*, mediante una funzione potenziale di doppio strato a densità continua nel caso di un campo finito; mediante la somma di una funzione potenziale di doppio strato a densità continua e di una funzione potenziale di superficie a densità continua nel caso di un campo indefinito (*); quindi abbiamo in ogni caso: *le derivate normali della soluzione di Neumann, che sono certamente finite e continue finchè il punto che si considera non è sulla superficie limite, si mantengono tali anche quando questo punto si avvicina indefinitamente ai punti della superficie stessa.*

Art. I.

1. — Indichiamo con σ l'insieme di una o più superficie aperte o chiuse; e questo insieme sia tale che qualunque retta dello spazio tagli tutte le superficie in un numero finito di punti, e tutt'al più abbia alcuni tratti finiti e in numero finito a comune con esse; e sia tale ancora che ammetta in ogni punto delle superficie un piano tangente determinato e variabile con

(*) Poincaré, loc. cit., §§ 147, 149.

continuità al variare con continuità del punto di contatto, fatta eccezione al più di un numero finito di punti isolati o di linee isolate. Circa a questi punti, nei quali non esiste il piano tangente, supporremo che siano punti conici, supporremo cioè che ognuno di essi sia il vertice di un cono tangente inviluppo delle posizioni limiti del piano tangente, quando col punto di contatto si tende verso il punto stesso lungo tutte le possibili linee. Circa alle linee escluse poi supporremo che siano tali che in ogni loro punto esistano due piani tangenti alla superficie, limiti delle posizioni del piano tangente a σ, quando col punto di contatto si tende al punto stesso muovendosi sulla superficie dalle due parti di essa linea.

Si indichi con n la normale a σ e si fissi la direzione positiva di n in ogni punto in modo che, prendendo due punti di σ appartenenti alla stessa superficie e facendo muovere questi due punti fino a farli coincidere, vengano a coincidere allora anche le direzioni positive delle normali.

Diremo faccia positiva di σ quella corrispondente alla direzione positiva della normale nel punto, faccia negativa l'altra. Similmente nei punti di σ ove si ha un piano tangente, diremo faccia positiva di questo piano quella corrispondente alla direzione positiva della normale nel punto, faccia negativa l'altra. Nei punti conici diremo faccia positiva del cono tangente la faccia corrispondente alla faccia positiva dei piani tangenti inviluppo, faccia negativa l'altra. Nei punti delle linee singolari diremo faccia positiva del diedro dei due piani tangenti, la faccia corrispondente alla faccia positiva di ognuno dei due piani tangenti, faccia negativa l'altra.

Finalmente si indichino con r i raggi vettori che partono da un punto P qualsiasi dello spazio; e si chiamino punti di entrata i punti in cui r incontra σ passando dalla faccia negativa di σ alla positiva, punti di uscita quelli in cui r incontra σ passando dalla faccia positiva alla negativa.

2. — Ciò premesso, si consideri l'integrale:

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma = -\int_\sigma \frac{\cos(rn)}{r^2}\, d\sigma,$$

ove (rn) è l'angolo che la direzione positiva di r fa con la direzione positiva di n.

Ovunque si trovi il punto P, si costruisca la sfera di raggio 1 col centro in P. Preso un elemento qualsiasi $d\omega$ della superficie ω di questa sfera, si considerino gli elementi $d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots d\sigma_p$, aventi per contorno le intersezioni di σ col cono che proietta da P il contorno di $d\omega$: preso poi un punto P′ nell'interno di $d\omega$, si indichino con $r_1, r_2, \ldots r_p$ i raggi vettori corrispondenti ai punti in cui la semiretta PP′ incontra gli elementi $d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots d\sigma_p$. Allora si ha ovviamente, per gli elementi $d\sigma_i$ che sono discosti dal punto P,

$$d\omega = \pm \frac{\cos(r_i n)}{r_i^2}\, d\sigma_i\,;$$

ed il segno $+$ varrà per gli elementi $d\sigma_i$ nei quali si ha $\cos(r_i n) > 0$, ossia per gli elementi $d\sigma_i$ che volgono la loro faccia negativa a P; il segno $-$ per gli elementi $d\sigma_i$ nei quali si ha $\cos(r_i n) < 0$, ossia per gli elementi $d\sigma_i$ che volgono la loro faccia positiva a P; dove si ha $\cos(r_i n) = 0$, si ha ancora $\frac{\cos(r_i n)}{r_i^2}\, d\sigma_i = 0$, ed ivi l'elemento $d\sigma_i$ non volge a P nè la faccia negativa, nè la positiva. Supposto che tutti gli elementi $d\sigma_i$ siano discosti dal punto P, si indichi con p' il numero di quelli che volgono la faccia positiva a P, con p'' il numero di quelli che volgono a P la faccia negativa; allora si potrà scrivere:

$$\sum_{1}^{p} - \frac{\cos(r_i n)}{r_i^2}\, d\sigma_i = (p' - p'')\, d\omega\,;$$

e quindi, supposto che il punto P non sia su σ,

$$(1) \qquad \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma = -\int_\sigma \frac{\cos(rn)}{r^2}\, d\sigma = \int_\omega (p' - p'')\, d\omega \ (*).$$

(*) I punti conici e le linee singolari corrispondono nell'integrale a punti e a linee di discontinuità della funzione da integrare, che, essendo in numero finito, non hanno alcuna influenza sull'integrale.

I numeri p', p'', e quindi anche l'espressione $p' - p''$, dipendono dai punti della superficie ω. È evidente poi che p' rappresenta il numero dei punti di uscita in cui la semiretta PP' incontra σ, p'' il numero dei punti di entrata.

Supposto ora il punto P su σ, si isoli questo punto con una piccola porzione di superficie σ' di σ, in maniera che σ' contenga P nel suo interno. In questo modo il punto P non è sull'insieme $\sigma - \sigma'$; e quindi, indicando con p'_1, p''_1 i numeri p', p'' relativi a $\sigma - \sigma'$, si può scrivere come sopra:

$$\int_{\sigma-\sigma'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \int_{\omega} (p'_1 - p''_1)\, d\omega.$$

Nei punti di ω, che non corrispondono a punti di σ', la differenza $p'_1 - p''_1$ coincide con l'altra $p' - p''$ relativa all'insieme σ. Inoltre, impiccolendo σ', varierà la differenza $p'_1 - p''_1$ nei punti di ω corrispondenti ai punti di σ', in modo che ogni volta che un punto di ω non fa più parte della regione corrispondente ai punti di σ', il numero $p'_1 - p''_1$ diventa $p' - p''$; e poichè il numero $p' - p''$ relativo a σ è finito per qualunque vettore che parte da P, facendo impiccolire indefinitamente σ' con una legge qualsiasi, si avrà:

$$\lim_{\sigma'=0} \int_{\sigma-\sigma'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \lim_{\sigma'=0} \int_{\omega} (p'_1 - p''_1)\, d\omega = \int_{\omega} (p' - p'')\, d\omega = \int_{\sigma} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma.$$

Adunque la formola (1) vale ovunque sia il punto P.

3. — Ora supponiamo che l'insieme σ consti di una o più superficie chiuse esterne l'una all'altra e che il punto P sia nell'interno dello spazio finito racchiuso da una di queste superficie. Presa per direzione positiva di n quella che penetra nell'interno dello spazio finito racchiuso da ciascuna delle superficie componenti σ, avremo che ogni vettore spiccantesi da P incontra σ necessariamente in un punto di uscita e in altri punti in numero pari e successivamente di entrata e di uscita; di modo che in questo caso si avrà in ogni punto di ω:

$$p' - p'' = 1;$$

e quindi dalla (1):

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \int_\omega d\omega = 4\pi. \tag{2}$$

Supponiamo che il punto P sia esterno a tutte le superficie formanti σ. In questo caso il vettore r, corrispondente ad un punto qualsiasi di ω, o non incontra σ o l'incontra in un numero pari di punti successivamente di entrata e di uscita; per cui si avrà in ogni punto di ω:

$$p' - p'' = 0;$$

e quindi:

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 0. \tag{3}$$

Supponiamo che il punto P sia su σ e che in questo punto vi sia un piano tangente determinato. In questo caso la superficie ω viene divisa dal piano tangente in P in due parti uguali ω', ω'': una parte ω' corrisponderà alla faccia positiva del piano tangente, l'altra ω'' corrisponderà alla faccia negativa. Ogni vettore corrispondente ad un punto qualsiasi di ω' incontra la superficie necessariamente in un punto di uscita e in altri punti successivamente di entrata e di uscita in numero pari: in altri termini si può dire che il punto P si comporta rispetto ad ω' come se fosse punto interno a σ; sicchè per ogni punto di ω' si avrà:

$$p' - p'' = 1.$$

Ogni vettore corrispondente ad un punto qualsiasi di ω'' o non incontra σ o l'incontra in un numero pari di punti successivamente di entrata e di uscita: si può dire cioè che il punto P si comporta rispetto ad ω'' come se fosse punto esterno a σ; di modo che in ogni punto di ω'' si avrà:

$$p' - p'' = 0.$$

In conclusione avremo:

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \int_{\omega'} d\omega = 2\pi. \tag{4}$$

Supponiamo ancora che il punto P di σ sia un punto conico. In questo caso la superficie ω viene divisa in due parti ω', ω'' dal cono tangente in P alla superficie. Una parte ω' corrisponderà alla faccia positiva del cono tangente e l'altra ω'' alla faccia negativa; ed anche qui è chiaro che P si comporta rispetto ad ω' come se fosse punto interno a σ, rispetto ad ω'' come se fosse punto esterno; di modo che si avrà:

$$p' - p'' = 1 \text{ nei punti di } \omega',$$
$$p' - p'' = 0 \quad \text{"} \quad \omega'';$$

e quindi:

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \int_{\omega'} d\omega = \omega'. \tag{4'}$$

Supponiamo finalmente che il punto P di ω sia uno dei punti delle linee singolari. In questo caso il diedro dei due piani tangenti a σ nel punto P divide la superficie ω in due fusi ω', ω''. Il fuso ω' corrisponderà alla faccia positiva del diedro, il fuso ω'' alla faccia negativa; ed avremo ancora qui che P si comporta rispetto ad ω' come se fosse punto interno a σ, rispetto ad ω'' come se fosse punto esterno; per cui sarà:

$$p' - p'' = 1 \text{ nei punti di } \omega',$$
$$p' - p'' = 0 \quad \text{"} \quad \omega'';$$

e quindi:

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \int_{\omega'} d\omega = \omega' \text{ (*)}. \tag{4''}$$

(*) In questo indirizzo sarebbe facile fare lo studio dell'integrale $\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma$ nel caso in cui σ avesse dei punti all'infinito, ferma restando la sua proprietà di essere incontrata un numero finito di volte da una qualsiasi retta dello spazio, ed anche nel caso in cui due o più superficie dell'insieme σ fossero interne l'una all'altra.

4. — Ritornando ora al caso generale considerato nel § 2 ed indicando con $\left|\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|$ il valore assoluto di $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$, avremo dalla (1):

$$\int_\sigma \left|\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right| d\sigma = \int_\omega (p' + p'')\, d\omega; \tag{5}$$

e poichè per ipotesi qualunque retta dello spazio incontra σ in un numero finito di punti, esisterà il massimo p_1 dei numeri corrispondenti a tutte le rette dello spazio, e si avrà:

$$p' + p'' \leq p_1.$$

In questo modo risulterà dalla (5):

$$\int_\sigma \left|\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right| d\sigma \leq p_1 \int_\omega d\omega = 4\pi p_1. \tag{5'}$$

5. — Passiamo a studiare l'integrale (*funzione potenziale di un doppio strato*):

$$\int_\sigma h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma,$$

ove σ è l'insieme di superficie considerato al § 2 ed h una funzione atta all'integrazione in tutto il campo σ.

Si consideri un punto P_0 di σ e si supponga che in P_0 la funzione h sia finita e continua. Indicato con h_0 il valore di h nel punto P_0 e data una quantità positiva ϵ piccola ad arbitrio, si può isolare il punto P_0 con una porzione σ' di superficie dell'insieme σ contenente il punto P_0 nel suo interno e talmente piccola che si abbia in tutto σ':

$$|h - h_0| < \epsilon.$$

Allora, chiamando anche qui p_1 il massimo del numero dei punti in cui una retta qualsiasi dello spazio incontra σ, avremo:

$$\left|\int_{\sigma'} (h - h_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma\right| = \int_{\sigma'} |h - h_0| \cdot \left|\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right| d\sigma < 4\pi p_1 \epsilon.$$

Ora si ha ovviamente:

$$(6)\qquad \int_\sigma h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = h_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int_{\sigma'} (h - h_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma =$$

$$= h_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int_{\sigma - \sigma'} (h - h_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int_{\sigma'} (h - h_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma.$$

Inoltre, indicando con P un punto discosto da σ convenientemente vicino a P_0 e situato dall'una o dall'altra parte di σ, e chiamando r_0 i raggi vettori che partono da P_0, si può scrivere:

$$\left| \int_{\sigma - \sigma'} (h - h_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \int_{\sigma - \sigma'} (h - h_0) \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial n} d\sigma \right| < \epsilon; \quad \left| \int_{\sigma'} (h - h_0) \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial n} d\sigma \right| < 4\pi p_1 \epsilon;$$

e quindi:

$$\left| \int_\sigma (h - h_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \int_\sigma (h - h_0) \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial n} d\sigma \right| < \epsilon + 4\pi p_1 \epsilon + 4\pi p_1 \epsilon = \epsilon (1 + 8\pi p_1).$$

Di qui risulta:

$$(7)\qquad \lim_{PP_0 = 0} \int_\sigma (h - h_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \int_\sigma (h - h_0) \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial n} d\sigma.$$

Indichiamo con P_1, P_2 due punti discosti da σ, vicinissimi al punto P_0 e situati il primo dalla parte della faccia positiva di σ, il secondo dalla parte della faccia negativa. Nel caso poi in cui una o più superficie dell'insieme σ siano aperte, chiudiamole con un sistema σ_1 di superficie in modo che P_1 risulti interno ad una sola delle superficie dell'insieme $\sigma + \sigma_1$ e P_2 esterno a tutte. Allora avremo dalle (2), (3), (4), (4'), (4''):

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int_{\sigma_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma_1 = \int_{\sigma + \sigma_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \begin{cases} 4\pi \text{ nel punto } P_1 \\ 2\pi \text{ oppure } \omega' \text{ nel punto } P_0 \\ 0 \text{ nel punto } P_2, \end{cases}$$

$$\lim_{P_1P_0=0}\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma=\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma,\quad \lim_{P_2P_0=0}\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma=\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma;$$

e per conseguenza:

$$\int_{\sigma}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma=2\pi-\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma,\ \text{oppure}\ =\omega'-\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma;$$

$$\lim_{P_1P_0=0}\int_{\sigma}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma=4\pi-\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma=2\pi+\int_{\sigma}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma,$$

$$\text{oppure}\ =4\pi-\omega'+\int_{\sigma}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma;$$

$$\lim_{P_2P_0=0}\int_{\sigma}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma=-\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma=-2\pi+\int_{\sigma}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma,$$

$$\text{oppure}\ =-\omega'+\int_{\sigma}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma.$$

Queste, insieme alle (6), (7), ci dànno:

$$\lim_{P_1P_0=0}\int_{\sigma}h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma=h_0\left(2\pi+\int_{\sigma}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma\right)+\int_{\sigma}(h-h_0)\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma,$$

$$\text{oppure}\ =h_0\left(4\pi-\omega'+\int_{\sigma}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma\right)+\int_{\sigma}(h-h_0)\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma;$$

$$\lim_{P_2P_0=0}\int_{\sigma}h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma=h_0\left(-2\pi+\int_{\sigma}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma\right)+\int_{\sigma}(h-h_0)\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma,$$

$$\text{oppure}\ =h_0\left(-\omega'+\int_{\sigma}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma\right)+\int_{\sigma}(h-h_0)\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma.$$

Art. II.

1. — Sia P_0 un punto di una superficie σ (o di un insieme di superficie), la quale abbia in ogni punto di un intorno, anche comunque piccolo, di P_0 un piano tangente determinato e la curvatura continua; e sia h una funzione dei punti di σ atta all'integrazione su σ e finita e continua nel punto P_0. Indichiamo con n_0 la normale a σ in P_0; con n la normale in un altro punto M qualsiasi di σ, tale che coincida anche in direzione con n_0, quando il punto M va a coincidere con P_0; e denotiamo con r_0, r i vettori che partono dal punto P_0 e da un punto P qualsiasi preso su n_0 da una parte o dall'altra di σ, e che vanno in M. Si ha:

$$(1)\quad \int_\sigma h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_0} d\sigma = -\int_\sigma h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int_\sigma h \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_0} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) d\sigma,$$

$$\int_\sigma h \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_0} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) d\sigma = \int_\sigma h \frac{\cos(rn_0) - \cos(rn)}{r^2} d\sigma$$

$$= \int_\sigma h \frac{\cos(rn_0) - \cos(rn)}{r_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{d\sigma}{r_0}.$$

Poichè in P_0 la superficie σ ha il piano tangente determinato e la curvatura continua, si avrà in ogni punto di σ (Cfr. la Nota del prof. Morera):

$$\left|\frac{\cos(rn_0) - \cos(rn)}{r_0}\right| < A$$

con A quantità finita. Indicata poi con u la proiezione dei segmenti r_0, r sul piano tangente a σ nel punto P_0, si avrà:

$$\frac{r_0}{r} \leq \frac{r_0}{u} = \frac{1}{\text{sen}(r_0 n_0)},$$

e si potrà staccare da σ una piccola porzione σ' di superficie,

racchiudente il punto P_0 nel suo interno, tale che si abbia in ogni suo punto:

$$\operatorname{sen}(r_0 n_0) > \tau$$

con τ costante positiva e minore dell'unità.

Dalla continuità della funzione h nel punto P_0, dove ha anche un valore finito, risulta che si può staccare da σ una piccola porzione σ'' di superficie, racchiudente il punto P_0 nel suo interno e tale che sia in ogni suo punto:

$$|h| < B$$

con B quantità finita.

Finalmente, data una quantità ϵ piccola ad arbitrio, possiamo staccare da σ una piccola porzione σ''' di superficie, racchiudente il punto P_0 nel suo interno e tale che si abbia nello stesso tempo:

$$A \, . \, B \, . \int_{\sigma'''} \frac{d\sigma}{r_0} < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \frac{A \, . \, B}{\tau} \int_{\sigma'''} \frac{d\sigma}{r_0} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Considerata allora la parte σ_0 di σ, comune alle tre porzioni $\sigma', \sigma'', \sigma'''$, avremo certamente:

$$(2) \quad \left| \int_{\sigma_0} h \frac{\cos(r_0 n_0) - \cos(r_0 n)}{r_0^2} d\sigma \right| < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \left| \int_{\sigma_0} h \frac{\cos(r n_0) - \cos(r n)}{r^2} d\sigma \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

La regione σ_0 contiene il punto P_0 nel suo interno; e perciò l'espressione:

$$\int_{\sigma - \sigma_0} h \frac{\cos(r n_0) - \cos(r n)}{r^2} d\sigma$$

è una funzione finita e continua del punto P e si mantiene tale anche quando questo pumto, muovendosi su n_0, va a coincidere con P_0; di maniera che per P abbastanza vicino a P_0 si può scrivere:

$$\left| \int_{\sigma - \sigma_0} h \frac{\cos(r n_0) - \cos(r n)}{r^2} d\sigma - \int_{\sigma - \sigma_0} h \frac{\cos(r_0 n_0) - \cos(r_0 n)}{r_0^2} d\sigma \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Questa, insieme alle (2), ci dà in conclusione per P abbastanza vicino a P_0:

$$\left| \int_\sigma h \frac{\cos(rn_0) - \cos(rn)}{r^2} d\sigma - \int_\sigma h \frac{\cos(r_0 n_0) - \cos(r_0 n)}{r_0^2} d\sigma \right| < \epsilon.$$

Di qui segue che l'espressione:

$$\int_\sigma h \frac{\cos(rn_0) - \cos(rn)}{r^2} d\sigma, \tag{3}$$

la quale è finita e continua finchè il punto da cui partono i raggi vettori r (punto potenziato) non va su σ, si mantiene tale anche quando questo punto, muovendosi su n_0, attraversa σ nel punto P_0.

Per mostrare che la continuità si mantiene anche attraversando la superficie σ nel punto P_0 in una direzione qualsiasi, si osservi anzitutto che, la dimostrata continuità in P_0 dell'espressione (3) nella direzione n_0, è dovuta al fatto che in P_0 la superficie σ ha un piano tangente determinato e la curvatura continua, e ancora all'avere potuto isolare il punto P_0 con una regione σ'' in cui la h fosse sempre finita. Ora, per ipotesi, la superficie σ soddisfa in tutto un intorno σ'_0 di P_0 alle medesime condizioni geometriche poste nel punto P_0; inoltre, dall'essere la funzione h finita e continua nel punto P_0, risulta che si può considerare un intorno σ''_0 di P_0, anche comunque piccolo, tale che in un intorno convenientemente piccolo di ogni suo punto la funzione h sia sempre finita; quindi avremo che nell'intorno σ_1 di P_0, comune a σ'_0, σ''_0, l'espressione (3) è continua anche quando, invece di riferirsi al punto P_0, ci si riferisca ad un altro punto qualsiasi di σ_1 e ci si muova, s'intende, sulla normale in questo punto.

Allora, data una quantità ϵ piccola ad arbitrio, esisterà per ogni punto Q_0 di σ_1 un segmento η tale che, preso Q sulla normale a σ sul punto Q_0, da una parte o dall'altra di σ, in modo che sia $QQ_0 \lesseqgtr \eta$, la differenza dei valori dell'espressione (3) nei punti QQ_0 sia in valore assoluto sempre inferiore ad ϵ; e così, con un ragionamento analogo a quello che suole farsi per dimostrare la continuità uniforme delle funzioni continue, sarà facile

dimostrare l'esistenza di un segmento η' diverso da zero che si può prendere come segmento η per tutti i punti di σ_1.

Ciò posto, si considerino le due superficie σ_2, σ'_2 luogo dei punti la cui minima distanza, dai punti di σ e dalle due bande di essa, sia uguale ad η'. L'espressione (3) è una funzione finita e continua dei punti di σ_2 e dei punti di σ'_2; per cui esisterà un segmento η'', comunque piccolo ma diverso da zero, tale che la differenza dei valori che l'espressione (3) prende in un punto Q_1 qualsiasi di σ_2 (o di σ'_2) e in un altro qualsiasi dei punti della porzione di σ_2 (o di σ'_2), racchiusa entro la sfera che ha il centro in Q_1 e il raggio uguale ad η'', si mantiene in valore assoluto inferiore ad ϵ.

Si considerino allora il punto P intersezione di n_0 con σ_2 (o con σ'_2); la porzione σ''_2 di σ_2 (o di σ'_2) racchiusa dalla sferetta di centro P e di raggio η'' e comune alla porzione σ'_1 di σ_2 (o di σ'_2) che corrisponde alla regione σ_1 di σ; e il cilindretto S_1 che ha per generatrici le normali a σ condotte dal contorno di σ''_2 e limitato da σ e da σ_2 (o da σ'_2). È chiaro che si ha:

$$\left| \int_\sigma h \frac{\cos(rn_0) - \cos(rn)}{r^2} d\sigma - \int_\sigma \frac{\cos(r_0 n_0) - \cos(r_0 n)}{r_0^2} d\sigma \right| < 4\epsilon,$$

dove il primo integrale si riferisce ad un punto qualsiasi del cilindretto S_1 ed il secondo al punto P_0.

Questa formola dimostra appunto la continuità dell'espressione (3), quando il punto potenziato attraversa la superficie σ nel punto P_0 muovendosi in un modo qualsiasi. Avremo adunque, indicando con P_1 e P_2 due punti situati dalle due parti di σ,

$$(4) \begin{cases} \lim\limits_{P_1P_0=0} \int_\sigma h \frac{\cos(rn_0) - \cos(rn)}{r^2} d\sigma = \lim\limits_{P_2P_0=0} \int_\sigma h \frac{\cos(rn_0) - \cos(rn)}{r^2} d\sigma = \\ \qquad = \int_\sigma h \frac{\cos(r_0 n_0) - \cos(r_0 n)}{r_0^2} d\sigma. \end{cases}$$

Consideriamo ora l'integrale:

$$\int_\sigma h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma,$$

e supponiamo che il punto P_1 stia dalla parte corrispondente alla direzione positiva della n. L'esistenza del piano tangente a σ in P_0 e *la continuità in* P_0 *della funzione* h bastano (*) per dimostrare le formole sui potenziali di doppio strato:

$$\lim_{P_1P_0=0}\int_\sigma h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma = h_0(2\pi+\Omega)+\int_\sigma(h-h_0)\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma,$$

$$\lim_{P_2P_0=0}\int_\sigma h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma = h_0(-2\pi+\Omega)+\int_\sigma(h-h_0)\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma,$$

ove si è posto:

$$\Omega=\int_\sigma\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma.$$

Avremo dunque dalla (1) e dalla (4):

$$\lim_{P_1P_0=0}\int_\sigma h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_0}d\sigma = -h_0(2\pi+\Omega)-\int_\sigma(h-h_0)\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma +$$
$$+\int_\sigma h\frac{\cos(r_0n_0)-\cos(r_0n)}{r^2_0}d\sigma,$$

$$\lim_{P_2P_0=0}\int_\sigma h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_0}d\sigma = h_0(2\pi-\Omega)-\int_\sigma(h-h_0)\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma +$$
$$+\int_\sigma h\frac{\cos(r_0n_0)-\cos(r_0n)}{r^2_0}d\sigma.$$

APPENDICE

1. — Consideriamo l'integrale (*funzione potenziale di doppio strato*):

$$\int_\sigma h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma, \tag{1}$$

(*) Cfr. l'Art. I.

dove h è una funzione finita e continua dei punti di ciascuna delle superficie chiuse od aperte dell'insieme σ; r il vettore che, partendo da un punto P qualsiasi dello spazio, va ai punti di σ; n la normale variabile nei punti di σ, di cui sia fissata la direzione positiva.

Indichiamo con P_0 un punto ordinario di σ, un punto tale cioè che in ogni punto di un intorno comunque piccolo di esso esiste un piano tangente determinato e la curvatura è finita; con n_0 la normale a σ in questo punto; e con P_1, P_2 due punti variabili vicinissimi a P_0, discosti da σ e situati il primo dalla parte di σ che guarda la direzione positiva di n_0, il secondo dall'altra parte.

Nel caso che una o più delle superficie, che compongono l'insieme σ, siano aperte, rendiamole chiuse con un insieme σ' di superficie tali che le superficie dell'insieme $\sigma + \sigma'$, che allora vengono ad essere tutte chiuse, risultino esterne l'una all'altra, e tali ancora che il punto P_1 risulti interno ad una di queste superficie chiuse, il punto P_2 esterno a tutte.

2. — Ciò premesso, si consideri una funzione u dei punti dello spazio finito S, racchiuso da ciascuna delle superficie dell'insieme $\sigma + \sigma'$, finita e continua insieme alle derivate dei due primi ordini, i punti di $\sigma + \sigma'$ al più esclusi per le derivate seconde, e tale che nei punti di σ coincida con la funzione h.

Questo è possibile in infiniti modi; e, come è noto, si ha nel punto P_1:

$$u = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\Delta^2 u}{r}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma+\sigma'} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma,$$

nel punto P_2:

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\Delta^2 u}{r}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma+\sigma'} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma;$$

e quindi nel punto P_1:

$$(2)\qquad \int_\sigma h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma = 4\pi u + \int_S \frac{\Delta^2 u}{r}\, dS + \int_{\sigma+\sigma'} \frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{r}\, d\sigma - \int_{\sigma'} u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma',$$

nel punto P_2:

$$(3)\qquad \int_\sigma h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma = \int_S \frac{\Delta^2 u}{r}dS + \int_{\sigma+\sigma'}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{r}d\sigma - \int_{\sigma'} u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma'.$$

3. — Indichiamo con n_1 la normale a σ che passa per P_1, con n_2 quella che passa per P_2, e deriviamo nelle direzioni positive di queste normali. Risulta dalle (2), (3):

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial n_1}\int_\sigma h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma = 4\pi\frac{\partial u}{\partial n_1} + \int_S \Delta^2 u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_1}dS + \int_{\sigma+\sigma'}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_1}d\sigma - \int_{\sigma'} u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n_1\partial n}d\sigma',$$

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial n_2}\int_\sigma h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma = \int_S \Delta^2 u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_2}dS + \int_{\sigma+\sigma'}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_2}d\sigma - \int_{\sigma'} u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n_2\partial n}d\sigma'.$$

Ora si ha, indicando con r_0 i vettori che partono dal punto P_0,

$$\lim_{P_1P_0=0}\int_S \Delta^2 u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_1}dS = \lim_{P_2P_0=0}\int_S \Delta^2 u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_2}dS = \int_S \Delta^2 u\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n_0}dS,$$

$$\lim_{P_1P_0=0}\int_{\sigma'} u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n_1\partial n}d\sigma' = \lim_{P_2P_0=0}\int_{\sigma'} u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n_2\partial n}d\sigma' = \int_{\sigma'} u\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial n_0\partial n}d\sigma';$$

e, posto:

$$\lim_{P_1P_0=0}\frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{\partial u}{\partial n_0}$$

ed avuto riguardo alla continuità di $\frac{\partial u}{\partial n}$ nei punti di σ, si ha ancora (*):

(*) Cfr. l'Art. II.

$$\lim_{P_1P_0=0}\int_{\sigma+\sigma'}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_1}d\sigma=\int_{\sigma+\sigma'}\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n_0}+\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}\right)d\sigma-\int_{\sigma+\sigma'}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial u}{\partial n_0}\right)\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma-$$

$$-4\pi\frac{\partial u}{\partial n_0},$$

$$\lim_{P_2P_0=0}\int_{\sigma+\sigma'}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_2}d\sigma=\int_{\sigma+\sigma'}\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n_0}+\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}\right)d\sigma-\int_{\sigma+\sigma'}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial u}{\partial n_0}\right)\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma.$$

Facendo uso di queste formole, le (4), (5) ci dànno:

$$(4')\qquad \lim_{P_1P_0=0}\frac{\partial}{\partial n_1}\int_{\sigma}h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma=\int_{S}\Delta^2u\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n_0}dS+\int_{\sigma+\sigma'}\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n_0}+\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}\right)d\sigma-$$

$$-\int_{\sigma+\sigma'}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial u}{\partial n_0}\right)\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma-\int_{\sigma'}u\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial n_0\partial n}d\sigma',$$

$$(5')\qquad \lim_{P_2P_0=0}\frac{\partial}{\partial n_2}\int_{\sigma}h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma=\int_{S}\Delta^2u\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n_0}dS+\int_{\sigma+\sigma'}\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n_0}+\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}\right)d\sigma-$$

$$-\int_{\sigma+\sigma'}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial u}{\partial n_0}\right)\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n}d\sigma-\int_{\sigma'}u\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial n_0\partial n}d\sigma'.$$

Adunque *le derivate normali dell'integrale* (1) *hanno un limite determinato e finito, quando col punto* P, *discosto da* σ, *ci si avvicina indefinitamente al punto* P_0 *di* σ *in una direzione qualsiasi; e i limiti che si trovano avvicinandosi dalle due parti di* σ *sono uguali.*

Un teorema di reciprocità sulle funzioni di Green d'ordine qualunque.

Nota del Dott. TOMMASO BOGGIO.

1. — Nella teoria delle funzioni armoniche si dimostra che se si sa determinare la funzione di Green per il campo S limitato da una superficie chiusa σ, e avente per polo un punto qualunque di S, si saprà pure risolvere il problema di Dirichlet per il campo S; e viceversa.

Del pari è noto dalla teoria delle funzioni bi-armoniche che se si sa determinare la funzione G, bi-armonica in S, che su σ vale r e la cui derivata normale vale $\frac{\partial r}{\partial n}$ (ove r è la distanza di un punto fisso arbitrario di S ad un punto mobile), si saprà pure risolvere il problema di costruire la funzione bi-armonica in S e che su σ assume colla sua derivata normale valori dati comunque; e viceversa.

Questa funzione G è stata chiamata dal Venske (1) la *seconda funzione di Green*. Essa è stata determinata dal prof. Lauricella nel caso del campo piano indefinito limitato da una retta (2), e nel caso di un campo circolare (3). È poi anche stata determinata dal prof. D'Arcais per il campo piano limitato da due circonferenze concentriche (4).

(1) Venske, *Zur Integration der Gleichung* $\Delta\Delta u = 0$, *ecc.* (" Nachrichten di Gottinga ", a. 1891).

(2) Lauricella, *Sull'equazione delle vibrazioni delle placche elastiche incastrate* (" Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino ", Serie II, tomo XLVI, a. 1896).

(3) Lauricella, *Integrazione dell'equazione* $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ *in un campo di forma circolare* (" Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", Vol. XXXI, a. 1896).

(4) D'Arcais, *La seconda funzione di Green pel campo piano limitato da due circonferenze concentriche* (" Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti ", Serie VII, tomo IX, a. 1898).

Analogamente, si può dimostrare che se si sa determinare la funzione G, m-armonica in S, e che inoltre su σ soddisfa alle condizioni:

$$(1) \qquad \frac{\partial^i G}{\partial n^i} = \frac{\partial^i r^{2m-3}}{\partial n^i}, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

ove n indica la normale interna ed r è la distanza del punto fisso (o polo) P′ (x', y', z') di S al punto mobile P (x, y, z), si saprà pure risolvere il problema di costruire la funzione m-armonica in S e che sul contorno σ assume colle sue derivate normali successive degli ordini $1, 2, \ldots, m-1$, valori assegnati ad arbitrio; e reciprocamente.

Questa funzione G la chiameremo *funzione di Green d'ordine m e di 1ª specie.*

Per la funzione di Green relativa alle funzioni armoniche Riemann ha dimostrato (¹) un teorema di reciprocità che era già stato enunciato da Green. Un'altra dimostrazione del medesimo teorema è dovuta a Neumann (²).

In questa Nota stabilirò il teorema analogo per la funzione di Green d'ordine m e di 1ª specie.

2. — Converrà perciò trasformare le condizioni (1).

Osserviamo che se una funzione U è nulla, colla sua derivata normale, sul contorno σ, che supponiamo regolare, e se inoltre su σ è verificata una delle due condizioni:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} = 0, \qquad \Delta^2 U = 0,$$

allora sarà verificata anche l'altra.

La cosa si vede facilmente passando dalle coordinate x, y, z ad un nuovo sistema di coordinate curvilinee $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, in modo che nelle vicinanze di un punto A di σ, la superficie $\lambda_3 = 0$ coincida con σ, e le linee $\lambda_1 =$ cost., $\lambda_2 =$ cost. coincidano, nelle vici-

(¹) Riemann, *Schwere, Elektricität und Magnetismus*, bearbeitet von Karl Hattendorff.

(²) Neumann, *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ (" Crelle's Journal ", vol. 59, anno 1861).

nanze di σ, colle normali a σ. In tal caso $\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$, e $\Delta^2 U$ differiscono per un fattore e quindi si annullano insieme.

Ne segue senz'altro che se due funzioni U, V assumono su σ, colle loro derivate normali prime, gli stessi valori, e se inoltre su σ è verificata una delle due condizioni:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial n^2}, \qquad \Delta^2 U = \Delta^2 V,$$

sarà di conseguenza verificata anche l'altra.

In generale, si può dimostrare che se due funzioni U, V assumono su σ colle loro derivate normali successive degli ordini 1, 2. ..., s, gli stessi valori, saranno pure soddisfatte, al contorno, le equazioni seguenti, se s è dispari,

$$\begin{cases} \Delta^{2i} U = \Delta^{2i} V \\ \frac{\partial \Delta^{2i} U}{\partial n} = \frac{\partial \Delta^{2i} V}{\partial n}, \end{cases} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{s-1}{2}\right),$$

ovvero queste altre, se s è pari,

$$\begin{cases} \Delta^{2i} U = \Delta^{2i} V \\ \frac{\partial \Delta^{2i} U}{\partial n} = \frac{\partial \Delta^{2i} V}{\partial n} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{s-2}{2}\right); \\ \Delta^s U = \Delta^s V, \end{cases}$$

e viceversa.

Così si vede che, al contorno, in luogo della $\frac{\partial^2}{\partial n^2}$ si può introdurre il Δ^2, e viceversa; la $\frac{\partial^3}{\partial n^3}$ si può sostituire colla $\frac{\partial \Delta^2}{\partial n}$, e viceversa; invece della $\frac{\partial^4}{\partial n^4}$ si può porre il $\Delta^2 \Delta^2$ che abbreviamo in Δ^4, e viceversa; la $\frac{\partial^5}{\partial n^5}$ si può sostituire colla $\frac{\partial \Delta^4}{\partial n}$, e così via.

Se ne conclude che alle condizioni (1) potremo sostituire le seguenti, se m è pari,

$$(1') \begin{cases} \Delta^{2i-2} G = \Delta^{2i-2} r^{2m-3} \\ \frac{\partial \Delta^{2i-2} G}{\partial n} = \frac{\partial \Delta^{2i-2} r^{2m-3}}{\partial n}, \end{cases} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right),$$

oppure le seguenti, se m è dispari,

$$(1'') \begin{cases} \Delta^{2i-2} G = \Delta^{2i-2} r^{2m-3} \\ \dfrac{\partial \Delta^{2i-2} G}{\partial n} = \dfrac{\partial \Delta^{2i-2} r^{2m-3}}{\partial n} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \dfrac{m-1}{2}\right), \\ \Delta^{m-1} G = \Delta^{m-1} r^{2m-3}, \end{cases}$$

e la funzione G, m-armonica in S, che su σ soddisfa a queste condizioni è perciò la medesima di quella che è stata definita prima mediante le (1).

3. — Tale funzione G dipende dalle coordinate x, y, z di P e dalle coordinate x', y', z' del polo P' e la si può rappresentare con $G(x, y, z; x', y', z')$ od anche, più semplicemente, con $G(P, P')$.

In ciò che segue, supporremo anzitutto per fissare le idee, m pari ed il volume S finito.

Consideriamo due punti $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ di S; siano $G(P_0, P_1)$ il valore in P_0 della funzione di Green d'ordine m e di 1ª specie avente per polo P_1, ed $G(P_1, P_0)$ il valore in P_1 della funzione di Green d'ordine m e di 1ª specie il cui polo è P_0; dico che si ha l'identità:

$$G(P_0, P_1) = G(P_1, P_0);$$

cioè:

La funzione G è simmetrica rispetto alle due terne di variabili che vi compariscono.

Sia $P(x, y, z)$ un terzo punto di S; poniamo:

$$\begin{cases} G_0(P) = G(P, P_0) \\ G_1(P) = G(P, P_1); \end{cases}$$

è chiaro che basterà mostrare che:

$$G_0(P_1) = G_1(P_0).$$

La dimostrazione è fondata sulle due formole seguenti [1]:

[1] Queste formole, insieme con altre proprietà, dimostrerò in una Nota susseguente.

$$(2) \qquad \int_S (U\Delta^{2m}V - V\Delta^{2m}U)\,dS +$$

$$+\sum_{i=1}^{i=m}\int_\sigma\left(\Delta^{2i-2}U\,\frac{\partial\Delta^{2m-2i}V}{\partial n} - \Delta^{2m-2i}V\,\frac{\partial\Delta^{2i-2}U}{\partial n}\right)d\sigma = 0,$$

$$(3) \qquad kU(M) = \sum_{i=1}^{i=\frac{m}{2}}\int_\sigma\left[\Delta^{2i-2}U\left(\frac{\partial\Delta^{2m-2i}r^{2m-3}}{\partial n} - \frac{\partial\Delta^{2m-2i}G}{\partial n}\right) -\right.$$

$$\left. -\,(\Delta^{2m-2i}r^{2m-3} - \Delta^{2m-2i}G)\,\frac{\partial\Delta^{2i-2}U}{\partial n}\right]d\sigma - \int_S r^{2m-3}\,\Delta^{2m}U\,dS,$$

ove, per brevità, si è posto $k = 4\pi(2m-2)!$, ed r indica la distanza del punto M di S ad un punto variabile (x, y, z), U, V sono funzioni regolari in S, G è la funzione di Green d'ordine m e di 1ª specie che ha per polo il punto M, ed U(M) indica il valore della funzione U nel punto M.

Ciò posto siano r_0, r_1 le distanze di P_0, P_1 da P; la (3) porge:

$$\begin{cases} kG_0(P_1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=\frac{m}{2}}\int_\sigma\left[\Delta^{2i-2}G_0\left(\frac{\partial\Delta^{2m-2i}r_1^{2m-3}}{\partial n} - \frac{\partial\Delta^{2m-2i}G_1}{\partial n}\right) -\right. \\ \qquad\qquad \left. -\,(\Delta^{2m-2i}r_1^{2m-3} - \Delta^{2m-2i}G_1)\,\dfrac{\partial\Delta^{2i-2}G_0}{\partial n}\right]d\sigma, \\ kG_1(P_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=\frac{m}{2}}\int_\sigma\left[\Delta^{2i-2}G_1\left(\frac{\partial\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}}{\partial n} - \frac{\partial\Delta^{2m-2i}G_0}{\partial n}\right) -\right. \\ \qquad\qquad \left. -\,(\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3} - \Delta^{2m-2i}G_0)\,\dfrac{\partial\Delta^{2i-2}G_1}{\partial n}\right]d\sigma; \end{cases}$$

sottraendo membro a membro si deduce:

$$k[G_1(P_0) - G_0(P_1)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=m}\int_\sigma\left(\Delta^{2i-2}G_0\frac{\partial\Delta^{2m-2i}G_1}{\partial n} - \Delta^{2m-2i}G_1\frac{\partial\Delta^{2i-2}G_0}{\partial n}\right)d\sigma -$$

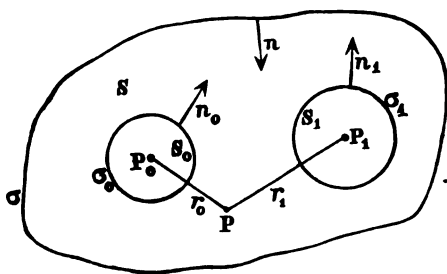
$$- \sum_{i-1}^{i=\frac{m}{2}}\int_\sigma\left(\Delta^{2i-2}G_0\,\frac{\partial\Delta^{2m-2i}r_1^{2m-3}}{\partial n} - \Delta^{2m-2i}r_1^{2m-3}\,\frac{\partial\Delta^{2i-2}G_0}{\partial n}\right)d\sigma +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=\frac{m}{2}}\int_\sigma\left(\Delta^{2i-2}G_1\,\frac{\partial\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}}{\partial n} - \Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}\,\frac{\partial\Delta^{2i-2}G_1}{\partial n}\right)d\sigma.$$

La prima Σ del 2° membro è nulla in virtù della (2); ricordando le (1') si può ancora scrivere:

$$(4)\qquad k[G_1(P_0)-G_0(P_1)]=$$

$$=\sum_{i=1}^{i=m}\int_\sigma\left(\Delta^{2i-2}r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}}{\partial n}-\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2}r_1^{2m-3}}{\partial n}\right)d\sigma.$$

4. — Calcoliamo ora il 2° membro; perciò descriviamo due sfere S_0, S_1, rispettivamente di centri P_0, P_1, di contorni σ_0, σ_1 e di raggi R_0, R_1 che si suppongono piccoli in modo che le due sfere siano esterne l'una all'altra, ed ambedue in S.

La formola (2) applicata alle funzioni r_0^{2m-3}, r_1^{2m-3} che sono m-armoniche nello spazio $S-S_0-S_1$, il quale ha per contorno $\sigma+\sigma_0+\sigma_1$, dà:

$$\sum_{i=1}^{i=m}\int_{\sigma+\sigma_0+\sigma_1}\left(\Delta^{2i-2}r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}}{\partial n}-\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2}r_1^{2m-3}}{\partial n}\right)d\sigma=0,$$

od ancora:

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{i=m}\int_\sigma\left(\Delta^{2i-2}r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}}{\partial n}-\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2}r_1^{2m-3}}{\partial n}\right)d\sigma+$$

$$+\sum_{i=1}^{i=m}\int_{\sigma_0}\left(\Delta^{2i-2}r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}}{\partial n_0}-\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2}r_1^{2m-3}}{\partial n_0}\right)d\sigma_0+$$

$$+\sum_{i=1}^{i=m}\int_{\sigma_1}\left(\Delta^{2i-2}r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}}{\partial n_1}-\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2}r_1^{2m-3}}{\partial n_1}\right)d\sigma_1=0,$$

ove n_0, n_1 sono le normali esterne a σ_0, σ_1.

Occupiamoci anzitutto della seconda Σ; si ha evidentemente:

$$\sum_{i=1}^{i=m}\int_{\sigma_0}\left(\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}}{\partial n_0}-\Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}}{\partial n_0}\right)d\sigma_0=$$

$$=\int_{\sigma_0}\left(r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2} r_0^{2m-3}}{\partial n_0}-\Delta^{2m-2} r_0^{2m-3}\frac{\partial r_1^{2m-3}}{d n_0}\right)d\sigma_0+$$

$$+\sum_{i=2}^{i=m}\int_{\sigma_0}\left(\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}}{\partial n_0}-\Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}}{\partial n_0}\right)d\sigma_0;$$

ma

$$\Delta^{2m-2} r_0^{2m-3}=(2m-2)!\,.\,\frac{1}{r_0},$$

perciò si avrà ancora:

$$\int_{\sigma_0}\left(r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2} r_0^{2m-3}}{\partial n_0}-\Delta^{2m-2} r_0^{2m-3}\frac{\partial r_1^{2m-3}}{\partial n_0}\right)d\sigma_0=$$

$$=(2m-2)!\int_{\sigma_0}\left(r_1^{2m-3}\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial n_0}-\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_1^{2m-3}}{\partial n_0}\right)d\sigma_0=$$

$$=(2m-2)!\int_{\sigma_0}\left(-r_1^{2m-3}\frac{1}{R_0^2}-\frac{1}{R_0}\frac{\partial r_1^{2m-3}}{\partial n_0}\right)R_0^2\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Poniamo ora:

$$r_1^{2m-3}=\overline{P_0P_1}^{2m-3}+r_1'^{2m-3};$$

è facile ottenere:

$$\int_{\sigma_0}\left(r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2} r_0^{2m-3}}{\partial n_0}-\Delta^{2m-2} r_0^{2m-3}\frac{\partial r_1^{2m-3}}{\partial n_0}\right)d\sigma_0=$$

$$=(2m-2)!\int_{\sigma_0}\left[-(\overline{P_0P_1}^{2m-3}+r_1'^{2m-3})-R_0\frac{\partial r_1^{2m-3}}{\partial n_0}\right]\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi=$$

$$=-k\,\overline{P_0P_1}^{2m-3}-(2m-2)!\int_{\sigma_0}\left(r_1'^{2m-3}+R_0\frac{\partial r_1^{2m-3}}{\partial n_0}\right)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Analogamente la terza Σ della (5) porge:

$$\sum_{i=1}^{i=m}\int_{\sigma_1}\left(\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}}{\partial n_1} - \Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}}{\partial n_1}\right)d\sigma_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=m-1}\int_{\sigma_1}\left(\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}}{\partial n_1} - \Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}}{\partial n_1}\right)d\sigma_1 +$$

$$+\int_{\sigma_1}\left(\Delta^{2m-2} r_1^{2m-3}\frac{\partial r_0^{2m-3}}{\partial n_1} - r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2} r_1^{2m-3}}{\partial n_1}\right)d\sigma_1;$$

e ponendo:

$$r_0^{2m-3} = \overline{P_0P_1}^{2m-3} + r_0'^{2m-3},$$

si ricava:

$$\int_{\sigma_1}\left(\Delta^{2m-2} r_1^{2m-3}\frac{\partial r_0^{2m-3}}{\partial n_1} - r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2} r_1^{2m-3}}{\partial n_1}\right)d\sigma_1 =$$

$$= k\,\overline{P_0P_1}^{2m-3} + (2m-2)!\int_{\sigma_1}\left(R_1\frac{\partial r_0^{2m-3}}{\partial n_1} + r_0'^{2m-3}\right)\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\varphi'.$$

Sostituendo nella (5) si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{i=m}\int_{\sigma}\left(\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}}{\partial n} - \Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}}{\partial n}\right)d\sigma +$$

$$+\sum_{i=2}^{i=m}\int_{\sigma_0}\left(\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}}{\partial n_0} - \Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}}{\partial n_0}\right)d\sigma_0 +$$

$$+\sum_{i=1}^{i=m-1}\int_{\sigma_1}\left(\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}}{\partial n_1} - \Delta^{2m-2i} r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2} r_1^{2m-3}}{\partial n_1}\right)d\sigma_1 -$$

$$-(2m-2)!\int_{\sigma_0}\left(r_1'^{2m-3} + R_0\frac{\partial r_1^{2m-3}}{\partial n_0}\right)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi +$$

$$+(2m-2)!\int_{\sigma_1}\left(R_1\frac{\partial r_0^{2m-3}}{\partial n_1} + r_0'^{2m-3}\right)\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\varphi' = 0.$$

Questa formola vale comunque siano piccoli i raggi R_0, R_1; facciamoli tendere a 0, e osserviamo che in tal caso la seconda e la terza Σ del 1° membro della formola precedente tendono a 0, e che pure tenderanno a 0 gli integrali:

$$\int_{\sigma_0}\left(r_1'^{2m-3} + R_0\frac{\partial r_1^{2m-3}}{\partial n_0}\right)\operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi,\quad \int_{\sigma_1}\left(R_1\frac{\partial r_0^{2m-3}}{\partial n_1} + r_0'^{2m-3}\right)\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\varphi',$$

e allora si avrà:

$$(4')\quad \sum_{i=1}^{i=m}\int_\sigma\left(\Delta^{2i-2}r_1^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}}{\partial n}-\Delta^{2m-2i}r_0^{2m-3}\frac{\partial\Delta^{2i-2}r_1^{2m-3}}{\partial n}\right)d\sigma=0.$$

La (4) porge in conseguenza:

$$G_1(P_0)=G_0(P_1),$$

come volevasi dimostrare.

5. — Finora si suppose m pari; supponiamo ora m dispari. Invece delle (1′), al contorno, dovranno essere soddisfatte le (1″); la (2) sussiste inalterata; in luogo della (3) si ha ora la seguente:

$$kU(M)=\sum_{i=1}^{i=\frac{m-1}{2}}\int_\sigma\Big[\Delta^{2i-2}U\left(\frac{\partial\Delta^{2m-2i}r^{2m-3}}{\partial n}-\frac{\partial\Delta^{2m-2i}G}{\partial n}\right)-$$

$$-(\Delta^{2m-2i}r^{2m-3}-\Delta^{2m-2i}G)\frac{\partial\Delta^{2i-2}U}{\partial n}\Big]d\sigma+$$

$$+\int_\sigma\Delta^{m-1}U\left(\frac{\partial\Delta^{m-1}r^{2m-3}}{\partial n}-\frac{\partial\Delta^{m-1}G}{\partial n}\right)d\sigma-\int_S r^{2m-3}\Delta^{2m}U\,dS.$$

Ragionando quindi come nel caso precedente si giunge alla (4), la quale perciò non subisce mutamenti di sorta. Ne segue che la (4′) è ancora valida, e la (4) porge quindi:

$$G_1(P_0)=G_0(P_1);$$

vale a dire il teorema di reciprocità sussiste anche in questo caso; perciò vale qualunque sia l'ordine della funzione di Green che si considera.

6. — Al contorno, invece delle (1′) si possono porre altre condizioni per la funzione G, ad es. invece dell'equazione:

$$\frac{\partial\Delta^{m-2}G}{\partial n}=\frac{\partial\Delta^{m-2}r^{2m-3}}{\partial n}$$

che si ottiene ponendo nella seconda delle (1') $i=\frac{m}{2}$, si può porre l'equazione:

$$\Delta^m G = \Delta^m r^{2m-3}$$

oppure l'altra:

$$\frac{\partial \Delta^m G}{\partial n} = \frac{\partial \Delta^m r^{2m-3}}{\partial n},$$

ecc. e così nascono nuove funzioni che diremo *funzioni di Green d'ordine m e di 2ª specie, di 3ª specie, ecc...*

Siano $s_2, s_3, \ldots, s_{m-1}, s_m$ dei numeri positivi (dei quali il primo soltanto può esser 0) e minori di m, disposti per ordine di grandezza crescente e tali inoltre che tre consecutivi non siano mai eguali. Consideriamo poi le quantità:

$$r^{2m-3},\ \frac{\partial \Delta^{2s_2} r^{2m-3}}{\partial n},\ \Delta^{2s_3} r^{2m-3}, \ldots,\ \frac{\partial \Delta^{2s_{m-1}} r^{2m-3}}{\partial n},\ \Delta^{2s_m} r^{2m-3};$$

in esse compaiono derivate della funzione r^{2m-3} rispettivamente degli ordini $0,\ 2s_2+1,\ 2s_3, \ldots, 2s_{m-1}+1,\ 2s_m$; supporremo ancora che questi numeri siano tali che la somma di due qualunque di essi non sia mai uguale a $2m-1$.

Se ora si considera la funzione di Green d'ordine m che su σ soddisfa alle condizioni:

$$\left\{\begin{array}{l} G = r^{2m-3} \\ \frac{\partial \Delta^{2s_2} G}{\partial n} = \frac{\partial \Delta^{2s_2} r^{2m-3}}{\partial n} \\ \Delta^{2s_3} G = \Delta^{2s_3} r^{2m-3} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \Delta^{2s_{m-1}} G}{\partial n} = \frac{\partial \Delta^{2s_{m-1}} r^{2m-3}}{\partial n} \\ \Delta^{2s_m} G = \Delta^{2s_m} r^{2m-3}, \end{array}\right.$$

si può dimostrare che anche per essa sussiste il teorema di reciprocità; cioè questa funzione G è simmetrica rispetto alle coordinate del polo e alle coordinate del punto mobile.

7. — Il teorema dimostrato nei n. 3, 4 nel caso di funzioni di 3 variabili, si può estendere a funzioni di un numero qualunque n di variabili.

Bisogna però distinguere due casi:

1° Il numero n è dispari; oppure il numero n è pari, ma però l'ordine m della funzione poli-armonica è minore di $\frac{n}{2}$, cioè $2m < n$.

2° Il numero n è pari ed inoltre $2m \geq n$.

La distanza r del polo $P'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ al punto mobile $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è in ogni caso data da

$$r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}.$$

Ciò posto è facile vedere che nel 1° caso la funzione $\frac{1}{r^{n-2}}$ è armonica; ne segue che la funzione $r^{2m-2} \frac{1}{r^{n-2}}$ cioè r^{2m-n} è m-armonica; per conseguenza invece delle (1′) si dovranno porre le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^{2i-2} G = \Delta^{2i-2} r^{2m-n} \\ \frac{\partial \Delta^{2i-2} G}{\partial n} = \frac{\partial \Delta^{2i-2} r^{2m-n}}{\partial n}, \end{array} \right. \qquad \left(i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}\right),$$

e analogamente per le (1″).

La (2) non muta forma; alla (3) si dovrà sostituire la seguente, se m è pari,

$$kU(M) = \sum_{i=1}^{i=\frac{m}{2}} \int_\sigma \left[\Delta^{2i-2} U \left(\frac{\partial \Delta^{2m-2i} r^{2m-n}}{\partial n} - \frac{\partial \Delta^{2m-2i} G}{\partial n} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\Delta^{2m-2i} r^{2m-n} - \Delta^{2m-2i} G \right) \frac{\partial \Delta^{2i-2} U}{\partial n} \right] d\sigma - \int_S r^{2m-n} \Delta^{2m} U \, dS,$$

ove k è un coefficiente numerico.

Ragionando come nel n. 3 si ottiene, invece della (4), la seguente:

$$k \left[G_1(P_0) - G_0(P_1) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=m} \int_\sigma \left(\Delta^{2i-2} r_1^{2m-n} \frac{\partial \Delta^{2m-2i} r_0^{2m-n}}{\partial n} - \Delta^{2m-2i} r_0^{2m-n} \frac{\partial \Delta^{2i-2} r_1^{2m-n}}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Calcolando il 2° membro con un procedimento analogo a quello seguìto nel n. 4 si trova che vale 0; onde $G_1(P_0) = G_0(P_1)$.

Nel 2° caso invece è facile verificare che la funzione $r^{2m-n}\log r$ è m-armonica, perciò alle (1′) si dovranno sostituire le seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta^{2i-2}G &= \Delta^{2i-2} r^{2m-n}\log r \\ \frac{\partial \Delta^{2i-2}G}{\partial n} &= \frac{\partial \Delta^{2i-2} r^{2m-n}\log r}{\partial n} \end{aligned}\right. \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right),$$

e analogamente per le (1″).

Anche in questo caso la (2) non cambia di forma, invece della (3) si dovrà applicare la seguente, supposto m pari,

$$kU(M) = \sum_{i=1}^{i=\frac{m}{2}} \int_\sigma \left[\Delta^{2i-2}U \left(\frac{\partial \Delta^{2m-2i} r^{2m-n}\log r}{\partial n} - \frac{\partial \Delta^{2m-2i}G}{\partial n} \right) - \right.$$

$$\left. - (\Delta^{2m-2i} r^{2m-n}\log r - \Delta^{2m-2i}G) \frac{\partial \Delta^{2i-2}U}{\partial n} \right] d\sigma - \int_S r^{2m-n}\log r\, \Delta^{2m}U\, dS,$$

in cui k è un coefficiente numerico.

Da queste formole si ottiene poi la seguente, analoga alla (8),

$$k[G_1(P_0) - G_0(P_1)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=m} \int_\sigma \left(\Delta^{2i-2} r_1^{2m-n}\log r_1 \frac{\partial \Delta^{2m-2i} r_0^{2m-n}\log r_0}{\partial n} - \right.$$

$$\left. - \Delta^{2m-2i} r_0^{2m-n}\log r_0 \frac{\partial \Delta^{2i-2} r_1^{2m-n}\log r_1}{\partial n} \right) d\sigma,$$

dalla quale si deduce poi $G_1(P_0) = G_0(P_1)$.

Questi risultati valgono anche se m è dispari.

Si conclude perciò che il teorema di reciprocità sussiste per funzioni di quante si vogliano variabili.

L'Accademico Segretario
ANDREA NACCARI.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Febbraio 1900.

PRESIDENZA DEL PROF. BERNARDINO PEYRON
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Socii Rossi, Manno, Bollati di Saint Pierre, Pezzi, Ferrero, Cipolla, Brusa e Renier Segretario.

È approvato l'atto verbale della seduta antecedente.

Il Segretario presenta, da parte del Socio Boselli, l'opuscolo: *Risposta del Ministro del Tesoro (P. Boselli) all'interpellanza dell'on. Senatore P. Vacchelli sugli Istituti d'emissione e sulla circolazione*, Roma, 1900. — L'offerente sarà ringraziato.

Il Socio Manno fa omaggio all'Accademia del volume del cav. Ferdinando Colonna, *Scoperte di antichità in Napoli dal 1876 a tutto il 1897 con notizie delle scoperte anteriori e ricordi storico-artistico-topografici*, Napoli, 1898. — Sarà ringraziato l'autore.

Il Socio Peyron, ff. di Presidente, presentando il volumetto del Prof. G. B. Gerini: *Paolo Mattia Doria filosofo e pedagogista*, lo accompagna colle seguenti parole:

Paolo Mattia Doria (nato a Genova e morto ottuagenario in Napoli nella metà del passato secolo) mostrasi veramente tal pensatore, che fa meraviglia al Gerini, che altri in Italia prima di lui non l'abbia studiato di proposito. Bensì i meriti di lui

furono riconosciuti dal Rosmini, il quale nel *Nuovo Saggio*, etc., vol. 2°, n° 220, nota, avvisava, come le novità di G. Locke trovassero una dignitosa opposizione nel Doria, che col Vico, di cui godeva l'amicizia, avrebbe potuto salvare l'Italia da molti traviamenti, se in essa non fosse prevalso *l'amore non tanto del nuovo, quanto dello straniero.*

Il prof. Gerini, proseguendo i suoi studi sugli scrittori pedagogici, nella monografia, che ho l'onore di presentare all'Accademia in nome di lui, ha voluto vendicare da immeritato obblio un pensatore, che egli chiama uno dei più profondi del secolo XVIII, e perciò non si è limitato a studiare il Doria soltanto quale pedagogista.

La monografia è divisa in tre parti.

La prima contiene le notizie biografiche e bibliografiche del Doria, ed è incontestato, che l'autore non risparmiò nè a fatiche nè a ricerche consultando molti Giornali letterarî del tempo, facendo pur menzione di quanti ricordavano il filosofo da lui tolto a studiare.

La seconda parte riguarda il Doria come teorico della filosofia e del diritto, e pone in evidenza la parte da lui sostenuta nel combattere Cartesio, Spinoza, e specialmente G. Locke. La critica, a cui il pensatore Genovese sottopose la dottrina lockiana, fu altamente apprezzata, oltre al Rosmini, da R. Flint, prof. all' Università di Edimburgo, che nell'opera: *G. Battista Vico* (trad. it., Firenze, 1888) la dichiarava abilissima. L'esame della dottrina psicologica trae l'autore a dire delle pedagogiche, le quali debbono essere in mente del Doria una logica conseguenza di quelle. In questa terza parte l'autore studia diffusamente l'opera più nota del Doria: *Della vita civile e della educazione del principe.* Ed è questa l'opera, che un illustre Membro di questa Accademia, il Card. Gerdil, raccomandava al suo reale alunno, pur tenendo conto di altri lavori, ed in modo speciale della *Difesa della Metafisica* degli antichi contro il sig. G. Locke.

Pare al prof. Gerini, che in pedagogia il Doria abbia vedute veramente nuove per i suoi tempi, ed invero non solo iniziò lo studio della psicologia infantile, pigliando le mosse dalla vita prenatale, ma assai prima del Pestalozzi pose il principio della natura umana, come il fondamento dell' arte educatrice.

Notevoli mi sembrano due delle appendici, che fan seguito al lavoro che presento. L'una concerne un esame delle dottrine pedagogiche del Locke, l'altra alcune idee dell'autore, sugli studi convenienti alle donne.

Quale è nelle sue linee principali, la monografia del professore Gerini, a mio credere, si raccomanda agli studiosi della storia filosofica e pedagogica d'Italia, e si raccomanda con forti e belle ragioni.

Il Socio Cipolla dà lettura di una sua memoria: *Codici sconosciuti della Biblioteca Novaliciense.* — Assentatosi momentaneamente il Socio Cipolla, la Classe accoglie a voti unanimi per la inserzione nelle *Memorie* accademiche lo scritto da lui presentato. Gli *Atti* ne contengono il riassunto.

Il Socio Pezzi presenta una nota del prof. Giuseppe Fraccaroli dell'Università di Torino: *Un frammento di Epicuro.* — È accolta negli *Atti.*

Parimenti è accolta negli *Atti* una nota del prof. Gontardo Ferrini dell'Università di Pavia: *Sui frammenti giuridici del palinsesto di Autun,* presentata dal Socio Brusa.

LETTURE

Un frammento d'Epicuro.

Nota del Prof. GIUSEPPE FRACCAROLI
della R. Univ. di Torino.

Il n. CCXV del secondo volume dei Papiri di Ossirinco è un frammento filosofico, il cui autore, dicono gli editori, " fu probabilmente un filosofo epicureo, forse Epicuro stesso, che scrisse περὶ θεῶν e περὶ ὁσιότητος ". Sono tre colonne, le due prime in condizioni abbastanza buone, la terza più guasta, ma non così disperata da non potersi in parte ricostruire. Vale pertanto la pena di ripigliare in esame sia la reintegrazione del tutto sia la sua attribuzione.

L'argomento dello squarcio non è punto dubbio: vi si discute l'idea popolare della religione e vi si oppone l'idea filosofica epicurea. Questo è uno dei punti fondamentali di quella dottrina, e perciò interessa conoscerlo con la maggiore possibile precisione. La prima colonna, dopo due linee lacunose e inintelligibili, comincia a capirsi dalla linea 3 in poi: le prime parole, τῆς φύσεως, ὡς ἔλεγον, οἰκεῖον, evidentemente chiudevano il periodo precedente; dopo del quale alla l. 4 ne comincia un altro, e il senso corre piano e senza intoppi fino a tutta la l. 23. Dice infatti: " ... proprio della natura, come ho detto. Neppure quando, affè, si senta dire così da chi che sia: ' io temo gli Dei tutti e li venero e a questi voglio fare tutti i sacrifizi, a questi consacrar doni '. È più garbato infatti forse talvolta costui a paragone degli altri ignoranti; pure neanche qui si ha il capo saldo della religione. Tu invece, o uomo, pensa che una maggiore beatitudine è quella di determinar bene ciò che possiamo sceverare come il sommamente ottimo di tutto ciò che è, e questa

determinazione abbila in gran conto e rispetto „. Seguono alcune linee affatto lacunose:

[..] ε [.] . ι το[υ]το επε̣[ι]τα
25 [...............] αυτ̣[..
[...........̣]. [.] ωσπ[..
[...]. [...] ντ[..]ο̣τ̣αν σε
[...] θο [..] θ̣ο̣σ̣ιν αλλα μονο^ν
[...] ον̣ [..] ορων τηλικου
30 [του] σεμνωματος κατα
[τη]ν θ[ε]ωριαν προς την
[εαυ]του ευ[δαιμ]ονιαν κ[..

Con ἀλλὰ μόνον (l. 28) evidentemente comincia una proposizione, che si può sperare di ricostruire. Più disperata è invece la proposizione precedente (l. 24-28); se non che l'avversativo ἀλλὰ ci avverte che essa doveva essere in opposizione alla successiva. La seconda proposizione dice a che fine deve essere limitato (μόνον) il culto degli dei; dunque la prima accennerà a ciò che da questo fine doveva essere escluso. Ora nello svolgimento successivo dell'argomentazione troviamo che ciò che deve essere escluso è il timore e la speranza; non è pertanto fuori di proposito supporre che qui prima fosse proposta questa esclusione, e che questo press'a poco fosse il senso: E bada (1) anche a questo (τοῦτο ἔπειτα), di non sperare perciò *da loro* (ἐξ] αὐτ[ῶν) alcuna ricompensa, *come se* (ὥσπ[ερ) ti dovessero ricambiare (ἀντιδωσ]όν[των???) *quando ti* (ὅταν σε) riconoscano buono (ἀγα] θὸ[ν νο̣ῶ̣σιν???). Se il concetto non sarà precisamente questo, deve almeno essere di questo genere, o questa almeno deve essere la sua conformazione. In ciò che segue, linea 32, risarcirei σεαυτοῦ invece che ἑαυτοῦ, sia perchè tutto il discorso è in seconda persona, sia per analogia col principio della col. II, dove si ripete lo stesso concetto. E questo è pertanto il senso, — che non devi prestare questo culto per un eventuale ricambio, ' ma

1) l. 24. La prima parola potrebbe essere ἔνεστι, cui dovea seguire nella l. 25 νοεῖν o altro verbo simile; ma per il senso converrebbe meglio seguitare con la stessa forma delle linee precedenti, press'a poco νόει δὲ τοῦτο.

solamente badando alla soddisfazione che di così fatto culto quanto alla speculazione può derivare alla tua propria felicità „. L'oggetto di ὁρῶν, — sia esso la soddisfazione, o l'effetto, o il vantaggio, o qualcosa di simile, — doveva essere nella lacuna della l. 29. Seguono due linee guaste, e quindi la seconda colonna in capo alla quale è segnata una lacuna. In questa parte mancante, a voler connettere i concetti precedenti coi seguenti, si dovea dire, che infatti da questo modo di considerare la divinità qualche piacere si può trarre; poichè continua:

[. .] υτικον και .κεχα[ρισ]με
νον εαν· ευκαιρηι τιμ[ω]ν
αυτην την θεωριαν σεαυ
του ταις συγγενεσιν κατα
5 σαρκα ηδοναις αι π οτ αν
———
καθηκωσιν αλλα ποτε
και τη των νομων συμπε ς
ριφοραι χρωμενο[[υ]] σου'

chè la sarà “ una cosa graziosa, se tu colga il punto nell'onorare la stessa tua speculazione coi piaceri naturali secondo la carne ... „ cioè, sarà bello servire a questo culto razionale della divinità creata dalla nostra stessa ragione, seguendo insieme le inclinazioni della natura. E fin qui è chiaro, ma non è così chiaro il resto. Non ostante la maggiore spaziatura a metà della l. 5 e la paragrafe dopo di essa, credo che la proposizione relativa che comincia con αἵ deva legarsi strettamente alla precedente. L'avversativo ἀλλά ποτε dalla l. 6 mi fa poi credere alla correttezza della lezione ποτ' anche nel primo membro; e la contrapposizione tra le due proposizioni consisterebbe nell' essere l'una positiva e l'altra negativa; negativa dev'essere la seconda, e la negazione è in tal caso la finale οὔ. Leggerei pertanto: αἵ ποτ' ἂν καθήκωσιν, ἀλλά ποτε καὶ, τῇ νῦν νόμων συμπεριφορᾷ χρώμενος, οὔ, — dove χρώμενος si dovrebbe intendere coordinato a τιμῶν. Dunque: è una cosa graziosa se tu onori la divinità coi godimenti naturali, “ che sieno, talora, appropriati, ma

talora anche, se badi alle disposizioni delle leggi, no „. La lezione χρωμένου σου non la so ridurre ad alcun senso.

Dalla l. 8 alla l. 19 tutto è chiaro: “ Ma il timore qui non ce lo devi introdurre nè la supposizione che gli Dei ti abbiano a ricambiare di gratitudine, perchè tu fai questo „: cioè per il culto che presti loro. “ Infatti che cosa, per Zeus, come si suol dire, temi tu? forse perchè credi di offenderli? (1). Dunque è chiaro che li rimpicciolisci (2). E come dunque non è una cosa meschina la divinità che tu immagini, se è da meno di te? „ Seguono altre cinque linee (20-24) mutile, nelle quali continua l'interrogazione, come mostrano le parole ἢ καὶ, con le quali comincia il costrutto continuando la l. 19. Con la l. 22 il costrutto dev'essere finito, come indica la paragrafe segnata dopo di essa. Segue ll. 23-24:

―――――
λογ̣[........]ν̣ι̣οιανη̣[...
βλ[........]ανθρω[π..
―――――

E la paragrafe indica anche qui che il costrutto è finito. Per la l. 23 proporrei risarcire: λογίζονται ἔνιοι, e il numero delle lettere corrisponde precisamente al numero dei puntini segnati nella stampa. Quanto al resto βλ. deve appartenere al nome βλάβη o al verbo βλάπτω, come apparisce da ciò che si ragiona

(1) Così intendono anche gli editori: il testo πότερα ἀδικεῖν ἐκείνους νομίζων potrebbe, ma meno bene, prestarsi ad un'altra interpretazione, cioè: “ forse perchè li credi capaci di fare ingiustizia „, — in questo senso: credi che per le tue preghiere o per i tuoi doni possano sospendere il corso delle leggi e della giustizia? Questo senso converrebbe meglio al *ricambio di grazie*, ma il primo è più appropriato al *timore*, che è il concetto prevalente. È oltre a ciò da notarsi che in italiano il ragionamento non riesce chiaro, se non si bada bene al concetto di ἀδικέω, cui *offendere* corrisponde solo imperfettamente. — Infatti si può offendere Dio anche senza rimpicciolirlo, per esempio bestemmiandolo; ma ἀδικέω vuol dire insieme e più propriamente *privare uno della giustizia*, cioè di ciò che gli spetta, defraudarlo in modo ch'egli ne abbia un danno; — e in questo senso il ragionamento corre liscio: chi pensa si possa *recar danno* a Dio, lo rimpicciolisce.

(2) Il testo, ll. 15-16 ha: οὐκοῦν δῆλον ὡς ἐλαττοῦν· ma l'υ di ἐλαττοῦν è segnato come dubbio. Preferirei il participio ἐλαττῶν coordinato a νομίζων.

poco dopo. Pare infatti che qui si proponga il quesito che vien risolto nelle linee successive, se il culto degli Dei, secondo è inteso popolarmente, non possa essere utile per ciò che ci risparmia dei danni da parte degli altri uomini. Continua infatti, ll. 25-30: " Poichè credono che essi " cioè gli uomini, " devano temerli e onorarli (1), affinchè trattenuti dalla paura non tendano loro insidie... sia che credano ciò rettamente, cioè di non dover del tutto più soffrir danno, sia non rettamente... ". E dopo due altre linee mutile finisce la seconda colonna.

La colonna terza, invece di 34 linee o di 33 come ne hanno rispettivamente la prima e la seconda, ha soltanto frammenti di 22, sui quali gli editori tentarono qualche ricostruzione, ma non vi aggiunsero nè spiegazione nè osservazione alcuna. A me pare che oltre che dedurre con certezza che qui si continua la discussione sulla βλάβη, si possa anche con abbastanza probabilità riconoscere come in particolare vi si contenga la confutazione dell'argomento testè esposto, sostenendosi che il concetto popolare della divinità non serve ad alcuna nostra difesa, ma che difesa e tutela si ha solo quando non la si aspetta che da se stessi. Dopo una riga mutila infatti si legge:

καιη
ται το γαρ κατα[
βλαβην εφερεν αụ[
προσεδοκα το επ̣[

Le due paragrafi ci indicano che qui è compreso un periodo finito, il cui principio evidentemente è τὸ γάρ. Vi si parla di sopportare il danno e di aspettare. Aspettare che cosa? La riparazione? Una ricostruzione più o meno possibile sarebbe forse questa: τὸ γὰρ κατα[νύτον τὴν] βλάβην ἔφερεν ἄν, [καὶ] προσεδόκα τὸ ἐπ[ιτιμῶν]. Cioè, l'uomo che ha questa falsa fiducia è un disgraziato, " infatti egli è disposto a sopportare ciò che gli reca danno, e intanto aspetta [invano] ciò che lo vendichi ". Le ll. 5-14 che seguono sono date dagli editori così:

5 και χωρις τουτ[
τουμενοι μη παρ[
σημεια της χαριτ̣[ος νομι

(1) l. 26 τ[ούτους], ma non pare ci sia spazio per tante lettere.

ζοντες αυτους ρα[διως καθ
εαυτους και προσ[
10 αφικεσθαι και κ[
οσουσδηποτε τροπ[ους....
τες προς το της βλα[βης υπο
πτευμα και την τ[αυτης
προφυλακην εγι[

La paragrafe indica che qui finiva il periodo, — il cui senso mi pare trasparisca ancora abbastanza chiaro. Quasi sicuro io crederei un complemento τούτ[ων] alla l. 5 ed ἐγί[νοντο alla l. 14: quanto al resto proporrei la seguente ricostruzione: καὶ χωρὶς τούτ[ων, οἱ αἰ]τούμενοι μὴ παρ[ὰ θεῶν] σημεῖα τῆς χάριτος, νομίζοντες αὐτοὺς ῥαδίως καθ' ἑαυτοὺς καὶ πρὸς [ἄδειαν] ἀφικέσθαι καὶ κ[ρατῆσαι] ὁσουσδήποτε τρόπους, [θαρροῦν]τες πρὸς τὸ τῆς βλάβης ὑπόπτευμα καὶ τὴν ταύτης προφυλακὴν ἐγί[νοντο ἄν]. Per non far troppa confusione ho chiuso tra uncini soltanto i supplementi miei, molti dei quali intendo di dare semplicemente come approssimativi: così per esempio, invece di παρὰ θεῶν, si potrebbe pensare a παρά τινων o παρ' ἄλλων, invece di ἄδειαν ad ἀβλάβειαν, se non fosse una parola troppo lunga, come del pari devo notare che per θαρροῦντες non c'è forse posto sufficente. Il senso è chiarissimo: " ed oltre di ciò quelli che non richiedono da chi che sia alcun segno di riconoscenza, reputando poter essi facilmente da sè giungere a difendersi ed a trionfare in un modo o in un altro, possono star fiduciosi quanto a ogni sospetto di danno e alle cautele per guardarsene „. — Le ultime linee sono troppo guaste per poterne ricavare un senso: solo si capisce (l. 18: μ[α]καριαν) che vi si continua l'argomento della vita beata.

Ora per decidere se questo frammento si possa o si debba attribuire ad Epicuro conviene prenderlo in attento esame e quanto al concetto e quanto alla forma.

Quanto al concetto sappiamo, oltre che da altre fonti, dal catalogo conservatoci da Diogene Laerzio che Epicuro scrisse περὶ θεῶν e περὶ ὁσιότητος. Oltre a questi due titoli, un altro analogo a questi, περὶ εὐσεβείας, vien pure messo innanzi, ed è accettato anche dall'Usener (1). Di un libro περὶ εὐσεβείας però

(1) *Epicurea*, pag. 100. Nelle citazioni seguo sempre questa edizione.

non abbiamo alcuna espressa testimonianza di antichi, e il titolo greco non è altro che la traduzione di un latino *de sanctitate*, che si ricaverebbe da Cicerone. Dice egli infatti nel *De Nat. Deor.*, I, 44, 123: " at etiam liber est Epicuri de sanctitate ", e *ibid.*, I, 41, 115: " at etiam de sanctitate, de pietate adversus deos libros scripsit Epicurus ". E poichè poco dopo (*ib.*, 41. 116) soggiunge " est enim pietas justitia adversum deos,.... sanctitas autem est scientia colendorum deorum ", si cercarono in greco i termini corrispondenti all'una e all'altra parola, e si tradusse (Sext. Emp., *Adv. dogm.*, III, 123, apud Usener, pag. 100): ἔστι γὰρ εὐσέβεια ἐπιστήμη θεῶν θεραπείας, e (*ib.* 124): ἡ ὁσιότης δικαιοσύνη τις οὖσα πρὸς θεούς. Cicerone dice che Epicuro scrisse *de sanctitate*, *de pietate*; dunque al περὶ ὁσιότητος si aggiunse un περὶ εὐσεβείας. — Non credo legittima questa illazione. Non dobbiamo infatti badar tanto al senso che Cicerone dava a due parole latine, e che dopo di lui si diede alle due greche che parvero ad esse corrispondenti, quanto invece all'uso che ne fecero i Greci che Epicuro poteva prendere a modello. E a confutare quella precipitosa conseguenza basterà citare un fatto solo. Nell'*Eutifrone* platonico le parole ὅσιον ed εὐσεβὲς sono usate in presso che identica accezione: c'è di più: della ὁσιότης si dà appunto la definizione che Cicerone dà della *sanctitas* e che Sesto Empirico attribuisce all'εὐσέβεια. Dice infatti a p. 14 C.: τί δὴ αὖ λέγεις τὸ ὅσιον εἶναι καὶ τὴν ὁσιότητα; οὐχὶ ἐπιστήμην τινὰ τοῦ θύειν τε καὶ εὔχεσθαι. In conclusione non consta che tra la ὁσιότης e la εὐσέβεια vi fosse una distinzione universalmente accettata, il titolo περὶ εὐσεβείας non ci è dato da alcuna fonte, e le parole di Cicerone si hanno ad intendere solo nel senso che per lui la ὁσιότης di Epicuro non aveva ragione di essere nè come *giustizia* nè come *scienza*; non come giustizia, non ammettendo Epicuro tra gli dei e gli uomini alcun rapporto; non come scienza, perchè non si dà scienza di ciò che non è, " nullo nec accepto ab eis nec sperato bono ".

Ristrette pertanto a due le opere di Epicuro di argomento, diremo così, teologico, vediamo se all'una o all'altra si possa con qualche probabilità attribuire il nostro frammento. — Quanto al περὶ θεῶν il risultato della ricerca è affatto negativo. Ciò che dice Plutarco (*contra Epic. beatitud.*, 21, p. 1102 *b*, apud Usener, p. 103) non ha punto che fare, e l'intonazione è del tutto di-

versa: dai frammenti poi di Filodemo, se non si può cavare alcun senso determinato, questo però si può indurre con sicurezza che lì col nostro frammento non c'è nulla di comune. Ben altrimenti stanno le cose rispetto al περὶ ὁσιότητος.

Il papiro intanto tratta espressamente questo soggetto: in esso si ricerca che cosa sia l'essenza della santità, col. I ll. 11-16: χαριέστερον μὲν ἴσως ποτὲ ὁ τοιοῦτος τῶν ἄλλων ἰδιωτῶν ἐστιν, ὅμως δὲ οὐδὲ ταύτῃ πω τὸ βέβαιον εὐσεβείας ὑπάρχει. E il modo stesso con cui l'argomento si svolge è conforme a quello che è indicato da Cicerone stesso nel luogo citato. Prosegue egli infatti (I. 41. 115); " At quomodo in his loquitur? Ut Ti. Coruncanium aut P. Scaevolam, pontifices maximos, te audire dicas, non eum qui sustulerit omnem funditus religionem, nec manibus, ut Xerxes, sed rationibus deorum immortalium templa et aras everterit „. Epicuro dunque secondo Cicerone parlava come un Santo Padre; — e il nostro frammento ha appunto questo carattere; — soltanto è, secondo lui, sbagliato il fondamento. " Quid est enim „ continua " cur deos ab hominibus colendos dicas, cum dei non modo homines non colant, sed omnino nihil curent, nihil agant? „ Ma ecco che cosa risponderebbe Epicuro: " At est eorum eximia quaedam praestans natura, ut ea debeat ipsa per se ad se colendam allicere sapientem „. Ebbene, questo è in sostanza ciò che dice anche il nostro frammento, col. I ll. 16-23: σὺ δ', ὦ ἄνθρωπε, μακαριώτατον μέν τι νόμιζε τὸ διειληφέναι καλῶς ὃ τὸ πανάριστον ἐν τοῖς οὖσι διανοηθῆναι δυνάμεθα, καὶ θαύμαζε ταύτην τὴν διάληψιν καὶ σέβου. Col quale concorda e nella sostanza e in parte anche nella forma un frammento di Filodemo (περὶ εὐσ. Usener, fr. 386, p. 258): καὶ τὸ μέγι[στόν] φησι καὶ οἱονεί [τι] καθ' ἡγεμονίαν [ὑπερ]έχον ἐκεῖν[ο εἶ]ναι· πάντα γὰρ σο[φὸν] καθαρὰς καὶ ἁ[γν]ὰς δόξας ἔχειν [περὶ] τοῦ θείου καὶ [μεγ]άλην τε καὶ σε[μν]ὴν ὑπειληφέ[ναι] ταύτην τὴν φύσιν. Ciò che qui è μέγιστον e nel papiro μακαριώτατον è tanto qui come là il saper sceverare ciò che v'è di più perfetto e ritener questo come Dio. Un altro luogo assai guasto di Filodemo nello stesso libro ci dà pure, sembra, lo stesso concetto, attribuendolo questa volta al περὶ ὁσιότητος (Us. fr. 28, p. 107): ἐν [τῷ] περὶ ὁσιότητ[ος καὶ κ]αταξιοῖ πᾶ[ν καθ]αρὸν φυλάτ[τειν νοήσ]εως συ[νορω]μένης τὰς .... διαθέσεις. Le ultime parole per altro sono affatto dubbie. Se pertanto il culto degli Dei ha per Epicuro la sua

ragione non nel timore o nella speranza che si concepisca di loro, ma nel riconoscere noi che essi sono τὸ πανάριστον ἐν τοῖς οὖσι, ha ragione Vellejo di conchiudere presso Cicerone l. c. I 20. 56: " et pie sancteque colimus naturam excellentem atque praestantem ".

Un'altra concordanza coi concetti del papiro troviamo di nuovo in due frammenti di Filodemo π. εὐσ. congiunti dall'Usener nel fr. 38 pag. 107. Dal primo si ricava la citazione del περὶ ὁσιότητος, il secondo, dopo forse una pagina perduta, pare continui l'estratto dello stesso libro e dice: .... [διὰ τὰ τοι]αῦτ' ἀν[οσίως ἐ]ξελέσθαι τὴν πᾶσαν ὁσιότητα σὺν τῷ τ[ὰ κοι]νὰ φυλάττειν, cioè che coloro che attribuiscono agli dei il governo del mondo, con ciò tolgono loro empiamente tutto il carattere di santità, ὥ[ς] δ' οἱ λεγόμε[νοι δει]σιδαίμονες εἰ[ς ἀνυ]πέρβλητον ἀ[σέβει]αν ἐκβάλλειν, così che coloro che sono chiamati timorati di Dio finiscono all'eccesso dell'empietà: [οὐ] γὰρ ὁ τὴν ἀθαν[ασίαν] κα[ὶ τ]ὴν ἄκραν μακα[ριότητ]α τοῦ θ[ε]οῦ σῴ[ζων σὺ]ν ἅπασι[ν] τ[οῖς συ]ναπτομ[έ]νο[ις, εὐ]σεβὴς δὲ περ[ὶ θεό]ν, ὃς ἑκά[τε]ρον [ἐξορί]ζει μὲν νο[ῶν αὐτ]ὸν χωρίς ὀργῆ[ς καὶ] χάριτος ἀσθενούσης τὰς ἐξ αὐτοῦ παρασκε[υὰς] τῶν ἀ[γα]θῶν κα[ὶ] τῶ[ν κακ]ῶν, κ. τ. λ. Dopo συναπτομένοις ho posto una virgola, e non un punto come stampa l'Usener. Dice: poichè non colui che riserba a Dio l'immortalità e la perfetta felicità con tutti gli annessi e connessi, ma pio è rispetto a Dio chi ciascuna cosa separa e lo pensa ben lontano da ira e da gratitudine, che indebolirebbero da parte sua la scelta dei beni e dei mali ". Nè altrimenti riferisce Lattanzio (Us. fr. 366, p. 244) il concetto d'Epicuro: " nullos affectus in Deo est, quia quidquid afficitur imbecillum est ". Anche questo concetto è uno dei fondamentali del nostro papiro, che specie nella col. I, ll. 14 segg. definisce pure τὸ βέβαιον εὐσεβείας in confronto dell'erronea opinione popolare così come fa la citazione di Filodemo.

Dei rapporti tra il culto razionale e le leggi tocca il papiro in col. II, ll. 2-8, che sopra ho riportate. E ne tocca pure Filodemo nel *De Musica* (Us. fr. 386, pag. 258): τὰ δὲ τοσαῦτα λεγέσθω καὶ νῦν, ὅτι τὸ δαιμόνιον μὲν οὐ προςδεῖ[τ]αί τινος τιμῆς, ἡμῖν δὲ φυσικόν ἐστιν αὐτὸ τιμᾶν μάλιστα μὲ[ν] ὁσίαις [ὑ]πολή[ψ]ησιν, ἔπειτα δὲ καὶ τοῖς κατὰ τὸ πάτριον παραδεδομένοις [ἑ]κάστῳ τῶν κατὰ μέρος. Sul quale argomento Filodemo stesso altrove

(π. εὐσ.) riporta le parole stesse di Epicuro (Us. fr. 387, p. 258:) ἡμ[εῖς γοῦν] θύωμεν, φησίν, [ὁσί]ως καὶ καλῶς οὗ [καθ]ήκει, κα[ὶ τ]ἄλλα πάντα πράττομεν [κα]τὰ τοὺς νόμους μ[η]θὲ[ν] ταῖς δόξαις α[ὐ]τους ἐν τοῖς περὶ τῶν ἀρίστων κ[αὶ] σεμνοτάτων διαταράττοντες · [ἔτι] δὲ καὶ δίκαιο[ι ὤ]μεν ἀφ' ἧς ἔλε[γον δό]ξης · οὕτω γὰρ [ἐν]δέχεται φυσ[ικῶς] ζῆν ὁμοίω[ς]... [ἐν] ᾗ διάξειν [φαί]νεται. E qui oltre al concetto generale troviamo altre due analogie col papiro, l'una nel φυσικῶς ζῆν, che ha riscontro con le prime parole intelligibili della col. I, τῆς φύσεως, ὡς ἔλεγον, οἰκεῖον: l'altra nella frase θύωμεν ... οὗ καθήκει che corrisponde alla col. II, ll. 5-6 anche per il vocabolo.

Finalmente col concetto della col. III, ll. 5-14 quale lo abbiamo ricostruito, confrontisi l'ultima delle κύριαι δόξαι (Us. p. 81): ὅσοι τὴν δύναμιν ἔσχον τοῦ τὸ θαρρεῖν μάλιστα ἐκ τῶν ὁμορούντων παρασκευάσασθαι, οὕτω καὶ εβίωσαν μετ' ἀλλήλων ἥδιστα καὶ βεβαιότατον πίστωμα ἔχοντες.

Che pertanto lo spirito di Epicuro nel papiro si debba riconoscere mi pare evidente, e la mia dimostrazione su questo punto potrebbe piuttosto tacciarsi di superfluità che di manchevolezza. Ho notato le concordanze, ed è vero che altri potrebbe oppormi un'altra lista di divergenze; queste divergenze per altro non sono che di particolarità e d'accidenti, di più o di meno, e non mai di contraddizione. D'altra parte sono appunto queste divergenze che fanno il frammento prezioso; che se nulla in esso vi fosse che non sapessimo preventivamente, poco ci importerebbe la restituzione delle parole d'Epicuro, non trattandosi d'opera d'arte, che possa esser preziosa anche solamente rispetto alla forma. Ma se, come e quanto la conoscenza della teoria epicurea da questo frammento si avvantaggi, lascio vedere ai filosofi, che ne possono discorrere con maggior competenza. E passo ad esaminare la lingua e lo stile.

Quanto alla lingua, questo almeno si può ritenere per fuori di dubbio, che manca affatto qualsiasi argomento positivo, per credere che di Epicuro non sia. Abbiamo due parole nuove, χαριστωνία, notata anche dagli editori, ed ὑπόπτευμα, che dimenticarono di notare anche nell'indice; oltre di ciò abbiamo σέμνωμα, che si trova pure in Epicuro presso Diog. L. X, 77, e si ripete poi in autori più tardi. Tutte e tre queste parole appartengono all'ordine dei concetti fondamentali della scuola,

e non sono che formazioni diverse da radici in Epicuro usitatissime. Le parole σάρξ, θεωρία, βλάβη, χάρις, εὐσέβεια, ὑπόληψις, διάληψις, e i rispettivi verbi, βέβαιος, μακάριος, προςδοκάω, καθήκει, ed altre, non solo sono comuni al papiro e ai frammenti di Epicuro, ma ricorrono con la stessa frequenza, con la stessa preferenza, con la stessa speciale accezione e colorito, come abbiamo potuto vedere dagli esempi citati, come possiamo vedere anche da questo dall'Epist. I, 82 (Us., p. 30): καὶ ἐν τῷ αἰώνιόν τι δεινὸν ἀεὶ προσδοκᾶν καὶ ὑπόπτεύειν, dove προσδοκᾶν e ὑποπτεύειν sono messi in correlazione tra loro non altrimenti che nel papiro, col. III, ll. 4 e 12-13, προσεδόκα ed ὑπόπτευμα. Similmente si può notare l'uso e l'abuso dei neutri aggettivi o participî in senso astratto, quali τὸ βέβαιον, τὸ πανάριστον, τὸ κατα[νύτον?], τὸ ἐπ[ιτιμῶν?], e l'uso del τι attenuativo dopo un aggettivo, come I, 18 μακαριώτατόν τι, II, 17, ταπεινόν τι, l'uno e l'altro abituali a Epicuro.

Quanto alla sintassi e allo stile, il concetto che possiamo formarcene dall'esame diretto delle opere del filosofo che ci rimangono, non è tale da poter con sicurezza estendersi per analogia anche alle altre. Le epistole hanno carattere di riassunti, e si sa che al riassumere va compagna spesso una certa aridità. Oltre di ciò una notevole diversità si nota tra la prima e la terza, la quale ultima è scritta assai più accuratamente, — e questa disformità, si può credere, non si sarà limitata a questo solo caso. Neppure le κύριαι δόξαι, appunto per essere come le sintesi e i capi saldi della dottrina, possono servire di esemplare sicuro per farsi un'idea dello stile abituale all'autore: e gli altri frammenti sono in generale magri e sparuti, e molti di lezione affatto incerta, per poterne cavare alcun apprezzamento fondato. Ad ogni modo essi per lo meno non tolgono punto fede al giudizio che di Epicuro come scrittore diedero gli antichi e Cicerone in particolar modo. Nel *de Finibus* (I. 5, 14) Torquato, che fa la parte del sostenitore di questa teoria, ammette che Epicuro come scrittore a Cicerone non piaccia: " existimo te... minus ab eo delectari, quod ista Platonis, Aristoteli, Theophrasti ornamenta neglexerit ". A cui Cicerone risponde (*ibid.* 15): " oratio me istius philosophi non offendit; nam et complectitur verbis quod volt et dicit plane quod intellegam ". Altrove ritorna sullo stesso argomento ; ma di tanti luoghi basti citare solo *Tusc. Disp.*

V, 26: " An malumus Epicurum imitari? qui multa praeclare saepe dicit; quam enim sibi constanter convenienterque dicat, non laborat „. È dunque uno che scrive chiaro, ma non sempre preciso.

Che se ricordiamo ciò che Epicuro stesso dice in principio dell'Epistola I, potremo meglio determinare in che consistano i suoi pregi e i suoi difetti come scrittore. Innanzi tutto, egli dice, e sono parole d'oro, si deve badar bene al significato dei vocaboli e al loro contenuto (Ep. I, 38, Us. p. 5): ἀνάγκη γὰρ τὸ πρῶτον ἐννόημα καθ' ἕκαστον φθόγγον βλέπεσθαι καὶ μηθὲν ἀποδείξεως προσδεῖσθαι. Sua cura dunque deve essere stata di cominciar egli ad applicar bene la propria regola, e non sarà perciò sulla precisione dei vocaboli che dovremo attenderci di scoprire le sue maggiori marachelle. La deficenza pertanto potrà essere invece nello stile, e più propriamente in una certa trascuraggine che vorrebbe essere naturalezza.

Il frammento contenuto nel nostro papiro ha precisamente tutte queste caratteristiche: esattezza di significato nei singoli vocaboli, chiarezza ed evidenza nel complesso dell'espressione, trascuratezza e talora sciattezza di stile. Ne troviamo esempi fin da principio: col. I, ll. 4-11: μηδ' ὅταν γε νὴ Δία οὕτω λέγηται πάλιν ὑπὸ τῶν τυχόντων · δέδοικα τοὺς θεοὺς πάντας καὶ σέβομαι καὶ τούτοις βούλομαι πάντα καταθύειν καὶ τούτοις ἀνατιθέναι. Ciò è chiarissimo, ma la forma è bislacca; vorrebbe essere drammatica, e non ha del dramma alcuna caratteristica, non figura, non sentimento, non vivacità, non precisione logica: nessuno parla a questo modo, nè a questo modo ragiona: se l'autore voleva rappresentare così un concetto volgare, l'ha rappresentato piuttosto puerile, — e di qual altro concetto questo potesse essere χαριέστερον in verità non si vede: per lo meno, pare, avrebbe dovuto aggiungere: δέδ. τ. θ. π. καὶ τούτου ἕνεκα σέβομαι, — e lasciamo stare la insulsa ripetizione del τούτοις e il πάντα καταθύειν. Poco più oltre troviamo quest'altra frase: σὺ δ' ὦ ἄνθρωπε, μακαριώτατον μέν τι νόμιζε τὸ διειληφέναι καλῶς ὃ τὸ πανάριστον ἐν τοῖς οὖσι διανοηθῆναι δυνάμεθα (1), dove è

---

(1) Forse ὃ τὸ πανάριστον sarà da correggere in ὅ τι τὸ πανάριστον confrontando con Ep. I 67 (Us. p. 21): ἀλλὰ μὴν καὶ τόδε γε δεῖ προσκατανοεῖν ὅ τι τὸ ἀσώματον. Per noi poi l'espressione sarebbe più chiara se di-

da notare una di quelle inutili dittologie in cui veramente cadono più presso i moderni che gli antichi; διειληφέναι καλῶς infatti su per giù equivale a διανοηθῆναι; e il periodo così è un giro vizioso: la dittologia forse è dovuta all'insistenza dell'idea che dominava tutta la mente dello scrittore e al bisogno perciò di esprimerla nella maniera più efficace. — L'incertezza della lezione mi impedisce di allungare l'elenco degli esempi, ma anche dai periodi monchi e imperfetti che possediamo possiamo confermarci nel giudizio di questo stile: tutto è concepito chiaramente, ma insieme anche assai pedestremente; — dice ciò che vuol dire e lo dice in modo da farsi intendere, ma non si affatica per dirlo bene; — precisamente come di Epicuro aveva notato Cicerone.

Gli editori osservano che lo scritto ha apparentemente la forma di lettera, e citano a proposito I, 16-17 σὺ δ', ὦ ἄνθρωπε, e II, 12 ὦ πρὸς Διός. Il περὶ ὁσιότητος era forse in forma di lettera? O invece che al περὶ ὁσιότητος dovremo attribuire questo brano a qualche epistola? — Io dubito molto che si possa riconoscere qui la forma epistolare: ὦ ἄνθρωπε, può meglio che ad una persona determinata essere diretto ad un ipotetico oppositore. L'autore esamina una per una le obiezioni che si possono fare alla sua dottrina, e le confuta; nel calore della discussione immagina d'avere innanzi a sè l'avversario, e lo incalza perciò assai più che non si farebbe con un amico, che si volesse persuadere delle nostre ragioni. La forma in seconda persona si presta a dare all'opera un carattere ora dogmatico, ora catechistico, e tal forma hanno pure alcune delle κύριαι δόξαι (23-25, Us., pp. 76-77) senza che di necessità si devano ritenere estratte da epistole.

---

cesse semplicemente ὅ (ovvero ὅ τι) διανοηθῆναι δυνάμεθα ὡς πανάριστον, ma bisogna pure riconoscere che l'articolo τὸ serve a individuare meglio il concetto astratto del neutro secondo l'uso di Epicuro.

Sui frammenti giuridici del palinsesto di Autun.

Nota del Prof. CONTARDO FERRINI.

La lettura, che del difficile palinsesto di Autun ha fatto lo Chatelain, è una prova novella della singolare perizia dell'illustre paleografo francese; ora che per la sua grande cortesia sono in possesso delle fotografie del Codice da lui stesso eseguite, posso veramente apprezzare la sicurezza del suo intuito, la famigliarità coll'antica scrittura e la non comune acutezza della vista. La lettura dello Chatelain sta sostanzialmente a base della pregevole edizione, che dei 'fragmenta augustodunensia' ha recentemente pubblicato il Krueger avanti alla quarta riproduzione della recensione di Gajo dovuta a lui ed allo Studemund. È ormai possibile valutare con esattezza l'importanza della inaspettata scoperta e determinare la natura del documento venuto alla luce.

Lo scopo di questa breve memoria è appunto quello di indagare quale sia l'origine del lavoro e quali le notizie più considerevoli, che se ne possono ricavare; aggiungerò una serie di integrazioni e di emendamenti, che mi paiono sicuri o almeno grandemente probabili, avvertendo però che non è mio intento per ora di presentare il frutto completo dello studio delle accennate fotografie. Un tale studio (in cui spero di avere un valentissimo compagno) esige molto tempo e presuppone condizioni atmosferiche assai migliori di quelle, che pur troppo da alcuni mesi abbiamo nella regione lombarda.

§ 1.

Non può essere dubbio, che il commentario contenuto nel palinsesto di Autun sia una interpretazione scolastica delle Istituzioni di Gajo. Essa segue l'ordine degli argomenti, quale è dato nel testo; qualche volta ne riferisce anche le parole. Se nel primo vi sono delle lacune, come ad es. fra i §§ 96 e 97

(rec. Krüger), dove non troviamo la spiegazione corrispondente a Gai. IV, §§ 95-102, la causa può attribuirsi al fatto che l'interprete ha creduto opportuno di abbreviare il proprio discorso; più verosimilmente però al fatto, che mancava una pagina dell'archetipo o che questa fu per errore lasciata in disparte. Gajo stesso è citato una sola volta al § 56: " et quod dixit Gaius, prout mo[der]atus fuit ipse praetor, ita cretio constituitur „; cfr. Gai. 2, 170.

Il carattere dell'opera è, dicevamo, sicuramente quello di una interpretazione scolastica. Sotto tale aspetto essa presenta una mirabile analogia coll'indice greco delle Istituzioni, che va sotto il nome di Teofilo e conforta l'ipotesi che a quest'ultimo precedesse in Oriente un simile commentario sulle Istituzioni di Gajo. L'analogia si limita però alla forma; in quanto alla sostanza, i due lavori così diversi per tempo e luogo di origine sembrano seguire due tradizioni affatto indipendenti; non mi è occorso alcun esempio di incontro, che non si spiegasse agevolmente o per la somiglianza del testo da interpretare o per la stessa naturalezza dell'osservazione. Invece si trovano nell'uno o nell'altro corso scolastico osservazioni, che non hanno riscontro veruno. Ma per quello che concerne la forma, l'affinità è tale, da mostrarci come l'esposizione scolastica avesse ricevuto in tutto il vastissimo impero un tipo comune. Tanto il professore di Berito, quanto l'oscuro maestro di una scuola della Gallia assumevano lo stesso tono e lo stesso stile: le lezioni non si distinguevano che per la ben diversa dottrina.

In tutte queste scuole il testo era presente; la lezione consisteva nell'esporre in più largo discorso il suo contenuto, nell'aggiungere schiarimenti, nel dissipare difficoltà. Il nostro maestro suppone evidentemente di avere appena letto o fatto leggere il relativo brano di Gajo, quando accenna all'insegnamento di questo (§ 56 cit. 'quod dixit Gaius'), come già noto agli studenti; altrove riferisce le parole testuali (v. §§ 79, 80, 96, 97), annettendovi la propria spiegazione. Non altrimenti i bizantini sogliono citare « τὸ ῥητόν » ed il citato indice greco riporta, spiegandole, parole e frasi latine del testo originale.

Alcuni esempi a conferma delle cose affermate riusciranno certamente istruttivi. In ambedue i corsi è evidente la continua e giusta preoccupazione degli insegnanti, che gli allievi non per-

dano il filo del sistema e comprendano come una materia si ricolleghi con quelle antecedentemente trattate. Così ne' frammenti di Autun: § 9 'tractavimus quae sint legitima matrimonia: sic nunc adicimus etc'. § 10 'debemus ergo tractare, quemadmodum fiant adoptiones'. § 12 '...plene tractavimus; nunc consequens est, ut dicamus'. § 13 'Et superius tractavimus... prius tractemus,.. '. § 89 'tractamus, quae sint legitima iudicia'. — Affatto uguale è il modo di porgere dell'Indice greco e gli esempi sono innumerevoli, come è noto a chiunque abbia qualche famigliarità con quel libro. Eccone un breve saggio: I, 2 pr.: Εἰρήκαμεν ἐν τοῖς προλαβοῦσιν — ἀναγκαίως ὀφείλομεν εἰπεῖν: ib. § 3: εἰπόντες οὖν... ἔλθωμεν ἐπὶ δεύτερον κτλ.: ib. § 6: I, 3 pr.: Εἰπόντες — καὶ — διεξελθόντες — μαθόντες — μετέλθωμεν ἐφ' ἕτερον καὶ μάθωμεν: I, 5 pr. Εἰρήκαμεν — σκοπήσωμεν. I, 6 pr. νῦν ἀναγκαῖόν ἐστι μαθεῖν: I, 11 pr. (allo stesso luogo e allo stesso intento del § 10 surriferito): Ἔγνωμεν ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὅτιπερ ἔχομεν τὸ in potestate κατὰ τῶν ἡμετέρων παίδων τῶν ἐξ ἐννόμων γάμων ἡμῖν γενομένων· εἰδέναι δὲ χρὴ ὅτι αὐτὴ ἡ potestas καὶ ἐπὶ τοὺς θετοὺς πρόεισι παῖδας'. etc. In ambedue i corsi, il maestro ha cura di richiamare agli studenti le cose precedentemente spiegate. V. nei frammenti di Autun § 97 'saepe tractantes diximus' (con pieno riscontro nell'indice greco, ad es. II, 19 § 5: καθάπερ εἴρηται πολλάκις): § 98 '[didi]cimus quid sit legitimum, quid imperiale': § 106 'haec si tenetis, iam [videtis quod]'. Cfr. l'indice greco II, 23, § 8 ὅσα σοι εἴρηται — τὰ αὐτά σοι εἰρήσθω e l'ordinario ἐπειδή σοι ταῦτα προτεθεώρηται, ὅρα λοιπὸν τὸ προκείμενον. In ambedue i corsi abbondano gli esempi concreti; non si limita il maestro ad accennare, come fa il testo, al contenuto di stipulazioni od azioni, ma ne offre la formula; fa parlare in prima persona i magistrati, il principe, i privati invece di accontentarsi di un accenno agli atti loro. Così nei frammenti di Autun si dà la forma concreta delle domande delle parti per ottenere rescritti: § 30 'ita dixit: etc.': § 2; si arreca la formola delle stipulazioni *emptae et venditae hereditatis*, §§ 68-70; si fa parlare il 'populus' § 7, o il pretore, § 55. L'indice greco porge ugualmente le formole concrete di quelle stipulazioni, II, 23, § 5; fa parlare il magistrato, ad es. I, 12, § 2 Εἶπε γὰρ ὁ ἄρχων · *relego te in illam insulam*: § 3 *ib.* Ὁ ἄρχων ἀπεφήνατο · Πέμπω σε εἰς μέταλλον.

Com'è quasi istintivo ne' conferenzieri e ne' docenti, le definizioni sogliono essere in ambedue i corsi precedute da analoga interrogazione: v. ad es. nei frammenti di Autun il § 44 'quid est pro herede gerere? animum habere capiendae hereditatis': § 47 'quid est repudiare? nolle capere etc? Affatto uguale è il procedimento dell'indice greco: ad es.: I, 2, § 4 καὶ τί ἐστι δῆμος; κοινῆς τύχης σύνοδος, I, 5 pr. καὶ τί ἐστι manumissio? etc.

In ambo i corsi si accenna alla lacuna di qualche definizione o regola ed al modo di ripararvi: cfr. framm. di Autun, § 18: 'ideo sic dici[mus]... et illud adiciendum est... habes ergo pronum modum, quo exeu[nt de potes]tate'. Cfr. l'indice greco: II, 6, § 3: δεῖ προσθῆναι αὐτῷ [τῷ ὅρῳ]... καὶ λέγειν... οὕτως γὰρ ἔχων ὁ ὅρος ἀνελλιπής ἐστιν.

In ambo i corsi il maestro si rivolge agli uditori, ne suppone e rettifica le impressioni ed i giudizii. Framm. di Autun. § 22: " ut dicas... opponitur tibi statim "; ind. greco, II, 6, § 3: ἴσως προπηδήσας ἐρεῖς... ἀλλ' οὐ δεῖ σε τοῦτο λέγειν.

Non è senza interesse l'avvertire, come lo stesso punto di diritto offra ai due maestri le stesse difficoltà; in ambedue i corsi si accenna alle obbiezioni che si possono opporre tanto a chi volesse sostenere che i 'liberi' del *captus ab hostibus* sieno *sui iuris*, quanto a chi volesse sostenere il contrario: fr. di Autun, § 22: 'utrumque ergo difficile est; sive dicamus — illud opponitur... sed dicamus... illud'; ind. greco, I, 12, § 5: καὶ τέως αὐτεξούσιον ἐμαυτὸν εἰπεῖν οὐ δύναμαι, οὐ δύναμαι δὲ οὔτε λέγειν ἐν τῷ μεταξὺ ἐμαυτὸν καὶ δούλου ὑπεξούσιον.

§ 2.

Lo studio di questi frammenti non mi sembra che riesca a confermare la congettura, che il Mommsen ha in proposito messo avanti, sia nell'*Epimetrum* all'edizione del Krueger p. LXV-LXVII), sia nella *Ztschr. der Savigny Stiftung*, R. A. 20, p. 235 sg. Egli, pur riconoscendo la vera natura dello scritto in questione, suppone che i quattro libri, di cui doveva constare formassero insieme ad altri tre (i soli adoperati per la compilazione delle Pandette) i sette libri delle *Res cottidianae* ossia degli *Aurea*, cui ricorda l'indice fiorentino. Poichè di quest'opera, egli osserva,

i compilatori dei Digesti adoperano largamente i primi tre libri e non adducono verun passo degli ultimi quattro, è verosimile che questi fossero identici al barbaro commentario, di cui ci ha conservato reliquie il palinsesto di Autun, ed è spiegabile che i compilatori li lasciassero in disparte, non essendo essi che una miserabile elaborazione delle Istituzioni, di cui invece i compilatori stessi possedevano l'elegante testo genuino. Che poi tre libri certamente dovuti a Gaio venissero messi insieme ad altri quattro di origine molto più tarda e compresi sotto il medesimo nome, spiega il Mommsen osservando che l'autore di questi parla in guisa, che i lettori dovevano essere tratti in inganno e credere di avere davanti lo stesso Gajo. All'uopo egli cita il § 91 dove si dice: 'quemadmodum tutor aut curator efficiantur, *in primo commentario relatum est*'.

Se non che è da ricordare che l'autore, come s'è visto, cita Gajo *come testo commentato* (§ 56) e presente ai discepoli; ne riferisce le parole per commentarle e di regola queste parole sono riportate *in caratteri maiuscoli* per distinguerle (§ 66, 79, 80, 96, 97: in quest'ultimo § per errore sono scritte in grande anche le prime parole della spiegazione). Ora come è possibile che nascesse la confusione, che il Mommsen ha ritenuto? Il passo surriferito del § 91 non ha veruna importanza. È ovvio che il maestro, che spiega un'opera divisa in quattro commentarii, dica: " come ciò avvenga, è già stato spiegato nel primo commentario "; si avverta anzi che egli dice proprio *relatum est*, mentre Gajo nel corrispondente passo (4, 85) dice: 'tutores autem et curatores, quemadmodum constituantur, *primo commentario rettulimus*' (1).

L'unione delle *res cottidianae* col nostro commento riesce anche sotto un altro aspetto poco verosimile. Le *res cottidianae* erano in sostanza un rifacimento delle Istituzioni ad uso della pratica; in esse Gajo lasciava da parte quello che aveva importanza esclusivamente storica e si diffondeva invece maggiormente in quello, che interessava per l'applicazione del diritto vigente (2).

(1) È curioso che, mentre le Istituzioni giustinianee al luogo corrispondente § 2 I. 4, 10 usano la frase impersonale " expositum est ", l'indice greco riprenda la frase personale e dica: εἰρήκαμεν ἐν τῇ πρώτῃ institutioni.

(2) Il maggior pregio 'dogmatico' delle *res cottidianae* è già stato giustamente avvertito: Krueger, *Quellen*, p. 190 (tr. Brissaud, p. 258).

Un'opera che avesse cominciato con tre libri di tale natura per poi proseguire con una parafrasi delle Istituzioni sarebbe parsa anche sulla fine del quarto secolo cosa mostruosa.

Ma c'è un argomento decisivo ed è che le genuine 'res cottidianae' non erano comprese nel breve giro di tre libri. È noto, come i frammenti conservati nel Digesto c'insegnino che nel primo libro ci si trattava delle persone, nel secondo delle cose e loro acquisto, cominciandovisi la dottrina delle obbligazioni, che proseguiva nel terzo. Rimangono altri importantissimi e fondamentali argomenti di diritto privato; le successioni testamentarie e legittime, i legati e fidecommessi, le azioni, che non potevano trattarsi che nei libri successivi, dove è credibile che trovassero posto anche materie non pertinenti al diritto privato per giustificare l'ampia comprensione del titolo. E che tali libri esistessero e che si conoscessero anche i compilatori giustinianei, prova a mio credere in modo sicuro lo studio delle fonti delle Istituzioni giustinianee, dove vi hanno parecchi passi di indubbia origine gajana e senza temerità alcuna ascrivibili alle *res cottidianae*, che si riferiscono a materie non comprese nei libri adoperati per la compilazione dei Digesti. A questo proposito io non posso ora che rimandare alla mia Memoria sulle fonti delle Istituzioni di Giustiniano, dove i singoli passi si trovano accennati.

L'esistenza del commentario scolastico sulle Istituzioni di Gaio, posto che queste erano il libro di testo adoperato in tutte le scuole, è tanto semplice e naturale, che non occorre veruna sottile congettura. Fra i molti corsi, che venivano o redatti dai maestri o raccolti dai discepoli, è ben concepibile che fosse conservato e trascritto qualcuno, che in paragone degli altri paresse degno di tanto in que' tempi di decadenza profonda.

Se anche l'*Epitome Gai* ha, come io ritengo, origine gallica, troviamo che la Gallia ci dà a proposito dell'opera stessa il contrapposto degli *indices* e delle *summae* usati in Oriente; l'*Epitome* ha proprio il carattere di σύντομος, mentre la nostra parafrasi presenta nitido il tipo di quelle elaborazioni, che i giureconsulti orientali designano col nome di 'πλάτος'

§ 3.

Quanto i frammenti augustodunensi sono rilevanti per la storia letteraria del diritto romano, altrettanto sono poco significanti per la sua storia interna. Possiamo anzi dire, che quello di più notevole che vi si contiene era già nella prima serie di frammenti fatti conoscere dal benemerito Chatelain del fascicolo di aprile 1899 della *Revue de philologie*, p. 177 segg. I nuovi brani, che in base al suo apografo ha pubblicato il Krüger, sono sotto questo aspetto quasi privi di interesse per noi. Felicemente si è espresso il Mommsen in principio del suo *Epimetrum*, dicendo: ' Ut patres nostri laetati sunt, recuperato Gaio, ita quoque nobis similis sors evenit, sed ita similis, ut gemma carboni.

La notizia più istruttiva è quella che si riferisce alle azioni nossali; il brano del nostro palinsesto, pur troppo molto arduo a decifrarsi, corrisponde ad una lacuna del testo di Gajo. Insegna dunque il nostro palinsesto, che il *dominus* o *paterfamilias* convenuto per delitto del servo o del *filiusfamilias*, che muoia dopo la contestazione di lite, non è liberato; ma deve *aut damnum sarcire aut noxae dedere* e cioè il cadavere del servo o del figlio. Il palinsesto conferma invece, che ciò non vale per l'*actio de pauperie* istituita pei danni dati dagli animali; come era già noto pel fr. 1, § 16, Dig. 9, 1. La ragione, per cui — come nella ' noxa ' internazionale, v. Liv. 8, 39, 14 — dovevasi consegnare il cadavere del delinquente è abbastanza ovvia. L'offeso, negando la sepoltura al cadavere, poteva esperire la sua vendetta in modo, date le idee di que' tempi, terribile. Appunto il terrore di siffatta vendetta avrà servito a spingere il ' paterfamilias ' condannato a preferire di risarcire integralmente il danno recato e questa ragione pratica avrà servito a far conservare la regola crudele fino a tempi di civiltà avanzata. Come si doveva consegnare l'intero cadavere, che fosse a disposizione del condannato, se ne dovevano consegnare anche le parti: ' denique tr[actatur de] capillis et unguibus, an partes corporis sint.' Questa controversia (§ 83) si riferisce evidentemente alle dottrine pontificali intorno al cadavere ed alla sua sepoltura. Il Mommsen (*Ztschr*. cit. p. 236) spiega il conservarsi della regola, osservando

che per essa veniva posto un impedimento alle false asserzioni di morte accampate per sottrarsi alla responsabilità nossale. Ma tale spiegazione parmi poco probabile; sia perchè in tal modo non si vede una ragione di difforme trattamento nell'*actio de pauperie*, essendo ugualmente possibile e anzi più facile affermare falsamente la morte di un animale che di un uomo (e del resto non basta affermare!), sia perchè ogni responsabilità è tolta di mezzo, se la morte avviene prima della contestazione di lite.

Per l'antico diritto poi non è inverosimile un'altra ragione, a cui pare accennino le linee frammentarie dei §§ 84 e 85. Quando il servo o il *filiusfamilias* commettevano un delitto a danno di un terzo, oltre il diritto dell'offeso di avere il colpevole (in origine per vendicarsi, poi per risarcirsi col suo lavoro) v'era il diritto del *paterfamilias* di giudicarlo e condannarlo in forza della sua giurisdizione domestica. Il diritto del terzo non poteva impedire al *paterfamilias* di condannare anche alla morte il suo dipendente: bensì poteva il terzo pretendere la consegna del cadavere dell'ucciso.

§ 4.

Darò in questo paragrafo una serie di contributi all'emendazione ed all'integrazione del testo, rispetto ai quali è da tenere presente l'avvertenza posta in principio di questo lavoro.

§ 2: nisi specialiter dicat pa[ter: peto ut etiam] liberis meis civitatem deferre dignemin[i . nam (1) si imperat]or i[ndulserit, fient] etiam liberi cives romani.

§ 3 *in fine*: quaerit ipsam personam [patris, an velit eos] habere in potestate, ut bona eorum consumat et ita [imperator concedit] aut negat.

§ 4: [Superest] ut illud tractemus: peregrinus et sibi [et uxo]ri suae peregrinae petit civitatem romanam, nunc quaeritur, [an spec]ialiter debeat petere ut et filius, qui nascitur, civis romanus [fiat; sed videtur roma]nus esse; nam diximus, quod si eo tempore, quo parit, mulier in *civita*[te est roma]na et maritus, qui nascitur civis romanus erit.

(1) Cfr. § 1.

§ 5: quid ergo petet [pater]? quod civis romanus nascitur, non interdum re[scripto fit], sed interdum [propter beneficiu]m (1) senatusconsulti, ideo specialiter debet petere, ut is qui nascitur [in pote]state eius sit, non debet petere ei civitatem romanam.

§ 6: Peregrini [vel speci]aliter (2) petebant ab imperatore civitatem romanam, [vel gen]erali beneficio perveniebant ad civitatem romanam. nam gene[rale b]eneficium, quo petebant peregrini ius Latii, [Latium diceb]atur, [quia ex La]tio origo civium romanorum duc[itur et ideo quod dicitur Lati]um est ius civitatis [romanae optinendae].

§ 8 *in fine*: si autem ad ius Latii ma[ioris vel minoris] veniebant, omnimodo erant in potestate.

§ 12: Prius de his personis inspicia[mus. et cum quae] personae in potestate sunt atque in manu vel in mancipio ple[ne trac]tavimus, nunc consequens est ut dicamus, quemadmodum istae person[ae alieno] subiectae iuri liberentur et fiant sui iuris. nec enim semper quae in [potesta]te vel in manu vel in mancipio sunt constitutae retinentur, sed ces[sant, cum] ex certis usibus liberantur.

§ 16: Si vero tempore, quo [moritur] avus, pater non sit in familia, aut quod mortuus est aut quod e[mancipa]tus est, aut si filios [ex a]lia [causa] avus non habuerit in pote[state], nepos qui alias in potestate non fuit mortis tempore [in potestatem alterius non cadit, sed] sui iuris [fit. Ergo] erit di[cendum liberari] morte parentis etc.

§ 20: Ergo eis, qui aqua et igne [interdicuntur, vel] patri vel filio patria potestas tollitur. *verum* si pater ab [hostibus] captus fuerit, [quamvis servus hostium fiat, non illico] erunt filii sui iuris.

§ 22: ut dicas eos sui iuris esse. eo[s vero si dicas in pote]state, opponitur tibi statim: cuius sunt in potestate? servi [enim non habent in potestate filios] eorum. qui ab hostibus captus est servus est. ergo servus pater [hostium, et ideo non habet f]ilios in potestate. utrumque ergo difficile est: sive

---

(1) [pp. bfu]m.

(2) Cfr. § 8.

dicamus sui iuris [filios esse], illud opponitur, quod si revertatur et postliminium recipit, [redit ad st]atum suum; sed *si* dicamus eos in potestate, illud, quod est facilius [opponitur...] (1).

§ 27: [nam potest di]cere: si maior essem, prius deliberassem, prius quaesissem, n[ec heredita]tem adiissem; modo per inconsultam aetatem temere ad[ii. peto] in integrum restitui. hoc quod dicit extraneus, potest minor su[us dicere], si temere se miscuerit bonis paternis.

§ 28: tenetur oneribus hereditaris, quod deest i[lli restitutionis benefici]um; nec potest maiori, nisi exhibuerit interdum iustae causae [rationem, subveniri: eis enim potest imperi]ale beneficium d[ari, et] eos quidem hoc contingit.

§ 29: coeperunt proferre t[itulos].

§ 31: La lezione: *possunt in integrum restitui a praetore* (2), non può accettarsi perchè il testo contrappone precisamente la restituzione dei maggiori per *rescritto* a quella dei minori per ministero del pretore. Non è facile la lettura; forse: *possunt rescriptum impetrare.*

§ 36: Ista dicitur cretio propter [id, quod tempus] datur ad deliberandum.

§ 40: et [licet pleri]que (3).

§ 42: si eate[nus sepa]ratim dicat.

Eatenus nel significato di " soltanto ". Il Mommsen propone ingegnosamente: si ea te[cte sepa]ratim dicat; ma per tacer d'altro mi pare che l'*e* che rimane all'estremo orlo della pergamena non sia nella forma, che dovrebbe assumere per costituire il gruppo ' ec '.

§ 54: È da proporre un mutamento di interpunzione:
nam nihil possunt hodie facere, dum ille se [dicit] deliberare: convenire eum etc.

§ 58: quod ergo facere non possit qui actionem non habet, [ad]eo potest facere qui longam cretionem habet?

(1) Cfr. l'indice greco delle *Istit.* I, 12, § 5.
(2) p. i. i. r. praet. (Kr.).
(3) [*lc. pleri*]*que*.

§ 61: sed universitatem in omnibus res[tituit et qui] dimidiam videtur restituere (1).

§ 62: Universitatis dicimus, idest iuris, eo ipso quod pars aliqua [hereditatis re]stituitur, [quamvis omnium] rerum pars [tantum restituatur] et e contrario cet.

§ 65: nec bona debet usurpare, sed [petere] debet [ab herede, cum is hereditatem adierit, ut] restituat ei fideicommissum. nam heres instituitur directis verbis [nec ab alio] petit hereditatem, sed suo iure potest aut directe adquirere si[bi aut repudiare] h[ereditatem].

§ 68: nam quando heres hereditatem deferre [volebat, gen]eraliter, *quia* onera hereditaria apud eum [manebant et] actio[nes hereditarias suscipere debebat, stipulabatur ab emptore] ut quidquid venditor hereditario [nomine] solverit bona fide... bona fide solvi privatim his semper de[bitum ab herede n]ec[esse est, cum ita videtur] manifestum esse debitum, [ut non expediat] litigare.

§ 70: [et quoniam hae stipulationes soleban]t interponi inter heredem et fideicommissarium, ideo apud veteres loco empto[ris hic erat] (2).

§ 73: ac si ex senatusconsulto trebelliano restituatur [hereditas. tunc enim] non est locus trebelliano, sed ex pegasiano ista fideicommissa (3) [transeunt a]c si ex trebelliano restituta essent.

§ 76: Ergo hereditariae non transeunt actio[nes, sed stipulationes] erunt necessariae.

Le ultime linee del § 76 non corrispondono a Gai. 2, 259, ma a Gai. 2, 254. Sarebbe quindi meglio far cominciare da esse il § 77, integrando a un dipresso così:

[Vidimus quod] fideicommissa aut universitatis sint, aut singularum rerum, ut tri[tici.

---

(1) Da correggere: ' sed universitatem in omnibus videtur restituere et qui dimidiam restituit '.

(2) Il § 71 va diviso in due parti: si potranno designare come § 71^a e § 71^b.

(3) *fcsa* si può leggere ancora.

E in seguito:

Ergo potest dicere: Rogo te, heres, ut illi Gaio Seio des centum, [vel illi Lucio Ti]ti*o* illum fundum, heres, res[tituas vel il]lam domum ill[i Maevio des].

Sunto della Memoria del Socio Carlo Cipolla: *Codici sconosciuti della Biblioteca Novaliciense.*

Altre volte intrattenni l'Accademia (*Memorie*, II Serie, volume XLIV, pag. 71 segg. e 193 segg.) sopra vari Codici della Biblioteca Novaliciense. Ora do notizia di due frammenti di Codici perduti, e di un intero Codice finora inavvertito.

Dei frammenti, uno (del sec. XI) spetta ad un Codice delle omelie di S. Leone Magno. Sull'altro frammento (sec. X-XI) leggiamo alcuni estratti da Sulpicio Severo e da S. Gregorio di Tours riguardanti la vita e i miracoli di S. Martino di Tours.

Il Codice intero, rimasto fino ad ora sconosciuto, è di forme atlantiche, e contiene gran parte della Bibbia, nella versione e coi prologhi di S. Girolamo. Questo manoscritto è notevole per buone iniziali a nodi e a figure, sia umane, sia animalesche, nonchè per due miniature semi-paginali. Il Codice sembra per la massima parte non posteriore alla metà incirca del sec. X, ma colle aggiunte si scende fino al sec. XII inoltrato.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXV, DISP. 8ª, 1899-900

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1900

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Febbraio 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: BERRUTI, D'OVIDIO, MOSSO, CAMERANO, SEGRE, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA e NACCARI Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale della precedente adunanza che viene approvato.

Il Presidente annunzia la morte del Socio nazionale Eugenio BELTRAMI, rammenta l'alto valore scientifico, la varia dottrina, le rare virtù dell'estinto, lasciando al Socio D'OVIDIO l'ufficio di tesserne con maggiori particolari l'elogio. Comunica che il Presidente dell'Accademia si fece rappresentare ai funerali e inviò condoglianze alla vedova.

Annunzia ancora con parole di vivo rimpianto la morte del Socio Gaudenzio CLARETTA, Direttore della Classe di scienze morali, storiche e filologiche avvenuta in Roma il 17 corrente.

Il Segretario comunica le lettere inviate dai professori SCHIFF, TARAMELLI, MOISSAN e BOULENGER, che ringraziano per la loro nomina a Soci corrispondenti.

Il Socio D'OVIDIO legge la commemorazione del Senatore BELTRAMI. Sarà inserita negli *Atti*.

Il Socio Parona presenta per i volumi delle *Memorie* un suo scritto intitolato: *Sopra alcune Rudiste senoniane dell'Appennino meridionale.* Se ne approva la stampa con votazione segreta.

Vengono poscia accolti per la inserzione negli *Atti* gli scritti seguenti:

1° *Effemeridi del sole e della luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1901*, calcolate dall'Ing. Luigi Gabba, presentate dal Socio Jadanza,

2° *Un parassita intranucleare nei reni del topo delle chiaviche,* nota del Dott. Ermanno Giglio-Tos, presentata dal Socio Camerano,

3° *Sur un théorème de M^r Volterra sur l'inversion des intégrales definiés,* nota del sig. Erick Holmgren dell'Università di Upsala, inviata per la presentazione dal Socio Volterra,

4° *Ricerche sperimentali sul coefficiente magnetometrico*, nota del prof. Ciro Chistoni, presentata dal Socio Naccari.

LETTURE

EUGENIO BELTRAMI

Commemorazione letta dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

EUGENIO BELTRAMI, illustre socio nazionale non residente della nostra Accademia, professore di Fisica matematica e Meccanica superiore nell'Università romana, della quale era fulgido decoro, si è spento a 64 anni (1), dopo essersi assoggettato ad un'operazione chirurgica, che lasciava concepire le migliori speranze di aver vinto l'insidioso male che da alcuni anni a riprese lo travagliava. È duro rassegnarsi all'idea, che tanta luce d'ingegno, una così piena armonia di facoltà sposata a somma bontà e nobiltà di animo, non siano più che un ricordo, tanto più affliggente quanto più glorioso. Legato a lui da reverente amicizia trentenne, da profonda ammirazione per la sua cultura inesauribile e per le sue splendide ricerche in quasi tutti i rami della Matematica, memore delle prove che da lui mi ebbi di incoraggiante benevolenza, io mi sento doppiamente colpito; ma il mio si confonde col rimpianto dell'universale; poichè non vi era chi non estimasse altamente il BELTRAMI per i suoi lavori scientifici, chi non lo amasse per la sua spontanea cortesia, chi non lo trovasse ognora pronto a far del bene. Perciò la sua casa ospitale era desiderato ritrovo degli uomini di scienza; perciò le Università italiane si disputavano l'eminente professore, e Bologna (1862), Pisa, di nuovo Bologna, Roma, Pavia, e poi di nuovo Roma lo accolsero successivamente fra i loro insegnanti; e dappertutto risuonava la fama delle sue lezioni, incomparabili per dottrina, perspicuità ed eleganza da grande artista. Ed artista egli era nell'anima, e tale si palesava, facesse della Matematica o della Musica, o con sorridente arguzia, illuminata

(1) Nato in Cremona il 16 novembre 1835, morto in Roma il 18 febbraio 1900.

da singolare giovanilità di aspetto, conversasse. La sua era verace tempra d'ingegno italiano, limpido e profondo, versatile e concreto al tempo stesso. A lui pensando la mente ricorre ai nostri uomini maggiori, e in lui riconosce un degno continuatore di Lagrange.

Non mi si chieda che io entri in una, sia pur superficiale, disamina delle dotte pubblicazioni del Beltrami; le quali sommano a più che cento, dal 1862 in poi, e versano specialmente sulla Geometria analitica ed infinitesimale, sulla Meccanica razionale e sulla Fisica matematica: la strettezza del tempo e il turbamento dell'animo non mi consentono tanto, senza contare che di molte sarei incompetente a giudicare, e che del resto oggi non potrei neppure dar l'elenco esatto di tutte. Caratteri comuni a tutte erano la geniale originalità, la maturità e completezza, la forma elegantissima e l'accuratezza bibliografica, il veramente maestrevole uso dell'Analisi matematica; nulla di frammentario, di torbido, di effimero in tanta copia e varietà di scritture. Ricorderò soltanto di volo le seguenti:

Ricerche di analisi applicata alla geometria; Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette; Sulle superficie d'area minima; Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque; Sulla teorica dei parametri differenziali; Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea; Teoria fondamentale degli spazî di curvatura costante; Sulle cubiche gobbe; Sulla equazione pentaedrale delle superficie di 3° ordine; Sui principî fondamentali dell'idrodinamica razionale; Formules fondamentales de cinémathique dans les espaces de courbure constante; Sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici; Sulla teoria del potenziale (varî lavori); *Sulle funzioni cilindriche; Sull'equazioni generali dell'elasticità; Sull'interpretazione delle formole di Maxwell; Un precursore italiano di Legendre e Lobatschewski; Sul principio di Huyghens; Sull'estensione del principio di d'Alembert all'elettrodinamica; Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo; Sulle funzioni complesse;* ecc.

Il Beltrami si volse ad uno studio più profondo delle matematiche dopo che, compiuto il corso liceale a Cremona e seguìto per tre anni l'universitario a Pavia, aveva dovuto procu-

rarsi un impiego ed era già entrato nell'Amministrazione delle strade ferrate; in pochi anni, con molti egregi lavori, egli conquistò grande rinomanza in Italia e fuori, cosicchè di buon'ora i principali sodalizî scientifici italiani e poscia le Accademie di Gottinga, Berlino, Parigi, Bruxelles, Monaco lo ascrissero tra i loro soci. Visse tutto per la scienza, schivando i pubblici uffici, salvo quello di membro del Consiglio superiore della pubblica istruzione, e fu mestieri fargli dolce violenza per indurlo, or son due anni, ad accettare la presidenza dei Lincei, che egli ha tenuto con esemplare diligenza e correttezza, sì da rialzare le sorti dell'Accademia. Nel giugno 1898 egli lesse alla presenza dei nostri Sovrani, che assai lo pregiavano, una magnifica commemorazione del compianto suo predecessore Brioschi, e il Re, nella seduta solenne dello scorso giugno, volle personalmente consegnargli il diploma che lo innalzava alla dignità senatoriale, cui da molti anni lo designava la generale estimazione. Chi avrebbe allora potuto prevedere che così presto sarebbe sopravvenuto quel che per lui non può dirsi " il dì della lode ", imperocchè questa lo accompagnò durante tutta la sua vita operosa e virtuosa? Egli non aveva nemici, non perchè gli facesse difetto la fermezza del carattere, ma perchè recava in tutte le sue manifestazioni una grande ed equanime serenità. La sua dipartita sarà appresa con forte rammarico dai dotti d'ogni nazione, ed io mi figuro come se ne dolga il venerando Hermite, che nutriva per lui singolare affetto. Poichè del Beltrami si può a buon dritto ripetere quel ch'egli stesso bellamente scrisse in morte del Clebsch:

" Ma purtroppo il rammentare ora i beneficii arrecati alla scienza da un uomo di simil tempra non giova affatto a lenire il dolore della sua fine immatura. Quando noi studiamo le opere dei nobili ingegni che illustrano l'età nostra, l'ammirazione ed il rispetto che proviamo davanti ad esse fanno tacere in noi ogni altro sentimento. Ma quando essi scompaiono repentinamente dalla scena del mondo; quando i loro scritti, nei quali sentivamo quasi vibrare il loro pensiero e la loro voce, diventano per noi una splendida ma purtroppo muta memoria, noi ci accorgiamo d'aver ricambiato coll'affetto più puro del cuore quei tesori di sapere, ch'essi spargevano con tanta profusione intorno a sè. E se, di più, la fama o la personale esperienza

ci rappresentava quegli uomini come tipi di candore o di modestia, noi piangiamo la loro perdita come quella d'un padre o d'un fratello carissimo „.

Negli annali della scienza vivrà imperituro il nome di Eugenio Beltrami. Onore a lui, che ha così nobilmente compiuta la sua giornata, ahi! troppo breve, non già per la propria fama, ma per l'incremento degli alti studî; troppo breve per noi, che eravamo orgogliosi di averlo collega ed amico; per la sua diletta madre, che gli sopravvive; per l'egregia sua consorte, che lo circondava della più tenera devozione. Possano le loro anime desolate trovare un sollievo nella universale partecipazione al loro dolore, nelle onoranze che dappertutto vengono tributate al loro caro, e delle quali la Facoltà romana ha già preso l'iniziativa.

NOTA

Rispetto ai classici lavori sugli spazii di curvatura costante e sull'interpretazione della Geometria non-euclidea, stimo opportuno ed utile per chi si accinga a tessere una pensata commemorazione dell'illustre estinto, riprodurre ciò ch'egli me ne scriveva il 25 dicembre 1872, in una di quelle sue lettere così cordiali ed istruttive:

“ Le dilucidazioni che a lei possono occorrere, circa il punto
“ indicatomi della mia *Memoria* sugli spazii di curvatura costante,
“ sono tutte contenute in un'altra *Memoria* molto anteriore (del
“ 65 o 66) intitolata: *Risoluzione del problema*, ecc., citata nella
“ Nota 1ª al *Saggio* sulla Geometria non-euclidea, stampato nel
“ Giornale di Napoli. Mi sia lecito il dire che questa quistione
“ è precisamente quella nella quale, se non sono in inganno, io
“ ho introdotto un elemento veramente nuovo nella ricerca ana-
“ litica circa la natura degli spazii; e ciò è tanto vero, che gli
“ è appunto per questa via che io sono entrato, senza volerlo
“ e quasi senza saperlo, nelle dottrine di Lobatschewski, Rie-
“ mann, ecc., nelle quali io sono poi andato a cercare delle ve-
“ rificazioni, e che, alla loro volta, mi hanno suggerito altre

“ricerche secondarie, a cui, altrimenti, non avrei pensato. In “una parola, ecco il principio che io credo enunciato e dimo- “strato da me per la prima volta: *La Geometria generale*, cioè “senza il postulato d' Euclide, *è, analiticamente, la Geometria* “*degli spazii in cui le linee geodetiche sono rappresentate da equa-* “*zioni lineari*. S'intende bene che io parlo dei soli spazii do- “tati di elemento lineare *quadratico*. Riemann ha lasciato in- “travedere la possibilità d'altri spazii; ma è probabilissimo che “la considerazione di questi sarà per molto tempo infinitamente “più inutile, se così si può dire, di quelli della Geometria non- “euclidea.

“Le dirò anche, e questo potrà giovare al di lei scopo, “l'ordine cronologico dei miei studî in argomento. Dapprima “un'osservazione, buttata là da Lagrange in una delle sue *Me-* “*morie* sulle carte geografiche, mi ha condotto a cercare se ci “fossero superficie rappresentabili sopra un piano, per guisa “che le loro linee geodetiche fossero rappresentate da linee “rette; il che è quanto dire, superficie rappresentabili con coor- “dinate curvilinee u e v, per guisa che le loro linee geodetiche “fossero rappresentate da un'equazione lineare in u e v. Nella “citata *Memoria* del 66 ho trovato che tali superficie dovevano “avere necessariamente la curvatura costante (positiva, nega- “tiva o nulla). Più tardi, nel *Saggio*, ho mostrato, *partendo da* “*questo fatto*, che nell'ipotesi della curvatura *negativa* la Geo- “metria di queste superficie è identica a quella di Gauss e di “Lobatschewsky. In seguito, volendo estendere queste conside- “razioni allo spazio, e sgomentandomi (a torto) delle difficoltà “che presentava la risoluzione, nel caso di 3 dimensioni, del “problema già da me risoluto nel 65, tentai di costruire la so- “luzione *a priori*, cioè per induzione, e fortunatamente ci riuscii, “osservando che in luogo della equazione (1) del *Saggio* si può “scrivere:

$$“ \quad ds^2 = R^2 \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}, \qquad a^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

“formole che, aggiungendo una dimensione, suggeriscono di “porre:

$$“ \quad ds^3 = R^2 \frac{dt^2 + du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}, \quad a^2 = t^2 + u^2 + v^2 + w^2.$$

" Verificai dunque che *due* equazioni *lineari* fra le tre variabili
" t, u, v definiscono una linea geodetica, cioè rendono $\delta\int ds = 0$.
" Ma appena conseguito questo risultato, che io sviluppai in
" modo prolisso e coll'aiuto di variabili ausiliarie (specie di coor-
" dinate polari non-euclidee), cominciai a sospettare che il teo-
" rema fosse vero per n qualunque, e verificando questa con-
" gettura giunsi alla dimostrazione che forma il principio della
" *Memoria* sugli spazii di curvatura costante. — Più tardi, quando
" imparai a conoscere la teoria di Cayley, mi accorsi che il suo
" *assoluto* era precisamente quel luogo *limite* che io otteneva
" dall'equazione $w = 0$ ossia $x = 0$, e compresi che l'identità
" dei risultati era dovuta a questa circostanza, che nella Geo-
" metria proiettiva (analitica) si ammette già per dato che le
" equazioni lineari rappresentino linee di minima distanza, co-
" sicchè questa Geometria studia, inconsapevolmente, gli spazii
" di curvatura costante. Io ho avuto il torto di non pubblicare
" questa osservazione, che fu poi fatta dal Klein e corredata
" da lui di molti sviluppi, a molti dei quali io non avevo punto
" pensato. In questo modo il mio *principio della linearità* è stato
" naturalmente dimenticato, ed è stato sostituito da quello della
" *proiettività* che gli equivale completamente. — Dicevo che a
" torto io aveva temuto di non poter seguire, per $n > 2$, il pro-
" cesso tenuto per le superficie: infatti recentemente lo Schläfli
" ha svolto, sostanzialmente, questo processo per n qualunque
" negli *Annali di matematica*, ed ha così dimostrato (e genera-
" lizzato omograficamente) il punto di partenza della *Memoria* in
" quistione „.

EFFEMERIDI

del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1901

calcolate dall'Ingegnere LUIGI GABBA
Assistente all'Osservatorio Astronomico della R. Università

AVVERTENZA.

Le presenti effemeridi furono calcolate con dati della *Connaissance des temps* di Parigi e del *Nautical Almanac* di Greenwich, seguendo le norme contenute nelle *Istruzioni e tavole numeriche per la compilazione del calendario* del Dott. Michele Rajna (Milano, Hoepli, 1887); ed usando le tavole ausiliarie contenute nelle *Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1889* del Prof. Francesco Porro (Torino, Loescher, 1888).

Le ore, i minuti ed i secondi sono espressi in tempo medio civile del meridiano di 15° all'Est di Greenwich; cioè in *tempo medio civile dell'Europa centrale.*

Posizione geografica dell'Osservatorio.

Latitudine boreale	45° 4′ 7″.9	
Longitudine da Greenwich	7° 41′ 48″.2 Est	= 0h 30m 47s.21 E
" da Roma (Coll. Romano)	4° 47′ 5″.3 Ovest	= 0 19 8.35 W
" dal meridiano dell'Europa centrale . . .	7° 18′ 11″.8 "	= 0 29 12.79 W

Altitudine sul livello del mare (al pozzetto del barometro) 276m,4.

PRINCIPALI ARTICOLI DEL CALENDARIO

PER L'ANNO COMUNE 1901.

Relazioni cronologiche.

L'anno 1901 del calendario Gregoriano, stabilito nell'ottobre 1582, comincia martedì 1° Gennaio e corrisponde all'anno:

6614 del periodo Giuliano;

2677 delle olimpiadi (od al I anno della 670ª olimpiade), il quale comincia però nel Luglio 1901; essendo assunta l'êra delle olimpiadi verso l'1 di Luglio dell'anno 3938 del periodo Giuliano; ossia 775,5 anni prima di G. C.;

2654 della fondazione di Roma (secondo Varrone), che comincia il 21 Aprile 1901;
1901 del calendario russo (Giuliano), il quale comincia il 14 Gennaio del calendario Gregoriano;
5661 dell'èra israelitica, il quale comincia il 24 Settembre 1900 e termina il 13 Settembre 1901;
1318 dell'èra maomettana (Egira); il quale comincia il 1 Maggio 1900 e termina il 19 Aprile 1901.

Computo Ecclesiastico.

Numero d'Oro	2
Epatta	X
Ciclo Solare	6
Lettera Domenicale	F
Indizione Romana	14
Lettera del Martirologio	k

Quattro Tempora.

Di primavera . . .	27 Febbraio, 1 e 2 Marzo
D'estate	29, 31 Maggio e 1 Giugno
D'autunno	18, 20 e 21 Settembre
D'inverno	18, 20 e 21 Dicembre

Feste Mobili.

Settuagesima	3 Febbraio
Le Ceneri	20 Febbraio
Pasqua di Risurrezione . .	7 Aprile
Rogazioni	13, 14 e 15 Maggio
Ascensione	16 Maggio
Pentecoste	26 Maggio
SS. Trinità	2 Giugno
Corpus Domini	6 Giugno
1ª Domenica dell'Avvento .	1 Dicembre

Principio delle Quattro Stagioni.

Primavera . . .	21 Marzo	ore	8,	min.	24
Estate	22 Giugno	„	4	„	28
Autunno . . .	23 Settembre	„	19	„	9
Inverno	22 Dicembre	„	13	„	36.

ECLISSI

Nell'anno 1901 hanno luogo quattro Eclissi; due di Luna e due di Sole.

I. *Eclisse di* LUNA *dalla penombra il 3 Maggio 1901 parzialmente visibile a Torino.*

Primo contatto colla penombra	$17^h\ 6^m$
Istante medio	19 31
Ultimo contatto colla penombra	21 55

Il 3 Maggio a Torino la Luna nasce a $19^h\ 37^m$.

II. *Eclisse totale di* SOLE *il 17 Maggio 1901 invisibile a Torino.*

Questa eclisse sarà visibile nella parte sud-est dell'Africa, nelle Indie, nelle isole all'est dell'India, nella Polinesia, nell'Australia e nell'Oceano Indiano.

III. *Eclisse parziale di* LUNA, *il 27 Ottobre 1901 parzialmente visibile a Torino.*

Primo contatto colla penombra	$14^h\ 5^m$
„ „ con l'ombra o principio dell'eclisse	15 25
Istante medio	16 15
Ultimo contatto con l'ombra o fine dell'eclisse . .	17 9
„ „ con la penombra	18 26

Grandezza dell'eclisse 0,227 del diametro lunare.
Il 27 Ottobre a Torino la Luna nasce a $17^h\ 21^m$.

IV. *Eclisse anulare di* Sole, *il 10 Novembre 1901 parzialmente visibile a Torino.*

Principio	$5^h\ 43^m\ 54^s$
Fase massima	6 56 33
Fine . . . . , . .	8 3 42

Grandezza della fase massima 0,796 del diametro solare.

Il 10 Novembre a Torino il Sole nasce a $7^h\ 22^m$.

Questa eclisse è visibile nel nord dell'Africa, ad eccezione del territorio occidentale; in Europa ad eccezione della Norvegia, dell'Inghilterra, della punta nord-ovest della Francia e della metà occidentale della Spagna; in Asia ad eccezione del nord-ovest e nell'Oceano Indiano.

Gennaio 1901.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE						Età della Luna
			Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
1	1	M	8 10	12 32 46,25	16 56	13 59	21 39,1	4 16	11
2	2	M	10	33 14,54	57	14 51	22 37,5	5 24	12
3	3	G	10	33 42,47	58	15 49	23 35,3	6 26	13
4	4	V	9	34 10,02	59	16 51	——	7 19	14
5	5	S	9	34 37,15	17 0	17 58	0 31,3	8 4	15
6	6	D	9	35 3,87	1	19 5	1 24,3	8 41	16
7	7	L	9	35 30,13	2	20 10	2 14,1	9 13	17
8	8	M	9	35 55,92	3	21 14	3 0,7	9 40	18
9	9	M	9	36 21,21	4	22 16	3 45,1	10 6	19
10	10	G	8	36 45,98	6	23 17	4 27,7	10 30	20
11	11	V	8	37 10,19	7	——	5 9,7	10 54	21
12	12	S	7	37 33,84	8	0 17	5 51,8	11 20	22
13	13	D	7	37 56,89	9	1 17	6 34,9	11 45	23
14	14	L	6	38 19,34	10	2 17	7 19,6	12 16	24
15	15	M	6	38 41,15	12	3 17	8 6,6	12 51	25
16	16	M	5	39 2,31	13	4 17	8 56,0	13 34	26
17	17	G	5	39 22,80	14	5 13	9 47,8	14 23	27
18	18	V	4	39 42,58	16	6 5	10 41,2	15 19	28
19	19	S	3	40 1,67	17	6 51	11 35,5	16 24	29
20	20	D	3	40 20,03	18	7 32	12 29,7	17 33	30
21	21	L	2	40 37,63	20	8 9	13 23,3	18 46	1
22	22	M	1	40 54,47	21	8 42	14 15,7	19 59	2
23	23	M	0	41 10,53	22	9 12	15 7,3	21 13	3
24	24	G	7 59	41 25,79	24	9 41	15 58,7	22 28	4
25	25	V	58	41 40,25	25	10 11	16 50,4	23 42	5
26	26	S	57	41 53,88	27	10 43	17 43,3	——	6
27	27	D	57	42 6,69	28	11 18	18 37,6	0 55	7
28	28	L	56	42 18,66	29	12 0	19 33,4	2 6	8
29	29	M	54	42 29,80	31	12 46	20 30,1	3 14	9
30	30	M	53	42 40,11	32	13 40	21 26,7	4 17	10
31	31	G	52	42 49,58	34	14 40	22 22,1	5 11	11

Fasi della Luna.

5 Luna piena „ 1^h 14^m
12 Ultimo quarto „ 21^h 38^m
20 Luna nuova „ 15^h 36^m
27 Primo quarto „ 10^h 52^m

Il giorno nel mese cresce di 0^h 56^m

12 La Luna è in Apogeo alle 12^h
24 Id. Perigeo „ 13^h

Il Sole entra nel segno *Acquario* il giorno 20 alle ore 18 min. 17.

Febbraio 1901.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE					
			Il SOLE			La LUNA		
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m
32	1	V	7 51	12 42 58,21	17 35	15 43	23 15,2	5 59
33	2	S	50	43 6,02	37	16 49	——	6 39
34	3	D	49	43 13,00	38	17 54	0 5,7	7 13
35	4	L	47	43 19,15	39	18 58	0 53,3	7 42
36	5	M	46	43 24,49	41	20 2	1 38,7	8 9
37	6	M	45	43 29,03	42	21 3	2 22,2	8 33
38	7	G	44	43 32,77	44	22 4	3 4,6	8 57
39	8	V	42	43 35,72	45	23 4	3 47,0	9 22
40	9	S	41	43 37,88	47	——	4 29,7	9 49
41	10	D	39	43 39,27	48	0 4	5 13,4	10 16
42	11	L	38	43 39,89	49	1 3	5 59,0	10 49
43	12	M	37	43 39,76	51	2 2	6 46,6	11 38
44	13	M	35	43 38,88	52	2 59	7 36,2	12 13
45	14	G	33	43 37,26	54	3 52	8 28,0	13 5
46	15	V	32	43 34,93	55	4 41	9 21,1	14 5
47	16	S	30	43 31,86	57	5 24	10 14,9	15 11
48	17	D	29	43 28,10	58	6 4	11 8,9	16 22
49	18	L	27	43 23,63	59	6 38	12 2,7	17 36
50	19	M	26	43 18,47	18 1	7 11	12 55,9	18 52
51	20	M	24	43 12,63	2	7 42	13 49,1	20 8
52	21	G	22	43 6,12	4	8 12	14 42,5	21 25
53	22	V	21	42 58,95	5	8 45	15 36,9	22 41
54	23	S	19	42 51,12	7	9 20	16 32,4	23 55
55	24	D	17	42 42,67	8	10 0	17 28,9	——
56	25	L	15	42 33,59	10	10 46	18 26,0	1 6
57	26	M	14	42 23,90	11	11 37	19 22,6	2 11
58	27	M	12	42 18,63	12	12 35	20 17,9	3 7
59	28	G	10	42 2,78	14	13 37	21 10,9	3 57

Fasi della Luna.

3 Luna piena alle 16^h 30^m
11 Ultimo quarto „ 19^h 12^m
19 Luna nuova „ 8^h 45^m
25 Primo quarto „ 19^h 38^m

Il giorno nel mese cresce di 1^h 22^m

9 La Luna è in Apogeo alle 8^h
21 Id. Perigeo „ 4^h

Il Sole entra nel segno Pesci il giorno 19 alle ore 8 min. 45.

Marzo 1901.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE						Età della Luna
			Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
60	1	V	7 9	12 41 51,38	18 15	14 40	22 1,3	4 38	11
61	2	S	7	41 39,45	17	15 44	22 49,1	5 14	12
62	3	D	5	41 27,01	18	16 48	23 34,6	5 44	13
63	4	L	3	41 14,09	19	17 51	——	6 11	14
64	5	M	1	41 0,71	21	18 52	0 18,5	6 36	15
65	6	M	0	40 46,88	22	19 53	1 1,2	7 1	16
66	7	G	6 58	40 32,63	23	20 53	1 43,6	7 26	17
67	8	V	56	40 17,99	24	21 53	2 26,1	7 51	18
68	9	S	54	40 2,97	26	22 53	3 9,5	8 19	19
69	10	D	52	39 47,59	27	23 51	3 54,2	8 51	20
70	11	L	51	39 31,89	28	——	4 40,5	9 26	21
71	12	M	49	39 15,88	30	0 48	5 28,7	10 7	22
72	13	M	47	38 59,57	31	1 41	6 18,4	10 56	23
73	14	G	45	38 43,00	32	2 30	7 9,5	11 50	24
74	15	V	43	38 26,18	34	3 16	8 1,6	12 51	25
75	16	S	41	38 9,15	35	3 56	8 54,1	13 58	26
76	17	D	39	37 51,90	36	4 32	9 46,9	15 9	27
77	18	L	37	37 34,46	38	5 5	10 39,8	16 24	28
78	19	M	36	37 16,86	39	5 37	11 33,1	17 40	29
79	20	M	34	36 59,10	40	6 8	12 27,1	18 58	30
80	21	G	32	36 41,19	41	6 41	13 22,6	20 16	1
81	22	V	30	36 23,17	43	7 17	14 19,6	21 34	2
82	23	S	29	36 5,03	44	7 56	15 17,9	22 50	3
83	24	D	26	35 46,80	45	8 41	16 17,0	23 59	4
84	25	L	24	35 28,50	46	9 32	17 15,9	——	5
85	26	M	22	35 10,13	48	10 29	18 12,9	1 1	6
86	27	M	21	34 51,73	49	11 31	19 7,4	1 53	7
87	28	G	19	34 33,31	50	12 34	19 58,8	2 38	8
88	29	V	17	34 14,90	52	13 38	20 47,2	3 15	9
89	30	S	15	33 56,51	53	14 41	21 35,0	3 47	10
90	31	D	13	33 38,17	54	15 43	22 16,9	4 15	11

Fasi della Luna.

5 Luna piena	alle	9^h 4^m
13 Ultimo quarto	„	14^h 6^m
20 Luna nuova	„	13^h 53^m
27 Primo quarto	„	5^h 39^m

Il giorno nel mese cresce di 1^h 37^m

9 La Luna è in Apogeo alle 0^h
21 Id. Perigeo „ 11^h

Il Sole entra nel segno *Ariete* il giorno 21 alle ore 8 min. 24.

Aprile 1901.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE						Età della Luna
			Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
91	1	L	6 11	12 33 19,89	18 55	16 45	22 59,5	4 41	12
92	2	M	9	33 1,71	57	17 45	23 41,7	5 5	13
93	3	M	7	32 43,63	58	18 45	——	5 30	14
94	4	G	6	32 25,69	59	19 45	0 24,0	5 55	15
95	5	V	4	32 7,92	19 0	20 45	1 7,1	6 23	16
96	6	S	2	31 50,31	2	21 43	1 51,4	6 53	17
97	7	D	0	31 32,91	3	22 40	2 37,2	7 27	18
98	8	L	5 58	31 15,73	4	23 34	3 24,6	8 6	19
99	9	M	56	30 58,79	6	——	4 13,2	8 51	20
100	10	M	55	30 42,11	7	0 34	5 3,1	9 43	21
101	11	G	53	30 25,71	8	1 10	5 53,6	10 40	22
102	12	V	51	30 9,61	9	1 51	6 44,4	11 43	23
103	13	S	49	29 53,83	11	2 27	7 35,3	12 50	24
104	14	D	47	29 38,38	12	3 1	8 26,3	14 0	25
105	15	L	46	29 23,28	13	3 33	9 17,8	15 13	26
106	16	M	44	29 8,54	14	4 4	10 10,3	16 28	27
107	17	M	42	28 54,17	16	4 35	11 4,4	17 46	28
108	18	G	41	28 40,18	17	5 9	12 0,7	19 5	29
109	19	V	39	28 26,60	18	5 47	12 59,3	20 23	1
110	20	S	37	28 13,41	19	6 30	13 59,9	21 38	2
111	21	D	35	28 0,63	21	7 20	15 3,1	22 46	3
112	22	L	34	27 48,27	22	8 17	16 1,3	23 44	4
113	23	M	32	27 36,33	23	9 19	16 59,0	——	5
114	24	M	31	27 24,84	24	10 24	17 53,1	0 33	6
115	25	G	29	27 13,79	26	11 29	18 43,7	1 14	7
116	26	V	27	27 3,20	27	12 34	19 32,8	1 49	8
117	27	S	26	26 53,08	28	13 36	20 15,6	2 18	9
118	28	D	24	26 43,45	29	14 38	20 58,5	2 45	10
119	29	L	23	26 34,31	30	15 38	21 40,6	3 9	11
120	30	M	21	26 25,67	32	16 38	22 22,7	3 34	12

Fasi della Luna.

4 Luna piena alle 2^h 20^m

12 Ultimo quarto " 4^h 57^m

18 Luna nuova " 22^h 37^m

25 Primo quarto " 17^h 15^m

Il giorno nel mese cresce di 1^h 30^m

5 La Luna è in Apogeo alle 8^h

18 Id. Perigeo " 22^h

Il Sole entra nel segno *Toro* il giorno 20 alle ore 18 min. 14.

Maggio 1901.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE						Età della Luna
			Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
121	1	M	5 20	12 26 17,55	19 33	17 38	23 5,4	3 59	13
122	2	G	18	26 9,96	34	18 38	23 50,2	4 26	14
123	3	V	17	26 2,90	35	19 37	——	4 55	15
124	4	S	15	25 56,39	37	20 35	0 34,6	5 28	16
125	5	D	14	25 50,43	38	21 30	1 21,7	6 5	17
126	6	L	12	25 45,04	39	22 21	2 10,2	6 49	18
127	7	M	11	25 40,22	40	23 8	2 59,8	7 38	19
128	8	M	10	25 35,97	42	23 50	3 49,9	8 34	20
129	9	G	9	25 32,32	43	——	4 40,1	9 35	21
130	10	V	7	25 29,26	44	0 27	5 29,9	10 39	22
131	11	S	6	25 26,79	45	1 1	6 19,5	11 46	23
132	12	D	5	25 24,90	46	1 32	7 9,0	12 55	24
133	13	L	3	25 23,63	48	2 2	7 59,1	14 7	25
134	14	M	2	25 22,94	49	2 31	8 50,5	15 21	26
135	15	M	1	25 22,85	50	3 3	9 44,0	16 37	27
136	16	G	0	25 23,33	51	3 39	10 40,3	17 54	28
137	17	V	4 59	25 24,40	52	4 18	11 39,4	19 11	29
138	18	S	58	25 26,04	53	5 5	12 40,8	20 23	30
139	19	D	57	25 28,23	54	5 59	13 42,7	21 28	1
140	20	L	56	25 30,97	55	7 0	14 43,6	22 22	2
141	21	M	55	25 34,24	56	8 6	15 41,1	23 18	3
142	22	M	54	25 38.04	58	9 14	16 34,9	23 47	4
143	23	G	53	25 42,35	59	10 21	17 25,0	——	5
144	24	V	52	25 47,17	20 0	11 25	18 11,6	0 19	6
145	25	S	51	25 52,48	1	12 29	18 55,9	0 47	7
146	26	D	51	25 58,27	2	13 30	19 38,6	1 13	8
147	27	L	50	26 4,54	3	14 30	20 20,8	1 38	9
148	28	M	49	26 11,27	3	15 30	21 3,3	2 3	10
149	29	M	49	26 18,45	4	16 29	21 46,6	2 29	11
150	30	G	48	26 26,07	5	17 29	22 31,4	2 57	12
151	31	V	47	26 34,12	6	18 27	23 18,1	3 28	13

Fasi della Luna.

3 Luna piena alle 19h 19m
11 Ultimo quarto „ 15h 38m
18 Luna nuova „ 6h 38m
25 Primo quarto „ 6h 40m

Il giorno nel mese cresce di 1h 8m

2 La Luna è in Apogeo alle 9h
17 Id. Perigeo „ 8h
29 Id. Apogeo „ 18h

Il Sole entra nel segno *Gemelli* il giorno 21 ad ore 18 min. 5.

Giugno 1901.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE						Età della Luna
			Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
152	1	S	4 47	12 26 42,59	20 7	19 24	——	4 5	14
153	2	D	46	26 51,48	8	20 17	0 6,3	4 46	15
154	3	L	46	27 0,75	9	21 7	0 56,1	5 34	16
155	4	M	45	27 10,39	9	21 51	1 46,6	6 29	17
156	5	M	45	27 20,41	10	22 30	2 37,3	7 28	18
157	6	G	44	27 30,77	11	23 4	3 27,5	8 31	19
158	7	V	44	27 41,48	11	23 36	4 16,9	9 37	20
159	8	S	44	27 52,49	12	——	5 6,0	10 45	21
160	9	D	43	28 3,81	13	0 4	5 54,7	11 54	22
161	10	L	43	28 15,43	13	0 33	6 44,1	13 5	23
162	11	M	43	28 27,29	14	1 3	7 34,9	14 18	24
163	12	M	43	28 39,41	14	1 35	8 28,0	15 32	25
164	13	G	43	28 51,72	15	2 11	9 24,0	16 47	[illegible]
165	14	V	43	29 4,24	15	2 54	10 22,7	18 0	[illegible]
166	15	S	43	29 16,93	16	3 43	11 23,6	19 8	[illegible]
167	16	D	43	29 29,73	16	4 40	12 24,8	20 8	[illegible]
168	17	L	43	29 42,65	17	5 44	13 24,6	20 59	1
169	18	M	43	29 55,65	17	6 52	14 21,3	21 42	2
170	19	M	43	30 8,70	17	8 1	15 14,3	22 17	3
171	20	G	43	30 21,77	18	9 8	16 3,7	22 48	4
172	21	V	43	30 34,83	18	10 15	16 50,0	23 16	5
173	22	S	44	30 47,87	18	11 18	17 34,3	23 41	6
174	23	D	44	31 0,85	18	12 20	18 17,2	——	7
175	24	L	44	31 13,76	18	13 20	18 59,8	0 7	8
176	25	M	44	31 26,56	18	14 19	19 42,9	0 32	9
177	26	M	45	31 39,23	18	15 19	20 27,1	0 59	10
178	27	G	45	31 51,76	18	16 18	21 13,0	1 30	11
179	28	V	46	32 4,13	18	17 15	22 0,7	2 3	12
180	29	S	46	32 16,30	18	18 11	22 50,1	2 43	13
181	30	D	47	32 28,28	18	19 2	23 40,8	3 28	14

Fasi della Luna.

2 Luna piena alle 10^h 53^m

9 Ultimo quarto „ 23^h 0^m

16 Luna nuova „ 14^h 33^m

23 Primo quarto „ 21^h 59^m

Il giorno nel mese cresce di 0^h 12^m

14 La Luna è in Perigeo alle 0^h

26 Id. Apogeo „ 10^h

Il Sole entra nel segno *Cancro* il giorno 22 ad ore 4 min. 28.

Luglio 1901.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE							Età della Luna
			Il SOLE				La LUNA			
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano		tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
			h m	h m	s	h m	h m	h m	h m	
182	1	L	4 47	12 32	40,02	20 18	19 48	——	4 21	15
183	2	M	48	32	51,52	18	20 30	0 32,1	5 19	16
184	3	M	48	33	2,75	17	21 6	1 23,3	6 22	17
185	4	G	49	33	13,72	17	21 39	2 13,9	7 29	18
186	5	V	50	33	24,39	17	22 9	3 3,7	8 37	19
187	6	S	50	33	34,74	16	22 38	3 52,9	9 46	20
188	7	D	51	33	44,77	16	23 7	4 42,0	10 56	21
189	8	L	52	33	54,45	16	23 38	5 31,9	12 7	22
190	9	M	52	34	3,76	15	——	6 23,2	13 20	23
191	10	M	53	34	12,71	15	0 12	7 16,5	14 32	24
192	11	G	54	34	21,26	14	0 50	8 12,5	15 44	25
193	12	V	55	34	29,39	13	1 35	9 10,6	16 52	26
194	13	S	56	34	37,09	13	2 27	10 10,2	17 55	27
195	14	D	57	34	44,33	12	3 27	11 9,5	18 48	28
196	15	L	58	34	51,10	11	4 32	12 7,1	19 34	29
197	16	M	59	34	57,38	11	5 41	13 1,9	20 14	1
198	17	M	59	35	3,15	10	6 49	13 53,2	20 47	2
199	18	G	5 0	35	8,39	9	7 56	14 41,6	21 16	3
200	19	V	1	35	13,10	8	9 1	15 27,4	21 44	4
201	20	S	2	35	17,25	7	10 5	16 11,6	22 9	5
202	21	D	3	35	20,83	6	11 8	16 54,9	22 35	6
203	22	L	4	35	23,84	5	12 8	17 38,1	23 1	7
204	23	M	5	35	26,26	4	13 7	18 21,9	23 31	8
205	24	M	6	35	28,10	3	14 7	19 6,9	——	9
206	25	G	8	35	29,33	2	15 4	19 53,7	0 3	10
207	26	V	9	35	29,96	1	16 [illegible]	20 42,1	0 39	11
208	27	S	10	35	29,97	0	16 53	21 32,2	1 22	12
209	28	D	11	35	29,40	19 59	17 42	22 23,3	2 11	13
210	29	L	12	35	28,20	58	18 25	23 15,0	3 7	14
211	30	M	13	35	26,40	57	19 4	——	4 9	15
212	31	M	14	35	23,98	55	19 40	0 6,6	5 15	16

Fasi della Luna.

2 Luna piena	alle	0h	18m
9 Ultimo quarto	"	4h	20m
15 Luna nuova	"	23h	11m
23 Primo quarto	"	14h	58m
31 Luna piena	"	11h	34m

Il giorno nel mese diminuisce di 0h 50m.

12 La Luna è in Perigeo alle 1h
24 Id. Apogeo " 4h

Il Sole entra nel segno *Leone* il giorno 23 alle ore 15 min. 24.

Agosto 1901.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE							Età della Luna
			Il SOLE				La LUNA			
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano		tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
			h m	h m	s	h m	h m	h m	h m	
213	1	G	5 15	12 35	20,96	19 54	20 11	0 57,7	6 23	17
214	2	V	16	35	17,33	53	20 42	1 48,3	7 34	18
215	3	S	17	35	13,12	52	21 12	2 38,6	8 45	19
216	4	D	18	35	8,32	50	21 42	3 29,1	9 57	20
217	5	L	20	35	2,93	49	22 15	4 20,6	11 10	21
218	6	M	21	34	56,95	48	22 52	5 13,4	12 22	22
219	7	M	22	34	50,41	46	23 34	6 8.1	13 34	23
220	8	G	23	34	43,29	45	——	7 4,7	14 42	24
221	9	V	25	34	35,61	43	0 22	8 2,5	15 45	25
222	10	S	26	34	27,37	42	1 18	9 0,5	16 41	26
223	11	D	27	34	18,56	40	2 19	9 57,3	17 30	27
224	12	L	28	34	9,21	39	3 25	10 52,1	18 11	28
225	13	M	29	33	59,29	37	4 33	11 44,1	18 46	29
226	14	M	31	33	38,83	36	5 39	12 33,4	19 17	1
227	15	G	32	33	37,82	34	6 46	13 20,2	19 45	2
228	16	V	33	33	26,28	32	7 50	14 5,3	20 11	3
229	17	S	34	33	14,21	31	8 52	14 49,3	20 37	4
230	18	D	35	33	1,62	29	9 55	15 32,8	21 3	5
231	19	L	37	32	48,50	28	10 54	16 16,6	21 32	6
232	20	M	38	32	34,87	26	11 54	17 1,1	22 3	7
233	21	M	39	32	20,75	24	12 52	17 46,9	22 37	8
234	22	G	40	32	6,15	22	13 49	18 34,2	23 18	9
235	23	V	41	31	51,07	21	14 43	19 22,7	——	10
236	24	S	43	31	35,54	19	15 33	20 12,9	0 3	11
237	25	D	44	31	19,57	17	16 18	21 3,9	1 13	12
238	26	L	45	31	3,16	16	16 59	21 55,3	1 54	13
239	27	M	46	30	46,33	14	17 36	22 46,7	2 57	14
240	28	M	47	30	29,12	12	18 10	23 38,1	4 4	15
241	29	G	49	30	11,54	10	18 42	——	5 15	16
242	30	V	50	29	53,60	8	19 13	0 29,6	6 27	17
243	31	S	51	29	35,31	6	19 44	1 21,4	7 41	18

Fasi della Luna.

7 Ultimo quarto alle 9^h 2^m

14 Luna nuova „ 9^h 28^m

22 Primo quarto „ 8^h 52^m

29 Luna piena „ 21^h 21^m

Il giorno nel mese diminuisce di 1^h 26^m.

---

6 La Luna è in Perigeo alle 9^h
20 Id. Apogeo „ 23^h

Il Sole entra nel segno *Vergine* il giorno 23 alle ore 22 min. 7.

Settembre 1901.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE						Età della Luna
			Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
244	1	D	5 52	12 29 9,66	19 5	20 17	2 14,0	8 55	19
245	2	L	53	28 57,83	3	20 54	3 7,8	10 10	20
246	3	M	55	28 38,67	1	21 34	4 3,3	11 24	21
247	4	M	56	28 19,26	18 59	22 21	5 0,3	12 33	22
248	5	G	57	27 59,61	57	23 15	5 58,1	13 39	23
249	6	V	58	27 39,75	55	——	6 55,8	14 37	24
250	7	S	59	27 19,69	54	0 13	7 52,4	15 27	25
251	8	D	6 1	26 59,44	52	1 17	8 46,9	16 9	26
252	9	L	2	26 39,04	50	2 23	9 38,8	16 46	27
253	10	M	3	26 18,49	48	3 28	10 28,1	17 18	28
254	11	M	4	25 57,80	46	4 34	11 15,1	17 47	29
255	12	G	5	25 36,99	44	5 38	12 0,3	18 13	30
256	13	V	6	25 16,08	42	6 40	12 44,6	18 40	1
257	14	S	8	24 55,08	40	7 42	13 28,2	19 6	2
258	15	D	9	24 34,01	39	8 43	14 12,0	19 34	3
259	16	L	10	24 12,89	37	9 43	14 56,2	20 4	4
260	17	M	11	23 51,74	35	10 42	15 41,5	20 37	5
261	18	M	12	23 30,56	33	11 38	16 27,9	21 14	6
262	19	G	14	23 9,38	31	12 32	17 15,6	21 57	7
263	20	V	15	22 48,23	29	13 23	18 4,2	22 46	8
264	21	S	16	22 27,12	27	14 9	18 53,7	23 40	9
265	22	D	17	22 6,06	25	14 52	19 43,8	——	10
266	23	L	19	21 45,08	23	15 30	20 34,1	0 40	11
267	24	M	20	21 24,20	21	16 5	21 24,8	1 44	12
268	25	M	21	21 3,43	19	16 38	22 15,8	2 52	13
269	26	G	22	20 42,82	18	17 10	23 7,6	4 2	14
270	27	V	23	20 22,37	16	17 41	——	5 6	15
271	28	S	25	20 2,11	14	18 14	0 0,5	6 32	16
272	29	D	26	19 42,08	12	18 50	0 55,2	7 49	17
273	30	L	27	19 22,28	10	19 30	1 51,8	9 5	18

Fasi della Luna.

5 Ultimo quarto alle 14^h 27^m

12 Luna nuova „ 22^h 19^m

21 Primo quarto „ 2^h 33^m

28 Luna piena „ 6^h 36^m

Il giorno nel mese diminuisce di 1^h 32^m.

1 La Luna è in Perigeo alle 21^h
17 Id. Apogeo „ 18^h
29 Id. Perigeo „ 19^h

Il Sole entra nel segno *Libra* il giorno 23 alle ore 19 min. 9.

Ottobre 1901.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE						Età della Luna
			Il SOLE			**La LUNA**			
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
274	1	M	6 28	12 19 2,75	18 8	20 17	2 50,2	10 19	19
275	2	M	30	18 43,53	6	21 9	3 49,8	11 29	20
276	3	G	31	18 24,62	4	22 8	4 49,4	12 30	21
277	4	V	32	18 6,04	2	23 11	5 47,6	13 24	22
278	5	S	33	17 47,83	1	——	6 43,2	14 9	23
279	6	D	35	17 30,00	17 59	0 16	7 36,0	14 47	24
280	7	L	36	17 12,56	57	1 21	8 25,7	15 20	25
281	8	M	37	16 55,54	55	2 26	9 12,8	15 50	26
282	9	M	38	16 38,96	53	3 30	9 57,9	16 17	27
283	10	G	40	16 22,82	52	4 32	10 42,0	16 43	28
284	11	V	41	16 7,15	50	5 34	11 25,4	17 9	29
285	12	S	42	15 51,96	48	6 34	12 8,8	17 37	30
286	13	D	44	15 37,27	46	7 34	12 52,7	18 6	1
287	14	L	45	15 23,10	44	8 33	13 37,7	18 38	2
288	15	M	46	15 9,45	43	9 30	14 23,7	19 13	3
289	16	M	47	14 56,33	41	10 25	15 10,8	19 54	4
290	17	G	49	14 43,78	39	11 17	15 58,8	20 40	5
291	18	V	50	14 31,81	38	12 4	16 47,3	21 31	6
292	19	S	52	14 20,42	36	12 47	17 36,0	22 28	7
293	20	D	53	14 9,63	34	13 26	18 24,9	23 29	8
294	21	L	54	13 59,47	32	14 1	19 13,7	——	9
295	22	M	56	13 49,94	31	14 33	20 2,9	0 33	10
296	23	M	57	13 41,05	29	15 5	20 52,9	1 40	11
297	24	G	58	13 32,84	27	15 36	21 44,2	2 50	12
298	25	V	7 0	13 25,30	26	16 8	22 37,4	4 3	13
299	26	S	1	13 18,48	24	16 42	23 33,3	5 19	14
300	27	D	2	13 12,36	23	17 21	——	6 36	15
301	28	L	4	13 6,99	21	18 6	0 31,0	7 53	16
302	29	M	5	13 2,36	20	18 57	1 32,9	9 8	17
303	30	M	7	12 58,51	18	19 56	2 34,9	10 16	18
304	31	G	8	12 55,46	17	20 59	3 36,2	11 15	19

Fasi della Luna.

4 Ultimo quarto alle 21^h 52^m

12 Luna nuova " 14^h 11^m

20 Primo quarto " 18^h 58^m

27 Luna piena " 16^h 6^m

Il giorno nel mese diminuisce di 1^h 34^m.

15 La Luna è in Apogeo alle 8^h

28 Id. Perigeo " 4^h

Il Sole entra nel segno *Scorpione* il giorno 24 alle ore 3 min. 46.

Novembre 1901.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	GIORNO della Settimana	Il Sole nasce	Il Sole passa al meridiano	Il Sole tramonta	La Luna nasce	La Luna passa al meridiano	La Luna tramonta	Età della Luna
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
305	1	V	7 9	12 12 53,20	17 16	22 6	4 35,1	12 5	20
306	2	S	11	12 51,75	14	23 13	5 30,6	12 47	21
307	3	D	12	12 51,13	13	——	6 22,3	13 23	22
308	4	L	13	12 51,35	11	0 18	7 10,8	13 53	23
309	5	M	15	12 52,40	10	1 22	7 56,7	14 21	24
310	6	M	16	12 54,29	9	2 25	8 40,9	14 47	25
311	7	G	18	12 57,03	7	3 27	9 24,1	15 14	26
312	8	V	19	13 0,62	6	4 27	10 7,2	15 40	27
313	9	S	20	13 5,08	5	5 26	10 50,7	16 8	28
314	10	D	22	13 10,37	4	6 26	11 35,1	16 39	29
315	11	L	23	13 16,52	3	7 23	12 20,8	17 14	1
316	12	M	25	13 23,52	1	8 20	13 7,6	17 53	2
317	13	M	26	13 31,36	0	9 13	13 55,4	18 37	3
318	14	G	27	13 40,04	16 59	10 2	14 43,8	19 27	4
319	15	V	29	13 49,57	58	10 46	15 32,2	20 22	5
320	16	S	30	13 59,93	57	11 25	16 20,5	21 20	6
321	17	D	31	14 11,11	56	12 1	17 8,3	22 22	7
322	18	L	33	14 23,11	56	12 33	17 56,0	23 26	8
323	19	M	34	14 35,94	55	13 4	18 43,8	——	9
324	20	M	35	14 49,56	54	13 34	19 32,4	0 32	10
325	21	G	37	15 3,97	53	14 3	20 22,7	1 41	11
326	22	V	38	15 19,17	52	14 35	21 15,4	2 53	12
327	23	S	39	15 35,15	52	15 11	22 11,3	4 7	13
328	24	D	41	15 51,90	51	15 52	23 10,5	5 23	14
329	25	L	42	16 9,43	50	16 39	——	6 39	15
330	26	M	43	16 27,70	50	17 36	0 12,6	7 51	16
331	27	M	44	16 46,72	49	18 38	1 15,8	8 57	17
332	28	G	46	17 6,47	49	19 46	2 18,0	9 54	18
333	29	V	47	17 26,95	48	20 56	3 17,5	10 41	19
334	30	S	48	17 48,14	48	22 5	4 13,1	11 21	20

Fasi della Luna.

3 Ultimo quarto alle $8^h\ 24^m$

11 Luna nuova „ $8^h\ 34^m$

19 Primo quarto „ $9^h\ 23^m$

26 Luna piena „ $2^h\ 18^m$

Il giorno nel mese diminuisce di $1^h\ 9^m$.

11 La Luna è in Apogeo alle 13^h
25 Id. Perigeo „ 17^h

Il Sole entra nel segno *Sagittario* il giorno 23 ad ore 0 min. 41.

Dicembre 1901.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE							Età della Luna
			Il SOLE				La LUNA			
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano		tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
			h m	h m	s	h m	h m	h m	h m	
335	1	D	7 49	12 18	10,02	16 47	23 11	5 4,6	11 54	21
336	2	L	50	18	32,58	47	——	5 52,9	12 24	22
337	3	M	51	18	55,80	47	0 16	6 38,4	12 51	23
338	4	M	52	19	19,64	46	1 18	7 22,4	13 18	24
339	5	G	53	19	44,09	46	2 20	8 5,6	13 44	25
340	6	V	55	20	9,12	46	3 19	8 48,9	14 11	26
341	7	S	56	20	34,70	46	4 19	9 32,8	14 41	27
342	8	D	57	21	0,79	46	5 17	10 17,9	15 15	28
343	9	L	58	21	27,38	46	6 13	11 4,4	15 52	29
344	10	M	59	21	54,43	46	7 8	11 52,1	16 35	30
345	11	M	59	22	21,90	46	7 59	12 40,6	17 23	1
346	12	G	8 0	22	49,77	46	8 45	13 31,5	18 16	2
347	13	V	1	23	18,00	46	9 27	14 18,2	19 14	3
348	14	S	2	23	46,55	46	10 3	15 6,3	20 15	4
349	15	D	3	24	15,39	46	10 36	15 53,8	21 17	5
350	16	L	3	24	44,49	46	11 8	16 40,9	22 23	6
351	17	M	4	25	13,80	47	11 37	17 28,1	23 29	7
352	18	M	5	25	43,30	47	12 5	18 16,0	——	8
353	19	G	5	26	12,93	47	12 35	19 5,6	0 37	9
354	20	V	6	26	42,69	48	13 7	19 57,8	1 47	10
355	21	S	6	27	12,52	48	13 44	20 53,1	2 59	11
356	22	D	7	27	42,40	49	14 26	21 51,8	4 13	12
357	23	L	7	28	12,30	49	15 16	22 53,2	5 25	13
358	24	M	8	28	42,18	50	16 15	23 55,8	6 34	14
359	25	M	8	29	12,02	50	17 20	——	7 36	15
360	26	G	9	29	41,79	51	18 30	0 57,4	8 29	16
361	27	V	9	30	11,46	51	19 42	1 56,4	9 14	17
362	28	S	9	30	41,00	52	20 52	2 51,7	9 52	18
363	29	D	9	31	10,38	53	22 0	3 43,1	10 24	19
364	30	L	9	31	39,58	54	23 6	4 31,5	10 53	20
365	31	M	9	32	8,55	55	——	5 17,3	11 21	21

Fasi della Luna.

2 Ultimo quarto „ 22h 50m

11 Luna nuova „ 8h 58m

18 Primo quarto „ 21h 35m

25 Luna piena alle 13h 16m

Il giorno nel mese diminuisce di 0h 14m.

8 La Luna è in Apogeo alle 15h

24 Id. Perigeo „ 4h

Il Sole entra nel segno *Capricorno* il giorno 22 alle ore 13 min. 36.

Un parassita intranucleare nei reni del topo delle chiaviche.

Nota del Dott. ERMANNO GIGLIO-TOS,
Assistente al R. Museo di Anatomia comparata in Torino.

(Con una tavola).

Nel volume I dell'" Année Biologique " per l'anno 1895 (1) il Dr. A. Labbé, ben noto per i suoi studi sugli Sporozoi, dopo di aver dato una breve recensione di un lavoro del Dangeard su di un parassita del nucleo delle Amebe che egli chiama *Nucleophaga* (2), aggiunge la seguente nota: " L'auteur (Dangeard) " semble du reste ne pas connaître un autre parasite du noyau, " décrit par Steinhaus sous le nom de *Karyophagus Salamandrae*, " dans les noyaux des cellules intestinales de la Salamandre " (*Acystis parasitica* Labbé). Les autres parasites signalés dans " les noyaux, par exemple, le *Micrococcidium karyolyticum* de " Drüner des noyaux spermatiques de la Salamandre, le *Ka-* " *ryophagus hominis* des cirrhoses n'ont qu'une existence problé- " matique. Il ne semble pas y avoir des parasites nucléaires " vrais: l'*Acystis parasitica* se retrouve aussi bien dans le corps " cellulaire que dans le noyau: les *Drepanidium*, parasites des " globules du sang et de leucocytes de la Grenouille, sont " parfois karyophages; mais ce ne sont pas là des parasites " spécifiquement nucléaires. Le cas de M. Dangeard, s'il est " vérifié, et s'il est constaté que le *Nucleophaga* ne vit *que* " dans le noyau, *serait le premier cas d'un parasite absolument* " *karyophage* " (p. 20).

Ora, dall'epoca in cui scriveva il Labbé a venir fino ad oggi non mi risulta che sieno stati descritti altri parassiti nucleari.

---

(1) L'*Année Biologique*, " Comptes rendus annuels des travaux de Biologie générale " publié sous la direction de Yves Delage, Paris, 1897.

(2) Dangeard P. A., *Mémoires sur les parasites du noyau et du protoplasma*, " Le Botaniste " (IV) XVI. 1896, pp. 199-249.

Mi pare adunque che possa presentare un certo interesse per i Biologi il caso che qui pubblico, sia perchè il parassita mi sembra esclusivamente nucleare, sia poi ancora perchè per la struttura è ben distinto da tutti gli altri parassiti nucleari finora descritti.

Trovai questo parassita nei nuclei delle cellule renali di un surmulotto (*Mus decumanus* Pall.), che proveniva dalle cantine di questa città.

Avendo fatto di un pezzo dei reni di questo topo alcune sezioni per esperimentare un metodo di colorazione, fui colpito, all'osservazione microscopica, dalla presenza in moltissimi nuclei di un corpicciuolo, intensamente colorato come la cromatina, e che, a debole ingrandimento, si sarebbe facilmente scambiato per un vero nucleolo.

Usai allora un ingrandimento maggiore, ricorrendo all'obbiettivo apocromatico Zeiss, 1.5^{mm}, apert. 1.30, ocul. 4 e riconobbi subito che quei corpicciuoli intranucleari non erano nucleoli, ma corpi estranei al nucleo e rinchiusi in esso, e quindi, stante la loro organizzazione che ora descriverò, veri organismi viventi nel nucleo e perciò da ritenersi quali suoi parassiti.

Esaminai di questi reni così infetti 39 sezioni e in tutte ritrovai numerosissimi i parassiti. Dico numerosissimi, perchè in ogni sezione se ne possono contare certamente assai più di un centinaio, e si noti che ogni sezione non si estende a tutto il rene ma solamente ad una piccola parte di esso. Di fatto le sezioni hanno press'a poco la figura di un triangolo equilatero di soli 3 mm. di lato.

Sarebbe stato certamente assai interessante l'osservare se il surmulotto che conteneva nei suoi reni una sì prodigiosa quantità di parassiti intranucleari presentava qualche accentuato disturbo fisiologico. Naturalmente, non potendo prevedere, quando il topo era ancora in vita, una simile invasione di parassiti non ho fatto in proposito alcuna ricerca od osservazione. Ma posso però dire che, fino al momento in cui lo uccisi, esso stava bene o per lo meno non dava segno manifesto di malessere, il che certamente mi avrebbe colpito.

Perciò, senza volere asserire che la presenza del parassita fosse proprio senza effetto di sorta sulle funzioni fisiologiche del topo, possiamo però ritenere che il disturbo che gli recava non

era tale da perturbarle vivamente. Del resto è a tutti noto, che i surmolotti (*Mus decumanus*, Pall.), detti anche topi delle chiaviche, e per i luoghi che abitano, e specialmente poi per le svariate sostanze che divorano, quasi sempre sono affetti da molti e diversi parassiti così che è, direi quasi, impossibile trovare un solo individuo che non alberghi, o nei visceri, o nelle cellule del suo corpo, almeno un parassita. Ciò non ostante nella massima parte dei casi essi non dànno segni evidenti di malessere se non quando l'infezione parassitaria diventa veramente eccessiva.

Nel surmulotto in discorso, la presenza del parassita era localizzata quasi esclusivamente alla parte corticale del rene. Le sezioni esaminate comprendono un tratto di parte corticale ed un piccolo tratto di parte midollare, quindi ho potuto facilmente constatare questa limitazione. Invano ho cercato i parassiti nella zona midollare.

Ma nella stessa zona corticale non tutte le sorta di cellule contengono parassiti. Anche qui è facile scorgere una spiccata predilezione del parassita per talune di esse, il che è molto probabilmente in relazione con la natura speciale della cellula ospite da una parte e con le sostanze necessarie alla vita del parassita dall'altra.

Di fatto, nè nei nuclei delle cellule della capsula del Bowmann, nè in quelli delle cellule dei glomeruli di Malpighi, nè tanto meno in quelli delle cellule connettive dello stroma ho mai potuto rinvenire un solo parassita. Solamente i nuclei delle vere cellule epiteliali renali ne erano infetti ed in prevalenza senza dubbio, se non esclusivamente, quelli dei canalicoli contorti.

Naturalmente io non nego che con un esame assai più lungo e minuto sia forse possibile trovare infetta anche qualcuna delle altre cellule, e quindi la esclusione fatta non deve essere intesa in senso rigorosamente assoluto. Essa esprime semplicemente l'impressione che si ritrae da un'osservazione generale delle sezioni.

Il parassita è sempre chiuso dentro al nucleo, senza che questo presenti alcuna lesione o soluzione di continuità che possa essere interpretata come traccia della penetrazione avvenuta. Non ho mai trovato nel corpo cellulare, al di fuori del nucleo, un corpicciuolo qualsiasi che potesse essere ritenuto uguale al

parassita, quindi si può veramente dire che esso è, finora almeno, da considerasi come un vero parassita specifico del nucleo.

Il corpo del parassita è costituito di due parti: l'una interna che può essere considerata come il *nucleo*, l'altra esterna che rappresenta il protoplasma formando intorno al nucleo un alone, e che chiamerò perciò l'*alone protoplasmatico*.

La forma del suo corpo è alquanto variabile, da quella circolare a mo' quasi di disco, che si può ritenere prevalente e normale, quando il parassita è in riposo (fig. 1, 3, 5, 6, 12, 14. 16, 18) fino ad una forma alquanto irregolare ed allungata (fig. 2, 4, 8, 10, 11, 17) oppure semplicemente ovoidale od ellittica (fig. 7, 9, 13).

Io non ho visto il parassita vivente e quindi non posso asserire con sicurezza che avesse movimenti ameboidi, ma una simile supposizione mi pare fortemente avvalorata appunto da queste diverse forme presentate dal suo corpo. Non viene difatto spontanea quest'interpretazione: che le forme presentate dai parassiti nelle fig. 4, 8, 10, 11, 17 sieno deformazioni di una forma primitiva circolare dovute a formazione di lobi poco accentuati simili appunto a quelli che talune specie di amebe emettono nei loro caratteristici movimenti?

L'alone protoplasmatico, anche ai più forti ingrandimenti. mi si presentò sempre di una perfetta omogeneità, formato di una sostanza trasparente, uniforme, tinta leggermente in gialliccio. Non mi fu possibile assolutamente scorgere alcun accenno ad una struttura granulare.

Il nucleo occupa sempre la parte interna e generalmente centrale del corpo del parassita. Anch'esso è perfettamente omogeneo e tinto uniformemente in rosso intenso dalla fucsina fenica usata per la colorazione. La stessa tinta è pure presentata dai granuli di cromatina dei nuclei delle cellule, ed è precisamente basandomi sopra questa identità di comportamento nella colorazione che credo di poter ritenere la massa centrale del parassita, come un qualche cosa di analogo ad un vero nucleo.

Generalmente esiste un rapporto costante tra la grandezza del parassita e la grandezza del nucleo. Si osservino le fig. 4-18 e si potrà facilmente constatare questo rapporto costante. Quanto più il corpo del parassita è voluminoso, tanto più è proporzionalmente voluminoso anche il nucleo. Solo in rari casi, come

quelli rappresentati nelle fig. 1-3, il nucleo è assai piccolo rispetto al corpo del parassita discretamente grande.

Ma ciò che è ben più strano in questo nucleo si è che la sua forma è quasi costantemente modellata su quella dell'alone protoplasmatico, cosicchè ad ogni cambiamento di contorno di quest'ultimo corrisponde un analogo cambiamento nel contorno del nucleo. Si direbbe insomma che, sebbene l'alone protoplasmatico ed il nucleo sieno due masse, certamente distinte fra loro per natura chimica, formino tuttavia un tutto unico, non godendo di quella certa indipendenza morfologica che in generale si osserva tra il nucleo ed il protoplasma delle comuni cellule.

Come dissi, quasi sempre il nucleo è una massa omogenea dove non è possibile distinguere granuli di sorta; tuttavia qualche rara volta esso si presenta a forma di cerchio, qual'è rappresentata nella fig. 5. Mi è parso però che tale aspetto fosse dovuto a questo fatto: che la parte centrale sia stata decolorata, rimanendo localizzata la tinta alla regione periferica (1).

---

(1) Qui mi si potrebbe obbiettare che l'omogeneità del nucleo è forse apparente e dovuta unicamente all'imperfezione della colorazione. Ciò potrebbe anche essere, ma faccio notare che il metodo di colorazione da me usato è di una elettività straordinaria per la cromatina, così che dubito molto che, se il nucleo avesse realmente una struttura granulare come quella dei comuni nuclei, questa non mi si sarebbe svelata.

Il metodo usato per la preparazione di questi pezzi di rene è il seguente:

Fissazione per 3 ore nel liquido di *Hermann*.

Lavatura all'acqua per un'ora e mezzo.

Indurimento agli alcools e inclusione in paraffina come al solito.

Colorazione delle sezioni per 5′ con fucsina fenica (*a*).

Decolorazione per 5′ con soluzione satura in alcool assoluto di *Goldorange*.

Lavatura con alcool assoluto.

Passaggio all'olio di garofani e chiusura con balsamo del Canadà.

(*a*) La soluzione di fucsina fenica è una modificazione di quella di Ziehl e si prepara nel seguente modo:

Soluzione satura in alcool assoluto di fucsina cmc. 10
Soluzione acido fenico 5 % „ 490

Si ottiene così un mezzo litro di sostanza colorante molto diluita che si filtra due o tre volte fino a perfetta limpidezza che si conserva indefinitamente e migliora col tempo e che è di una potenza colorante straordinaria.

Anche le dimensioni del parassita sono molto variabili. Esse vanno da 2 μ fino a 9 μ; questi ultimi si possono dire veri giganti rispetto agli altri. Più comuni sono quelli di dimensioni comprese fra questi due estremi limiti. Del resto uno sguardo alla figura della tavola unita a questo lavoro, dove le figure sono tutte eseguite alla stessa scala, con ingrandimento di 2000 diametri, darà, meglio che una lunga descrizione, una esatta idea delle dimensioni della forma e della struttura di questo curioso parassita.

Quanto al numero dei parassiti contenuti in ogni nucleo anch'esso varia notevolmente. Frequenti sono i nuclei in cui il parassita è uno solo (fig. 1-8; 10-13; 16-17); frequenti pure quegli altri in cui i parassiti sono due o tre (fig. 9 e 15); non rari i casi in cui quattro, cinque e persino sei individui siano rinchiusi in uno stesso nucleo (fig. 14 e 18).

Ciò non ostante, esclusi quei nuclei in cui vi è un solo parassita ma eccessivamente voluminoso, oppure più parassiti vi stanno rinchiusi, tutti gli altri nuclei infetti non mostrano segni evidenti di degenerazione o anche di semplice alterazione. Come si può vedere dalle stesse figure 1-7, 10, 12, 13, i nuclei hanno le dimensioni e la struttura normale: ma quegli altri (fig. 8, 9, 11, 14, 16-18), che contengono un solo parassita gigante o più parassiti, sono divenuti più grandi, vescicolosi (fig. 9, 11, 16, 17) ed il reticolo cromatinico mostra segni evidenti di una incipiente alterazione.

Come avviene la riproduzione di questo semplice organismo? È quanto precisamente ho tentato di riconoscere senza essere tuttavia riuscito nell'intento.

Non ho mai trovato un solo caso di vera sporulazione, come mi sarei aspettato per una certa analogia che esso ha coi parassiti intracellulari, e sono propenso a ritenere che la riproduzione avvenga per una semplicissima scissione. Ho notato di fatto in parecchi individui un evidente strozzamento del nucleo accompagnato da un corrispondente strozzamento dell'alone protoplasmatico (fig. 7, 13, 15). Non oserei però asserire recisamente che queste forme debbano ritenersi in istato di scissione.

Rimane ora a vedere in quale gruppo dei protozoi debba essere classificato questo parassita: ma l'imperfetta conoscenza del suo ciclo vitale e del suo vero modo di riproduzione ci mette

pur troppo nell'impossibilità di giudicare giustamente della sua posizione sistematica.

Certamente esso non ha nulla di comune nè col *Karyophagus Salamandrae* descritto da STEINHAUS (1), nè col *Micrococcidium caryolyticum* descritto da DRÜNER (2), nè con nessun altro coccidio, da me conosciuto, parassita intracellulare. Neppure mi pare che abbia veramente una qualche somiglianza con *Nucleophaga* del DANGEARD.

Creando quindi per questo parassita il nuovo genere *Karyamoeba* propongo di distinguerlo per ora colla denominazione di *Karyamoeba renis* n. sp.

Ricerche e studi ulteriori potranno poi dire se questo nome possa essere con ragione conservato.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tutte le figure sono disegnate alla stessa scala; ingrand. 2000. Obiettivo apochr. Zeiss. 1,5 mm., apert. 1,30, ocul. 4. Tubo evaginato 165 mm. Camera lucida Abbe (nuovo modello).

Fig. 1-18. Nuclei delle cellule epiteliali renali di Surmulotto (*Mus decumanus* Pall.) contenenti uno o più individui di *Karyamoeba renis*.

---

(1) STEINHAUS J., *Karyophagus Salamandrae. Eine in den Darmepithelzellkernen parasitisch lebende Coccidie*, in " Virchow's Arch. f. pathol. Anat. ", Bd. 115, 1889, pp. 176-185, taf. V.

(2) DRÜNER L., *Beiträge zur Kenntniss der Kern-und Zellendegeneration und ihrer Ursache*, in " Jenaische Zeitschr. f. Naturwiss. ", Bd. 28, 1894, pp. 294-327, taf. XX-XXI.

Sur un théorème de M. Volterra sur l'inversion des intégrales définies.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Volterra par ERIK HOLMGREN).

Dans Votre mémoire: *Sulla inversione degli integrali definiti*, nota IV, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. 31 (1896), Vous avez démontré le résultat suivant:

Considérons l'équation fonctionnelle

$$\text{(A)} \qquad f(y) = \int_0^y \varphi(x) \mathrm{H}(x,y)\, dx, \quad 0 < y < a,$$

où

$$f(y) = y^{n+1} f_1(y),$$

$$\mathrm{H}(x,y) = \sum_0^n {}_i a_i x^i y^{n-i} + \mathrm{H}'(x,y),$$

$$\mathrm{H}'(x,y) = \sum_0^{n+1} {}_i x^i y^{(n+1)-i} \mathrm{L}_i(x,y),$$

les a_i étant des constantes.

Si les fonctions $f_1(y)$ et $\mathrm{L}_i(x,y)$ et leurs dérivées premières par rapport à y sont finies et continues, quand y est situé entre 0 et a, et si $\mathrm{H}(y,y)$ ne s'annulle dans cet intervalle qu'au point $y=0$, il existe une et une seule fonction φ finie et continue, qui satisfait, à (A), quand toutes les racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de l'équation du degré n

$$\text{(B)} \qquad \frac{a_0}{\lambda-1} + \frac{a_1}{\lambda-2} + \ldots + \frac{a_n}{\lambda-n-1} = 0$$

sont finies et distinctes et ont leurs parties réelles positives.

Si l'une ou plusieurs des racines de cette équation ont

leurs parties réelles négatives, et s'il existe une solution de (A), il en existe une infinité.

Permettez-moi de Vous présenter quelques remarques se rattachant au dernier point de ce théorème.

Tout d'abord je fais observer que par une application immédiate de Votre méthode p. 431-437 on peut démontrer le théorème suivant:

L'équation fonctionnelle:

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x) \mathrm{H}(x, y)\, dx$$

a les mêmes solutions continues que l'équation

$$\psi(z) = \int_0^z \varphi(y) \mathrm{G}(y, z)\, dy,$$

où

$$\psi(z) = \sum_1^r {}_s \overline{\mathrm{K}}_s z^{-\lambda_s + n - r + 1} \int_0^z y^{\lambda_s - n - 1} f'(y)\, dy,$$

$$\mathrm{G}(y, z) = \sum_0^{n-r} {}_i \mathrm{A}_i y^i z^{(n-r)-i} + \mathrm{G}'(y, z),$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *étant les racines de l'équation* (B) *qui ont leurs parties réelles positives,*

$$\overline{\mathrm{K}}_s = \frac{(\lambda_s - n)(\lambda_s - n + 1) \ldots (\lambda_s - n + r - 2)}{(\lambda_s - \lambda_1)(\lambda_s - \lambda_2) \ldots (\lambda_s - \lambda_r)},$$

$$\mathrm{A}_i = (n - i)\, a_i \sum_1^r {}_s \frac{\overline{\mathrm{K}}_s}{\lambda_s - i - 1},$$

$$\mathrm{G}'(y, z) = \frac{\mathrm{H}'(y, z)}{z^r} - \sum_1^r {}_s \overline{\mathrm{K}}_s (\lambda_s - n - 1) z^{-\lambda_s + n - r + 1} \int_y^z x^{\lambda_s - n - 2} \mathrm{H}'(y, x)\, dx.$$

L'équation algébrique

$$\frac{\mathrm{A}_0}{\mu - 1} + \frac{\mathrm{A}_1}{\mu - 2} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_{n-r}}{\mu - (n - r) + 1} = 0$$

a les racines $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n$, *c.à.d. les racines de* (B) *qui ont leurs parties réelles négatives* (*).

Nous pouvons donc, dans ce qui va suivre, supposer que dans l'équation (B) qui correspond à (A) toutes les racines ont leurs parties réelles négatives. La fonction $H'(x,y)$ obtenue par la réduction du théorème, n'a pas la forme de l'énoncé de la page 3. Mais pour le suivant, il suffit qu'il soit continue ainsi que $\frac{\partial H'(x,y)}{\partial y}$ quand $0 \leq y < a$, et qu'il satisfasse aux conditions

$$H'(x,y) = y^{n+1}\overline{H}'(x,y), \quad \frac{\partial H'(x,y)}{\partial y} = y^n \overline{H}''(x,y),$$

où $\overline{H}'(x,y)$ et $\overline{H}''(x,y)$ sont continues, quand $y \geq x$, conditions auxquelles satisfait la fonction $H'(x,y)$, si elle est obtenue par la réduction du théorème.

Supposons qu'il existe une solution continue φ de (A). Nous verrons donc, en procédant d'une manière analogue à la Vôtre, que φ satisfait à l'équation (**)

(*) L'énoncé sur les racines de l'équation algébrique peut s'établir de la manière suivante. Le membre gauche de cette équation peut s'écrire

$$\sum_1^r {}_s \overline{K}_s \left\{ (n-\mu+1) \sum_0^{n-r} {}_i \frac{a_i}{(\mu-i-1)(\lambda_s-i-1)} + \sum_0^{n-r} {}_i \frac{a_i}{\lambda_s - i - 1} \right\}.$$

Si μ est une des racines de l'équation (B), qui n'est pas λ_s, nous aurons

$$\sum_0^{n-r} {}_i \frac{a_i}{(\mu-i-1)(\lambda_s-i-1)} = - \sum_{n-r+1}^{n} {}_i \frac{a_i}{(\mu-i-1)(\lambda_s-i-1)},$$

et par suite, si μ est une des racines $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n$, nous pourrons donner à notre membre gauche la forme

$$-(n-\mu-1) \sum_{n-r+1}^{n} {}_i \frac{a_i}{\mu-i-1} \sum_1^r {}_s \frac{\overline{K}_s}{\lambda_s-i-1} - \sum_{n-r+1}^{n} {}_i \sum_1^r {}_s \frac{\overline{K}_s}{\lambda_s-i-1},$$

qui se réduit à zéro, parce que $\sum_1^r {}_s \frac{\overline{K}_s}{\lambda_s - q} = 0 \; (q = n-r+2, \ldots, n)$.

(**) Les désignations sont les mêmes que dans Votre mémoire.

$$\sum_1^n {}_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} y^{\lambda_s-n-1} f'(y)\, dy = \int_{z_0}^{z} \varphi(y) \Big\{ \sum_0^n {}_i a_i + \frac{H'(y,z)}{z^n} -$$

$$- \sum_1^n {}_s K'_s z^{-\lambda_s+1} \int_y^z x^{\lambda_s-n-2} H'(y,x)\, dx \Big\} dy +$$

$$+ \sum_1^n {}_s z^{-\lambda_s+1} \int_0^{z_0} \varphi(y) \Big\{ \int_{z_0}^{z} x^{\lambda_s-n-1} H_2(y,x)\, dx \Big\} dy,$$

où nous supposons que $z \leq z_0 < a$.

Mais

$$\int_0^{z_0} \varphi(y) \Big\{ \int_{z_0}^{z} x^{\lambda_s-n-1} H_2(y,x)\, dx \Big\} dy =$$

$$= \int_0^{z_0} \varphi(y) \Big\{ \sum_0^n {}_i (n-i) a_i y^i \left(\frac{z^{\lambda_s-i-1}}{\lambda_s-i-1} - \frac{z_0^{\lambda_s-i-1}}{\lambda_s-i-1} \right) + \int_{z_0}^{z} x^{\lambda_s-n-1} \frac{\partial H'(y,x)}{\partial x} dx \Big\} dy,$$

et par suite, en appliquant les formules (5) p. 433 de Votre mémoire,

$$\sum_1^n {}_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_0^{z_0} \varphi(y) \Big\{ \int_{z_0}^{z} x^{\lambda_s-n-1} H_2(y,x)\, dx \Big\} dy = \int_0^{z_0} \sum_0^n {}_i a_i \varphi(y)\, dy -$$

$$- \sum_1^n {}_s K_s \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-\lambda_s+1} \int_0^{z_0} \varphi(y) \sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1} a_i \left(\frac{y}{z_0} \right)^i dy +$$

$$+ \int_0^{z_0} \varphi(y) \Big\{ \sum_1^n {}_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} x^{\lambda_s-n-1} \frac{\partial H'(y,x)}{\partial x} dx \Big\} dy.$$

La fonction φ satisfait donc à l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \sum_1^n {}_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} y^{\lambda_s-n-1} f'(y)\, dy = \int_{z_0}^{z} \varphi(y) \Big\{ \sum_0^n {}_i a_i + \frac{H'(y,z)}{z^n} -$$

$$- \sum_1^n {}_s K'_s z^{-\lambda_s+1} \int_y^z x^{\lambda_s-n-2} H'(y,x)\, dx \Big\} dy + \int_0^{z_0} \sum_0^n {}_i a_i \varphi(y)\, dy -$$

$$- \sum_1^n {}_s K_s \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-\lambda_s+1} \int_0^{z_0} \varphi(y) \sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1} a_i \left(\frac{y}{z_0} \right)^i dy +$$

$$+ \int_0^{z_0} \varphi(y) \Big\{ \sum_1^n K_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} x^{\lambda_s-n-1} \frac{\partial H'(y,x)}{\partial x} dx \Big\} dy.$$

Envisageons maintenant l'équation fonctionnelle

$$
\text{(C)} \quad \sum_{1}^{n}{}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} y^{\lambda_s-n-1} f'(y)\,dy = \int_{z_0}^{z} \varphi(y) \Big\{ \sum_{0}^{n}{}_i a_i + \frac{\mathrm{H}'(y,z)}{z^n} -
$$

$$
- \sum_{1}^{n}{}_s \mathrm{K}'_s z^{-\lambda_s+1} \int_{y}^{z} x^{\lambda_s-n-2}\, \mathrm{H}'(y,x)\,dx \Big\}\, dy + \int_{0}^{z_0} \varphi(y) \Big\{ \sum_{0}^{n}{}_i a_i +
$$

$$
+ \sum_{1}^{n}{}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} x^{\lambda_s-n-1} \frac{\partial \mathrm{H}'(y,x)}{\partial x}\,dx \Big\}\, dy + \sum_{1}^{n}{}_s \alpha_s z^{-\lambda_s+1},
$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes arbitraires.

Elle peut facilement s'écrire sous la forme

$$
\text{(C')} \quad \sum_{1}^{n}{}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} y^{\lambda_s-n-1} f'(y)\,dy = \int_{0}^{z} \varphi(y) \Big\{ \sum_{0}^{n}{}_i a_i +
$$

$$
+ \sum_{1}^{n}{}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} x^{\lambda_s-n-1} \frac{\partial \mathrm{H}'(y,x)}{\partial x}\,dx \Big\}\, dy +
$$

$$
+ \int_{z_0}^{z} \varphi(y) \Big\{ \sum_{1}^{n}{}_s \mathrm{K}_s \left(\frac{z}{y}\right)^{-\lambda_s+1} \frac{\mathrm{H}'(y,y)}{y^n} +
$$

$$
+ \sum_{1}^{n}{}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_{y}^{z_0} x^{\lambda_s-n-1} \frac{\partial \mathrm{H}'(y,x)}{\partial x}\,dx \Big\}\, dy + \sum_{1}^{n}{}_s \alpha_s z^{-\lambda_s+1}.
$$

Nous allons établir que les équations (1) et (C') ont les mêmes solutions continues. On voit immédiatement que chacune solution de l'équation (1) est aussi une solution de (C') (pour un système déterminé des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$). Pour démontrer la proposition inverse, supposons que φ soit une solution continue de (C'). Différentions (C') par rapport à z; multiplions les deux membres de l'équation ainsi obtenue par z^i et intégrons entre les limites 0 et z_0, et nous aurons par l'application de quelques intégrations par parties

$$
- i \int_{0}^{z_0} z^{i-1} \Big\{ \sum_{1}^{n}{}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} y^{\lambda_s-n-1} f'(y)\,dy \Big\}\, dz = \int_{0}^{z_0} \sum_{0}^{n}{}_i a_i z^i \varphi(z)\,dz -
$$

$$
- i \int_{0}^{z_0} z^{i-1} \Big\{ \int_{0}^{z} \varphi(y) \Big(\sum_{1}^{n}{}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} x^{\lambda_s-n-1} \frac{\partial \mathrm{H}'(y,x)}{\partial x}\,dx \Big)\, dy \Big\}\, dz -
$$

$$-i\int_0^{z_0} z^{i-1}\left\{\int_{z_0}^{z}\varphi(y)\left(\sum_1^n {}_s K_s\left(\frac{z}{y}\right)^{-\lambda_s+1}\frac{H'(y,y)}{y^n}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_1^n {}_s K_s z^{-\lambda_s+1}\int_y^{z_0} x^{\lambda_s-n-1}\frac{\partial H'(y,x)}{\partial x}dx\right)dy\right\}dz+\sum_1^n {}_s \alpha_s(\lambda_s-1)\frac{z_0^{-\lambda_s+i+1}}{\lambda_s-i-1}$$

$$(i=1,2,\ldots,(n-1)).$$

Le membre gauche de cette égalité et la troisième intégrale du membre droit sont égaux à zéro, la deuxième et la quatrième intégrale sont égales et de signes contraires. Cela résulte de la formule de Dirichlet et des formules (5) p. 433 de Votre mémoire. Donc nous aurons

$$(2)\qquad -\sum_0^n {}_j a_j\int_0^{z_0}\left(\frac{x}{z_0}\right)^i\varphi(x)dx=\sum_1^n {}_s \alpha_s(\lambda_s-1)\frac{z_0^{-\lambda_s+1}}{\lambda_s-i-1}$$

$$(i=0,1,2,\ldots,(n-1)).$$

De ce système nous tirons

$$-\sum_0^n {}_j a_j K_l z_0^{\lambda_l-1}\int_0^{z_0}\varphi(x)\sum_0^n {}_i\frac{(n-i)a_i}{\lambda_l-i-1}\left(\frac{x}{z_0}\right)^i dx=$$

$$=K_l\sum_1^n {}_s \alpha_s(\lambda_s-1)z_0^{\lambda_l-\lambda_s}\sum_0^n {}_i\frac{(n-i)a_i}{(\lambda_s-i-1)(\lambda_l-i-1)},$$

où parce que

$$\sum_0^n {}_i\frac{(n-i)a_i}{(\lambda_s-i-1)(\lambda_l-i-1)}=-(\lambda_s-n-1)\sum_0^n {}_i\frac{a_i}{(\lambda_s-i-1)(\lambda_l-i-1)}=0,$$

quand $s\neq l$

$$=\sum_0^n {}_i a_i\frac{(\lambda_l-\lambda_1)(\lambda_l-\lambda_2)\ldots(\lambda_l-\lambda_n)}{(\lambda_l-1)(\lambda_l-2)\ldots(\lambda_l-n)},$$

quand $s=l$,

$$\alpha_l=-K_l z_0^{\lambda_l-1}\int_0^{z_0}\varphi(x)\sum_0^n {}_i\frac{(n-i)a_i}{\lambda_l-i-1}\left(\frac{x}{z_0}\right)^i dx.$$

La comparaison des deux formules (1) et (C′) fait voir que φ satisfait à (1).

La question de déterminer les solutions continues de (A) est donc identique à la même question pour l'équation (C′), car

les équations (1) et (A) ont les mêmes solutions (cela résulte d'une démonstration analogue à celle des p. 435-437 de Votre mémoire).

Nous avons donc démontré le théorème suivant:

L'équation fonctionnelle

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, H(x,y)\, dx, \quad 0 < y < a,$$

dont l'équation algébrique correspondante (B) *a toutes les racines fournies des parties réelles négatives, et l'équation*

$$(C') \quad F(z) = \int_0^z \varphi(y)\, G_1(y,z,z_0)\, dy + \int_{z_0}^z \varphi(y)\, G_2(y,z,z_0)\, dy, \quad 0<z<z_0,$$

où

$$F(z) = \sum_1^n{}_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^z f'(y)\, y^{\lambda_s-n-1}\, dy - \sum_{s=1}^n \alpha_s z^{-\lambda_s+1},$$

$$G_1(y,z,z_0) = \sum_0^n{}_i a_i + \sum_1^n{}_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^z x^{\lambda_s-n-1} \frac{\partial H'(y,x)}{\partial x}\, dx,$$

$$G_2(y,z,z_0) = \sum_1^n{}_s K_s \left(\frac{z}{y}\right)^{-\lambda_s+1} \frac{H'(y,y)}{y^n} + \sum_1^n{}_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_y^{z_0} x^{\lambda_s-n-1} \frac{\partial H'(y,x)}{\partial x}\, dx,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *étant des paramètres arbitraires et* $G_1(y,z,z_0)$, $G_2(y,z,z_0)$, $\frac{\partial G_1(y,z,z_0)}{\partial z}$, $\frac{\partial G_2(y,z,z_0)}{\partial z}$ *des fonctions continues, quand* $0 \leq y \leq z$, *ont les mêmes solutions.*

Étudions donc l'équation (C').

En différentiant (C') nous trouvons une équation qui a les mêmes solutions que (C'). Elle est de la forme

$$(3) \quad \varphi(z) = \frac{F'(z)}{h(z)} z^n - \int_0^z \frac{\frac{\partial G_1(y,z,z_0)}{\partial z}}{h(z)} z^n \varphi(y)\, dy - \int_{z_0}^z \frac{\frac{\partial G_2(y,z,z_0)}{\partial z}}{h(z)} z^n \varphi(y)\, dy.$$

Cette équation a une seule solution continue. L'existence de cette solution se démontre par une application de la méthode

des approximations successives (*). Les approximations successives convergent, quand $0 \leq z \leq z_0$, z_0 étant si petit que

$$\int_0^{z} \left| \frac{\frac{\partial G_1(y,z,z_0)}{\partial z}}{h(z)} z^n \right| dy + \int_z^{z_0} \left| \frac{\frac{\partial G_2(y,z,z_0)}{\partial z}}{h(z)} z^n \right| dy < \Delta < 1.$$

Nous verrons immédiatement qu'il n'existe que cette intégrale. Car supposons qu'il en existe une autre $\varphi_1(z)$, nous aurons donc

$$\varphi(z) - \varphi_1(z) = -\int_0^{z} \frac{\frac{\partial G_1}{\partial z}}{h(z)} z^n (\varphi(y) - \varphi_1(y))\, dy -$$
$$-\int_{z_0}^{z} \frac{\frac{\partial G_2}{\partial z}}{h(z)} z^n (\varphi(y) - \varphi_1(y))\, dy.$$

Désignons par μ le maximum de $|\varphi(z) - \varphi_1(z)|$, quand $0 \leq z \leq z_0$.

La formule précédente entraîne la contradiction $\mu < \Delta\mu$. Nous aurons donc $\varphi_1(z) = \varphi(z)$.

Nous pouvons maintenant donner la forme de la solution générale de (A).

Posons que dans (C') $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. La solution réelle (**) $\Phi(z)$ de l'équation ainsi obtenue est une solution de (A). Supposons que dans (C') $f(y) = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{s-1} = \alpha_{s+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ et $\alpha_s = 1$. La solution correspondante $\Phi_s(z)$ est une solution de l'équation

$$\text{(D)} \qquad \int_0^y \varphi(x) \mathrm{H}(x,y)\, dx = 0.$$

Les fonctions $\Phi_s(z)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ sont linéairement indépendantes. Car la supposition

$$C_1\Phi_1(z) + C_2\Phi_2(z) + \ldots + C_n\Phi_n(z) = 0$$

entraîne

$$C_1 \int_0^{z_0} x^i \Phi_1(x) dx + C_2 \int_0^{z_0} x^i \Phi_2(x) dx + \ldots + C_n \int_0^{z_0} x^i \Phi_n(x)\, dx = 0$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)).$$

(*) Cf. Le Roux, " Annales de l'École normale ", 1895.

(**) Les fonctions $F(z)$, $G_1(y,z,z_0)$, $G_2(y,z,z_0)$ sont des fonctions réelles.

Mais en appliquant la formule (2) et le fait que

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - 1}, & \frac{1}{\lambda_2 - 1}, & \dots & \frac{1}{\lambda_n - 1} \\ \frac{1}{\lambda_1 - 2}, & \frac{1}{\lambda_2 - 2}, & \dots & \frac{1}{\lambda_n - 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\lambda_1 - n}, & \frac{1}{\lambda_2 - n}, & \dots & \frac{1}{\lambda_n - n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

on trouve que le déterminant du système est différent de zéro, c.à.d. que la relation supposée est impossible. On voit aussi que la solution générale de (D) est une fonction linéaire et homogène de $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, ..., $\Phi_n(z)$. Comme les fonctions Φ, correspondantes à deux racines conjuguées de (B), sont elles-mêmes conjuguées, nous trouvons que la solution générale de (D) est de la forme

$$C_1\overline{\Phi}_1(z) + C_2\overline{\Phi}_2(z) + \dots + C_n\overline{\Phi}_n(z),$$

les fonctions $\overline{\Phi}$ étant réelles et linéairement indépendantes.

En retournant au cas général et combinant ces résultats avec le premier théorème (*), nous trouvons:

L'équation fonctionnelle

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x)\,H(x,y)\,dx,$$

dont l'équation correspondante

$$\frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \dots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0$$

a r racines, dont les parties réelles sont positives (les autres ont leurs parties réelles négatives) a la solution générale de la forme

$$\Phi(z) + C_1\Phi_1(z) + C_2\Phi_2(z) + \dots + C_r\Phi_r(z)$$

les Φ étant des fonctions réelles connues.

(*) Les fonctions $\psi(z)$ et $G(y,z)$ qui figurent dans ce théorème sont des fonctions réelles.

Il est facile de voir que Votre résultat que (D) a une solution de la forme $y^{-\lambda}\theta(y)$, où $\theta(y)$ est la solution de l'équation

$$1 = \frac{h(y)}{y^n}\,\theta(y) + \int_0^y \theta(x)\,\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\lambda} dx,$$

$$Q(x,y) = \sum_0^n{}_i a_i + \frac{H'(x,y)}{y^n} - \sum_1^n{}_s K'_s y^{\lambda_s+1}\int_x^y H'(x,\xi)\,\xi^{\lambda_s-n-2}\,d\xi$$

et λ est une des racines de (B) dont la partie réelle est la plus petite, peut se déduire comme une conséquence immédiate de nos théorèmes.

A la fin, je veux faire une remarque sur la question de l'inversion dans le cas où

$$H(x,y) = a_0 y + a_1 x + H'(x,y),$$

mais $a_0 + a_1 = 0$, cas que Vous avez mentionné dans Votre nota III des " Atti di Torino " (*).

Supposons

$$H'(x,y) = \alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 + H''(x,y), \quad \alpha + \beta + \gamma \neq 0,$$

où

$$H''(x,y) = \sum_0^2{}_i x_i y^{2-i} L_i(x,y),$$

les $L_i(x,y)$ étant continues ainsi que les dérivéés premières par rapport à y (et bien entendu $f(y) = y^3 f_1(y)$).

J'ai trouvé que, si $\frac{a_0}{\alpha+\beta+\gamma} > 0$, il n'existe qu'une seule intégrale, mais que, si $\frac{a_0}{\alpha+\beta+\gamma} < 0$, il en existe une infinité (dépendante d'une constante arbitraire).

Supposé que $\frac{a_0}{\alpha+\beta+\gamma} > 0$, on démontre facilement que (A) a les mêmes solutions que l'équation

$$\psi(y) = \int_0^z \varphi(y)\,G(y,z)\,dy, \tag{3}$$

$$\psi(y) = z^{-\nu-2} e^{\frac{\mu}{z}} \int_0^z y^\nu e^{-\frac{\mu}{y}} f'(y)\,dy$$

(*) *Sulla inversione degli integrali definiti*, nota III, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", t. 31 (1896).

$$G(y,z)=(\alpha+\beta+\gamma)-\beta z^{-\nu-2}e^{\frac{\mu}{z}}\int_y^z (x-y)x^\nu e^{-\frac{\mu}{x}}dx+$$

$$+z^{-\nu-2}e^{\frac{\mu}{z}}y^\nu e^{-\frac{\mu}{y}}H''(y,y)+z^{-\nu-2}e^{\frac{\mu}{z}}\int_y^z H''_2(y,x)x^\nu e^{-\frac{\mu}{x}}dx,$$

où $\mu=\frac{a_0}{\alpha+\beta+\gamma}$, $\nu=\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}-2$ et $G(y,z)$ est continue, quand $y\leq z$, $\frac{\partial G(y,z)}{\partial z}$, quand $0\leq y\leq z$, et $\int_0^z \frac{\partial G(y,z)}{\partial z}dz$ tend vers zéro, z tendant vers zéro. De la même manière que dans le cas général, on démontre que l'équation (3) a une seule solution.

On peut traiter le cas où $\frac{a_0}{\alpha+\beta+\gamma}<0$, d'une manière tout analogue en se servant de l'idée employée dans le cas général (*).

(*) Nous faisons observer qu'on a besoin, dans les calcus des formules

$$\lim_{y=+0} y^{-\nu}e^{\frac{\mu}{y}}\int_0^y y^{\nu-2}e^{-\frac{\mu}{y}}dy=\frac{1}{\mu}, \text{ si } \mu>0,$$

$$\lim_{y=+0} y^{-\nu}e^{\frac{\mu}{y}}\int_{y_0}^y y^{\nu-2}e^{-\frac{\mu}{y}}dy=\frac{1}{\mu}, \text{ quand } \mu<0.$$

Ricerche sperimentali sul coefficiente magnetometrico.

Nota di CIRO CHISTONI.

In altra occasione ho esposto un metodo di calcolo abbreviato per ottenere da una serie di osservazioni il valore del *coefficiente magnetometrico* (*), metodo, che come avvertii, si approssima assai a quello che è da parecchio tempo in uso nell'Osservatorio di Greenwich.

Ricorderò che se si fanno misure di deviazione col magnetometro unifilare dei seni (munito di asta metrica, disposta in senso perpendicolare al meridiano magnetico), collocando il magnete deviatore a due distanze R_1 ed R_2 dal magnetino sospeso e si ottengono le deviazioni φ_1 e φ_2, mentre la temperatura dell'asta metrica e del magnete deviatore è rispettivamente τ_1 e τ_2; e se si pone

$$\frac{2(1-a\tau_1)(1-h\,\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,\varphi_1)}{\mathrm{R}^3_1(1+3\beta\tau_1)\,\mathrm{sen}\,\varphi_1}=\mathrm{A}_1\,,\qquad \frac{2(1-a\tau_2)(1-h\,\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)}{\mathrm{R}^3_2(1+3\beta\tau_2)\,\mathrm{sen}\,\varphi_2}=\mathrm{A}_2$$

nelle quali a è il coefficiente termico del magnete deviatore; h il suo coefficiente di induzione; H il valore della componente orizzontale della forza magnetica terrestre e β il coefficiente di dilatazione lineare dell'asta metrica, si ottiene il valore p del *coefficiente magnetometrico* mediante la

$$p=\frac{\left(\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2}-1\right)\mathrm{R}^2_1(1+2\beta\tau_1)}{\frac{\mathrm{R}^2_1(1+\beta\tau_1)}{\mathrm{R}^2_2(1+\beta\tau_3)}-\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2}} \qquad (1)$$

Debbo anche ricordare che nella formola esprimente il rapporto fra la componente orizzontale del magnetismo terrestre e

(*) *Sul calcolo del coefficiente magnetometrico, ecc.*, " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XXIV (27 gennaio 1889).

il momento magnetico della sbarra deviatrice, dei *fattori di Lamont*, basta tenere conto soltanto del primo (che è poi il *coefficiente magnetometrico*) quando il magnetino sospeso ha una lunghezza uguale a 0,47 circa di quella del magnete deviatore.

Dalla (1), che è formola esatta, ho mostrato come si possa dedurre l'espressione approssimata

$$\log p = \log Costante + \log \{(\log \text{sen}\varphi_1 - \log \text{sen}\varphi_2) + \log costante\} \quad (2)$$

nella quale

$$Costante = -\frac{R^2_1}{\left(\frac{R^2_1}{R^2} - 1\right)\log e}$$

$$\log costante = (\log 1 + a(\tau_1 - \tau_2)) +$$

$$+ \log(1 + h\mathrm{H}(\text{sen}\,\varphi_1 - \text{sen}\,\varphi_2)) + \log\frac{R^3_1}{R^3_2}$$

ed aggiungeva che volendo schivare di calcolare il log *costante* per ogni singola esperienza si poteva in quest'ultima espressione introdurre la media dei valori di $(\tau_1 - \tau_2)$ e di $(\text{sen}\,\varphi_1 - \text{sen}\,\varphi_2)$ ottenuti in una intera serie di osservazioni e calcolare così una sola volta il log *costante*.

A questo modo di procedere per ottenere il *coefficiente magnetometrico*, il Prof. Luigi Palazzo (*) fece, con forma corretta, ed in modo affatto obiettivo e ragionato delle critiche, concludendo che per avere la voluta precisione in p, quando non si voglia fare uso della (1) occorre calcolarlo colla formola, pure approssimata, ma sempre più prossima al vero

$$p = -\frac{R^2_1(1+2\beta\tau_1)(\log A_2 - \log A_1)}{(\log A_2 - \log A_1) + \left(\frac{R^2_1}{R^2_2} - 1\right)\log e} \quad (3)$$

che si deduce facilmente dalla (1), quando si scriva

$$\frac{A_1}{A_2} = 1 + \log_{nat}\frac{A_1}{A_2} + \frac{1}{1.2}\log^2_{nat}\frac{A_1}{A_2} + \frac{1}{1.2.3}\log^3_{nat}\frac{A_1}{A_2} + \ldots$$

(*) ***Misure assolute degli Elementi del magnetismo terrestre eseguite in Italia negli anni 1888 e 1889*** (" Annali dell'Ufficio centrale meteorologico e geodinamico italiano "; serie II, vol. XVI, parte I, pag. 57).

e si ritenga

$$\cdot\, 2\,\frac{R^2_1}{R^2_2}\,\beta(\tau_1 - \tau_2) = 0$$

come ho dimostrato nel precitato mio lavoro.

La critica del Palazzo mi invogliò a verificare sperimentalmente il limite di precisione che si può ottenere in p, calcolandolo colla (2) in confronto di quello che si ottiene facendo il calcolo direttamente colla (1).

Nell'autunno del 1897 avendo avuto occasione di passare un paio di mesi a Corleto presso Modena ed avendo avuto modo di stabilire una tenda in libera campagna (*), ho creduto opportuno di fare, fra le altre, alcune serie di esperienze non solo per lo scopo suddetto, ma anche per verificare, se il coefficiente p per lo stesso apparecchio e cogli stessi magneti, non variasse praticamente al variare delle distanze R_1 ed R_2 ed in conseguenza al variare dei valori di φ. Uno studio di tal genere, per quanto sappia, non venne mai intrapreso da alcuno.

Per le esperienze mi servì il magnetometro che ho altra volta descritto (**). In quella descrizione è detto come si ponga il magnete deviatore sull'asta metrica.

L'asta metrica è di ottone privo di sostanze magnetiche, ha forma di parallelepipedo retto a base rettangola, della quale le dimensioni sono $2 \times 0{,}6$ centimetri; è lunga un metro ed è stata diligentemente lavorata dal meccanico Giacomozzi dell'Istituto fisico della R. Università di Modena.

Porta le divisioni sopra una sola faccia, ha il tratto *zero* a metà della distanza fra i centri dei due fori che servono per applicare l'asta al magnetometro, e dall'una e dall'altra parte dello zero porta le due serie di divisioni:

23 cent. 30 cent. 39 cent.

26 cent. 34 cent. 44 cent.

(*) Si intende che tutti i sostegni della tenda eran privi di sostanze magnetiche.

(**) Chistoni, *Magnetometro unifilare dei seni* (" Mem. della R. Accad. di Modena ", serie II, vol. IX, pag. 125 ed " Annali dell'Ufficio centrale meteorologico e Geodinamico ", vol. XIV, parte I).

L'una serie è distinta dall'altra per la lunghezza dei tratti e per la collocazione dei numeri corrispondenti. Come si vede la distanza di un tratto dallo *zero* in ognuna delle due serie è uguale alla distanza del tratto precedente moltiplicata per 1,3 circa. È questa, come si sa, una delle migliori condizioni per potere collocare il magnete deviatore sul metro così che i valori delle deviazioni si prestino bene per il calcolo di p. Le divisioni sull'asta vennero tracciate da me stesso servendomi del bullino unito ad uno dei microscopii del comparatore Perreaux dell'Istituto fisico della R. Università di Modena e riferendomi ai tratti di un metro campione. Le due parti dell'asta metrica a partire dallo *zero* sono controsegnate colle due lettere D ed S.

Lo studio accurato dell'asta metrica è una delle condizioni principali per l'uso del magnetometro e tale studio l'ho eseguito servendomi del comparatore Perreaux e di un metro stato verificato dal R. Ufficio metrico centrale di Roma.

È noto che l'approssimazione richiesta nella conoscenza della distanza R fra il centro del magnete deviatore ed il centro del magnetino sospeso è data dalla relazione differenziale

$$dR = \pm \frac{2}{3} R \frac{dH}{H}$$

e che nelle misure assolute (che si fanno in libera campagna) della componente orizzontale H della forza magnetica terrestre non può pretendersi di avere in H precisione maggiore della

$$\frac{dH}{H} = \pm 0,0004$$

di modo che posto nell'espressione di dR, $R = 23$, si ricava che la massima precisione richiesta in R è di $\pm 0,06$ di millimetro. Di ogni tratto, tanto sulla faccia D che sulla faccia S dell'asta metrica ho misurato prima la distanza dallo *zero*; e poi ho misurato la distanza di un tratto della parte D dal tratto omonimo della parte S.

Evidentemente, se l'operazione è ben riuscita quest'ultima distanza deve corrispondere alla somma delle distanze dei due tratti dallo zero. Di ogni lunghezza si fecero almeno sei misure

ed i risultati finali (che sono ridotti alla temperatura di 0°) stanno riuniti nel seguente specchio:

Centimetri	Centimetri
0 — 23 S = 23,00032	0 — 23 D = 23,00053
0 — 26 S = 25,99750	0 — 26 D = 26,00165
0 — 30 S = 29,99984	0 — 30 D = 30,00098
0 — 34 S = 33,99907	0 — 34 D = 34,00134
0 — 39 S = 38,99910	0 — 39 D = 39,00100
0 — 44 S = 44,00149	0 — 44 D = 44,00185

	Somma dei due valori precedenti	Differenza in millimetri
23 S — 23 D = 46,00086	46,00085	0,0001
26 S — 26 D = 51,99967	51,99915	52
30 S — 30 D = 60,00043	60,00082	39
34 S — 34 D = 68,00004	68,00041	37
39 S — 39 D = 78,00014	78,00010	04
44 S — 44 D = 88,00353	88,00334	19

I risultati mostrano che la precisione richiesta è stata raggiunta completamente; e perciò si può ritenere che a 0° di temperatura i valori delle distanze dallo *zero* del nonio della forcella del magnete fisso del magnetometro, dall'asse di sospensione del magnete mobile, quando lo zero corrisponde ad uno dei tratti sopraccennati, siano:

alla	divisione	segnata	23 = 23,00043	centimetri
„	„	„	30 = 30,00031	„
„	„	„	39 = 39,00006	„
„	„	„	26 = 25,99970	„
„	„	„	34 = 34,00011	„
„	„	„	44 = 44,00172	„

Per l'argomento che ci occupa è poi interessante avere con tutta precisione il valore degli angoli di deviazione; e perciò devesi avere speciale riguardo alla influenza della eccentricità

del magnetino sospeso; alla influenza della torsione del filo di sospensione; ed a tutte quelle cause di errore che ho accennate in un'altra pubblicazione (*). Posso assicurare che nel magnetometro da me usato tutte le correzioni dipendenti dalle sopraccennate cause di errore, erano assai inferiori del limite di precisione richiesto.

Le sbarre magnetiche usate in queste esperienze sono state tre, tutte tubulari, a collimatore; ed una, col diametro esterno di circa un centimetro (che servì sempre da magnete deviatore) segnata col numero 1503 è lunga 10 centimetri, pesa 23,0038 grammi, ha il volume di c. c. 3,6016 e nel 1897 possedeva un'intensità di magnetizzazione rappresentata da 330 in unità assolute.

Per questa sbarra è $h = 0{,}0055204$ ed il valore di a è rappresentato dalla formola

$$a = 0{,}000495 + 0{,}00000147\,(t - 20^\circ)$$

essendo t espresso in gradi centigradi.

Le altre due sbarre servirono da magnetini di deviazione: sono lunghe rispettivamente 4,7 e 5 centimetri e portano i numeri 8902 e 505.

Dalla espressione di a per il magnete 1503 risulta evidente che come momento magnetico tipo di questa sbarra venne assunto quello che essa possiede a 20° centigradi; e perciò le due espressioni di A_1 e di A_2 vanno così modificate:

$$A_1 = \frac{2\,\}\,1 - a(\tau_1 - 20^\circ)\,\{\,(1 - h\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,\varphi_1)}{R^3_1(1 + 3\beta\tau_1)\,\mathrm{sen}\,\varphi_1}$$

$$A_2 = \frac{2\,\}\,1 - a(\tau_{.} - 29^\circ)\,\{\,(1 - h\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)}{R^3_2(1 + 3\beta\tau_2)\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)}\,.$$

Non è qui il caso che esponga le ragioni per le quali, come temperatura di riferimento preferisco ora la 20°, mentre prima, come fanno quasi tutti, sceglieva la 0°; le ragioni della conve-

---

(*) Chistoni, *Sulla misura delle deviazioni col magnetometro dei seni, ecc.*, " Annali dell'Ufficio Meteorologico e Geodinamico ", vol. X, parte IV (1888), pag. 285).

nienza di adottare 20° come temperatura di riferimento si trovano esposte in altro lavoro (*).

Il calcolo dei valori di p venne fatto direttamente per mezzo della formola (1), dopo avere separatamente calcolati i valori di A_1 e di A_2, ammettendo

$$H = 0,22066.$$

Come si vedrà le differenze fra i singoli valori di p in ogni serie di osservazioni, sono piuttosto rilevanti, ma dopo quanto ho esposto nel lavoro sul *Calcolo del coefficiente magnetometrico*, etc. ciò non deve meravigliare.

Ed ora riferirò i risultati ottenuti nelle varie serie di misure.

La prima serie di esperienze (che durò dal 26 agosto al 29 agosto 1897) si fece usando del magnete 8902 come magnetino delle deviazioni e ponendo il centro del magnete deviatore (1503) alle due rispettive distanze (a 0° di temperatura)

$$R_1 = 25,99970 \qquad R_2 = 34,00011.$$

Si ottenne:

φ_1	τ_1	φ_2	τ_2	p
38°.51',8	25,90	16°. 2',3	26,48	26,15
38. 47,4	27,52	16. 0,5	28,12	26,54
38. 43,7	28,20	15. 59,7	28,35	25,98
38. 45,6	28,87	16. 0,9	28,87	25,25
38. 43,0	30,45	16. 0,5	30,70	24,13
38. 44,8	28,32	15. 59,9	28,40	23,91
38. 45,0	27,38	16. 1,8	26,70	23,92
38. 42,7	29,08	15. 59,1	29,15	26,59
38. 40,8	30,22	15. 58,7	30,35	26,01
38. 42,9	29,60	15. 59,4	29,38	26,38
38. 45,1	27,87	16. 0,1	26,95	27,14

ed in media $p = 25,636$.

(*) Chistoni e De Vecchi, *Contributo allo studio dei magneti permanenti*, memoria II, " Mem. della R. Accad. di Scienze, Lettere ed Arti di Modena ", serie III, vol. II, pag. 125-272.

La seconda serie si eseguì nello stesso intervallo di tempo e colle stesse sbarre magnetiche, ma collocando il centro del magnete deviatore alle distanze

$$R_1 = 34,00011 \qquad R_2 = 44,00172$$

φ_1	τ_1	φ_2	τ_2	p
16°. 2',3	26,48	7°.15',8	26,28	24,55
16. 0,5	28,12	7. 14,5	29,10	26,11
15. 59,7	28,35	7. 14,6	28,10	25,03
16. 0,9	28,87	7. 14,6	29,62	27,10
16. 0,5	30,70	7. 14,4	31,02	27,88
15. 59,9	28,40	7. 14,7	29,15	23,38
16. 1,8	26,70	7. 15,0	27,02	27,73
15. 59,1	29,15	7. 14,5	28,92	23,74
15. 58,7	30,35	7. 14,6	30,05	22,04
15. 59,4	29,38	7. 14,8	29,15	22,75

ed in media $p = 25,031$.

La terza serie di esperienze, si eseguì nei giorni 29 e 30 agosto 1897 e si usarono le stesse sbarre magnetiche, ponendo il centro del magnete deviatore alle distanze

$$R_1 = 30,00031 \qquad R_2 = 39,00006.$$

Si ottenne:

φ_1	τ_1	φ_2	τ_2	p
23°.47',9	29,02	10°.28',3	28,65	23,90
23. 45,9	28,42	10. 27,4	27,97	24,22
23. 46,9	29,00	10. 28,1	28,37	23,50
23. 50,1	28,32	10. 28,0	28,07	28,06
23. 49,2	27,72	10. 28,0	27,52	26,75
23. 46,3	28,30	10. 28,1	28,02	22,24
23. 46,2	29,68	10. 27,7	29,92	24,02
23. 49,5	30,08	10. 27,9	30,02	27,32
23. 47,5	29,22	10. 27,7	29,60	24,58
23. 49,0	29,15	10. 27,9	29,10	26,57

Valore medio di $p = 25,116$.

Nella quarta serie di misure, il magnete deviatore era sempre il 1503, ed il magnetino delle deviazioni invece era il 505. Le esperienze vennero fatte dal 9 settembre al 20 settembre 1897.

Il centro del magnete deviatore si pose alle distanze

$$R_1 = 25{,}99970 \qquad R_2 = 34{,}00011.$$

Si ottenne:

φ_1	τ_1	φ_2	τ_2	p
38°.44',6	24,25	16°. 1',0	24,42	24,32
38. 50,4	23,10	16. 3,4	23,12	23,85
38. 46,7	26,00	16. 0,8	26,02	26,07
38. 41,5	26,12	16. 1,6	26,25	21,26
38. 46,7	23,12	16. 1,5	22,95	24,93
38. 53,4	21,58	16. 2,7	21,95	26,58
38. 54,6	16,52	16. 5,7	16,92	22,12
38. 56,8	18,07	16. 5,0	18,10	25,04
38. 54,7	18,68	16. 3,7	18,75	25,99
38. 53,3	18,50	16. 3,5	18,92	25,13

Media dei valori di $p = 24{,}529$.

La quinta serie di esperienze si fece ancora coi due magneti 1503 e 505, nello stesso intervallo di tempo, durante il quale si eseguì la quarta serie e ponendo il magnete deviatore alle due rispettive distanze

$$R_1 = 34{,}00011 \qquad R_2 = 44{,}00172.$$

φ_1	τ_1	φ_2	τ_2	p
16°. 1',0	24,42	7°.15',3	24,62	23,44
16. 3,4	23,12	7. 15,6	23,00	29,08
16. 0,8	26,02	7. 14,8	26,00	26,52
16. 1,6	26,25	7. 15,1	25,97	27,36
16. 1,5	22,95	7. 16,0	22,70	20,96
16. 2,7	21,95	7. 15,8	21,90	25,59
16. 5,7	16,92	7. 17,2	17,00	24,84
16. 5,0	18,10	7. 16,8	17,60	26,31
16. 3,7	18,75	7. 16,8	19,07	21,26
16. 3,5	18,92	7. 16,6	19,20	22,00

Valore medio di $p = 24,736$.

La sesta serie si fece colle stesse due sbarre 1503 e 505 il 22 ed il 23 settembre. Il centro del magnete deviatore si pose alle distanze

$$R_1 = 30,00031 \qquad R_2 = 39,00006.$$

φ_1	τ_1	φ_2	τ_2	p
23°.51',1	19,95	10°.30',4	20,55	21,48
23. 51,2	21,65	10. 28,6	21,80	28,14
23. 52,3	22,10	10. 29,9	22,20	25,08
23. 50,0	22,55	10. 29,6	22,50	22,80
23. 55,0	21,75	10. 30,5	21,68	27,23
23. 52,5	19.40	10. 30,4	19,60	23,45
23. 53,0	21,12	10. 30,2	21,20	25,06
23. 50,3	24,17	10. 30,1	23,52	22,27
23. 51,7	23,12	10. 29,9	23,23	24,17
23. 52,5	22,97	10. 29,5	23,00	26,95

Valore medio di $p = 24,663$.

Riassumendo adunque, e limitandoci a tenere calcolo solo della seconda cifra decimale, abbiamo ottenuto:
Colle sbarre 1503 (deviatrice) ed 8902 (deviata) alle distanze

25,99970	e	34,00011	$p = 25,64$
34,00011	e	44,00172	$p = 25,03$
30,00031	e	39,00006	$p = 25,12$
	ed in media quindi		$p = 25,26.$

Colle sbarre 1503 (deviatrice) e 505 (deviata) alle distanze

25,99970	e	34,00011	$p = 24,53$
34,00011	e	44,00172	$p = 24,74$
30,00031	e	39,00006	$p = 24,66$
	ed in media quindi		$p = 24,64$

La precisione richiesta in p per le misure della componente orizzontale del magnetismo terrestre è data dalla relazione

$$dp = \pm 2R^2 \frac{dH}{H} = \pm 0,0008\, R^2$$

e nel caso nostro la precisione richiesta sarebbe;

per $R = 25,99970$	$dp = \pm 0,54$
„ $R = 30,00031$	$dp = \pm 0,72$
„ $R = 34,00011$	$dp = \pm 0,92$
„ $R = 39,00006$	$dp = \pm 1,22$
„ $R = 44,00172$	$dp = \pm 1,55.$

Possiamo perciò concludere che ognuno dei valori medi di p trovati per ogni singola serie di osservazione, corrisponde alla precisione richiesta; e che in generale dieci misure di deviazione fatte a due determinate distanze R, sono sufficienti per dare in media il valore di p colla voluta approssimazione. Dai risultati ottenuti, poi consegue, che il valore di p, nel magnetometro unifilare dei seni, pure essendo una funzione dipendente dalla distribuzione del magnetismo nelle due sbarre delle quali

si fa uso, è però costante per due date sbarre (purchè abbiano le lunghezze relative assegnate sopra), e praticamente indipendente anche dall'angolo φ di deviazione, come appunto ritiene il Mascart (*) ed indipendente da R. Nessuno fin qui, per quanto sappia, aveva sperimentalmente provato giusto questo modo di vedere del Mascart.

E però, quando per un dato magnetometro e per due date sbarre magnetiche si sarà determinato con precisione il valore di p, questo potrà adottarsi per il calcolo di H, a qualunque distanza si ponga il magnete deviatore dal magnete sospeso. Tale conseguenza, che a prima giunta, può parere di poco momento, è invece importantissima per la pratica, poichè l'osservatore è reso affatto indipendente nello scegliere quelle distanze R che meglio gli convengono per ricavare i valori di p, e di scegliere poi a suo piacimento quelle distanze R che meglio convengono per la determinazione di H.

Non credo sia il caso di ripetere ciò che ebbi a dire nel mio precedente lavoro (**) per mostrare quanto importi fare uso di sbarre deviatrici, che possano offrire valori rilevanti di φ e quanto sia pratico, date che siano le due sbarre, di collocare il centro della sbarra deviatrice a distanze R dal magnete sospeso, tali da potere avere valori considerevoli di φ.

Una discussione teorica di queste asserzioni, o ripetendola come la pubblicai in quell'occasione, o formulandola in maniera diversa, sarebbe, a mio vedere, fuori di proposito in questo lavoro di indole affatto sperimentale; ma devo però ripetere quanto ebbi ad affermare undici anni or sono, che cioè la determinazione esatta del *coefficiente magnetometrico* è operazione assai delicata, e mi piace vedere che di questo parere sia pure il Prof. Mascart (***).

Venendo ora alla questione fattami dal chiar. Prof. Palazzo, che debbo veramente ringraziare, perchè la sua critica mi decise a mettere mano a questo lavoro, dirò che la differenza che può avvenire fra i valori di p calcolati colla formola esatta (1)

(*) *Sur la détermination du champ magnétique terrestre,* " Annales du Bureau Central météorologique de France ", a. 1890; Mémoires, pag. 113 B.

(**) *Sul calcolo del coefficiente magnetometrico, ecc.*

(***) Loc. cit., pag. 116.

e quelli che si ottengono colla (2), dipende quasi esclusivamente dal trascurare il termine dipendente da h, quando questo termine abbia valore considerevole.

Scegliamo, ad esempio, la prima serie di misure e calcoliamo coi dati surriferiti i valori di p colla formola esatta, ma introducendo in essa la media dei valori di τ_1 e di τ_2 invece di calcolare $(1 - a\tau)$ caso per caso; poi deduciamo i valori di p colla formola (2) calcolando però caso per caso il valore di $(1 - a(\tau_1 - \tau_2))$.

Indichiamo con p il valore del coefficiente magnetometrico dedotto colla formola esatta, quale è stato precedentemente riportato, con p_1 lo stesso valore dedotto colla formola ridotta introducendo la media dei valori di τ_1 e τ_2 ed infine con p_2 lo stesso valore ottenuto colla formola (2).

Ecco i risultati:

	p	p_1	p_2	$p - p_1$	$p - p_2$
	26,15	26,68	25,35	— 0,53	+ 0,80
	26,54	27,08	25,70	— 0,54	+ 0,84
	25,98	26,15	25,22	— 0,17	+ 0,76
	25,25	25,26	24,48	— 0,01	+ 0,77
	24,13	24,33	23,41	— 0,20	+ 0,72
	23,91	26,50	25,60	— 2,59	— 1,69
	23,92	23,30	23,20	+ 0,62	+ 0,72
	26,59	26,59	25,69	± 0,00	+ 0,90
	26,01	26,10	25,18	— 0,09	+ 0,83
	26,38	26,19	25,54	+ 0,19	+ 0,84
	27,14	26,34	26,26	+ 0,80	+ 0,88
Media	25,64	25,87	25,06	— 0,23	+ 0,58

Ritenendo esatto il valore medio di p, risulta che qualora si adottassero per il calcolo di H i valori medi di p_1 o di p_2 in luogo di quello di p, si sarebbe rispettivamente nel caso di raggiungere la precisione

$$\frac{dH}{H} = \pm 0{,}0002 \qquad \frac{dH}{H} = 0{,}0006 \qquad \text{per} \quad R = 23 \text{ cent.}$$

$$\frac{dH}{H} = \pm 0{,}0001 \qquad \frac{dH}{H} = 0{,}0003 \qquad \text{per} \quad R = 30 \text{ cent.}$$

L'introdurre quindi la media di τ_1 e di τ_2 nella formola esatta, o ciò che vale lo stesso, l'introdurre nella formola approssimata (2) la media di $(\tau_1 - \tau_2)$ non può portare in p sensibile differenza. A prova di ciò citerò anche questi altri risultati medi ottenuti colle altre cinque serie di osservazioni:

		Media di p	Media di p_1	Differenza
Sbarre 1503 e 8902	II Serie	25,03	25,14	— 0,11
	III "	25,12	25,05	+ 0,07
Sbarre 1503 e 505	IV "	24,53	24,53	± 0,00
	V "	24,74	24,72	+ 0,02
	VI "	24,66	24,23	+ 0,43

Ma torniamo alla prima serie e calcoliamo il *coefficiente magnetometrico* colla formola approssimata (2), ammettendo senz'altro che $\tau_1 = \tau_2$, ossia che $a(\tau_1 - \tau_2) = 0$; poi ripetiamo il calcolo ritenendo pure $h\mathrm{H}$ (sen φ_1 — sen φ_2) $= 0$. Indichiamo rispettivamente con p_3 e p_4 i risultati; avremo:

p	p_2	p_3	p_4	$p - p_2$	$p - p_3$	$p - p_4$
26,15	25,35	25,83	25,11	+ 0,80	+ 0,32	+ 1,04
26,54	25,70	26,20	25,49	+ 0,84	+ 0,34	+ 1,05
25,98	25,22	25,34	24,63	+ 0,76	+ 0,64	+ 1,35
25,25	24,48	24,48	23,76	+ 0,77	+ 0,77	+ 1,49
24,13	23,41	23,62	22,90	+ 0,72	+ 0,51	+ 1,23
23,91	25,60	25,68	24,96	— 1,69	— 1,77	— 1,05
23,92	23,20	22,64	21,93	+ 0,72	+ 1,28	+ 1,99
26,59	25,69	25,75	25,04	+ 0,90	+ 0,84	+ 1,55
26,01	25,18	25,30	24,59	+ 0,83	+ 0,71	+ 1,42
26,38	25,54	25,38	24,66	+ 0,84	+ 1,00	+ 1,72
27,14	26,26	25,52	24,82	+ 0,88	+ 1,62	+ 2,32
Media						
25,64	25,06	25,06	24,35	+ 0,58	+ 0,58	+ 1,29

Da questo risultato si riconosce la nessuna influenza apprezzabile del termine $a(\tau_1 - \tau_2)$, mentre è sentita quella del termine $h\mathrm{H}$ (sen φ_1 — sen φ_2).

Trascurando quest'ultimo termine, si ha tale errore in p per il quale l'approssimazione relativa che si potrebbe raggiungere in H sarebbe

$$\text{per} \quad R = 23 \text{ cent.} \qquad \frac{dH}{H} = \pm 0{,}0012$$

$$\text{per} \quad R = 30 \quad \text{"} \qquad \frac{dH}{H} = \pm 0{,}0007$$

approssimazione piuttosto grossolana.

Per ciò che riguarda la questione posta dal Prof. Palazzo, debbo concludere, che per avere p con precisione, a tutte le altre sarà preferibile per il calcolo la formola completa (1); che qualora poi si voglia fare uso di una formola di approssimazione, la formola ridotta (2), quale la consigliai undici anni fa, si presta benissimo, purchè si stia assai guardinghi a non trascurare il termine dipendente da h, se non in quei casi nei quali si possa evidentemente trascurare.

L'Accademico Segretario
ANDREA NACCARI.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 4 Marzo 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: Manno, Pezzi, Ferrero, Cipolla, Pizzi e Renier Segretario. — I Soci Peyron, Bollati di Saint-Pierre e Brusa scusano la propria assenza.

Approvasi l'atto verbale della precedente adunanza, 18 febbraio 1900.

Il Presidente annunziando la morte del Socio Claretta, Direttore della Classe di scienze morali, storiche e filologiche, legge la commemorazione seguente:

Egregii Colleghi,

È coll'animo vivamente addolorato, che io debbo darvi l'annunzio della morte del nostro amatissimo collega Barone Gaudenzio Claretta, direttore della Classe di scienze morali, storiche e filologiche, mancato ai vivi in Roma il 17 febbraio p. p. Il nostro collega aveva dovuto recarsi colà, a richiesta del Ministero degli Interni, per presiedervi una Commissione di esame per l'ammessione agli Archivi di Stato, e ciò nei giorni appunto in cui serpeggiava in Roma, come nelle altre città di Italia, una triste ed insidiosa malattia. Egli anzi, nel separarsi da noi, aveva accennato con qualche amico suo alla possibilità di essere colto

colà da quel triste malanno. Pur troppo quel presentimento ebbe ad avverarsi, ed Egli colpito a Roma da influenza, dovette poi soccombere in seguito alla bronchite, che venne ad esserne la conseguenza.

La notizia della sua morte fu appresa da tutti quelli che lo conoscevano con dolorosa sorpresa e destò universale rimpianto; e noi che avevamo la speranza di risalutarlo fra breve al suo ritorno, abbiamo dovuto mestamente avviarci ad incontrarne la salma.

Gli onori funebri, che furono resi al barone Gaudenzio Claretta nella nostra città, hanno dimostrato quanto egli fosse stimato ed apprezzato da tutte le classi della cittadinanza. L'Accademia con buon numero di soci concorse insieme ai rappresentanti del Sindaco, del Prefetto, del Consiglio Provinciale e della Deputazione Provinciale, della R. Deputazione di Storia Patria, della Società di Archeologia e di Belle arti, del Consiglio Superiore degli Archivi, della Commissione Araldica Piemontese, del Consiglio di amministrazione dell'Ospizio della Maternità e di altre opere Pie, e con una quantità grande di parenti, di amici, di colleghi a dargli quella estrema testimonianza di affetto e di stima, che era ben dovuta alle sue ottime qualità di cuore e di mente. La Presidenza poi inviò particolari condoglianze a nome dell'Accademia all'egregia Gentildonna, che gli fu consorte, ed ai suoi figli, che risposero ringraziando, e ricevette parimenti numerose condoglianze per parte dei Sodalizii scientifici, a cui fu annunziata la morte di Lui.

Non spetta a me, e non potrebbe questo essere il momento opportuno, di parlare del Claretta come storico, come letterato, come pubblico amministratore. Io dirò soltanto, che Egli nato in Torino nel 1835, dopo essersi addottorato in giurisprudenza nel 1857, cominciò fin d'allora quelle ricerche di carattere storico ed archeologico, che Gli valsero fin dal 1860 la nomina a membro della R. Deputazione per gli studii di Storia Patria, di cui più tardi ebbe anche ad essere segretario. D'allora in poi Egli perseverò costantemente nello stesso ordine di studii; fu uno dei soci fondatori e poi presidente delle Società di Archeologia e Belle arti, e fu chiamato a far parte della nostra Accademia per la Classe di scienze morali, storiche e filologiche fin dal 1872. Noi tutti nella famigliarità, che abbiamo avuto con

Lui, abbiamo avuto occasione di apprezzare la sua singolare e molteplice operosità, l'affabilità delle sue maniere, la bontà dell'animo suo. Egli appartenne a quel patriziato subalpino, che ha saputo conciliare la riverenza alla religione coll'amore per la patria e per le sue liberali istituzioni; egli seppe valersi del largo censo, e della vita tranquilla ed agiata, che esso Gli assicurava, per partecipare attivamente alla amministrazione della Provincia e a quella di diverse opere Pie, e per attendere con coscienza e con amore alle ricerche storiche ed archeologiche. Furono queste ricerche, che gli porsero occasione di scrivere un numero grandissimo di memorie, di dissertazioni, di saggi, di articoli, che, per il periodo di ben quarant'anni di una vita operosissima, Egli venne diffondendo e pubblicando nelle Riviste e nei Giornali di carattere storico e negli Annali delle Accademie e delle Società storiche. Anch'Egli, al pari del compianto nostro collega Domenico Perrero, nei suoi lavori storici non si propose l'illustrazione completa di questo o di quel periodo storico, ma si compiacque di preferenza in quelle particolari ricerche, che valessero a chiarire questo o quel punto speciale di storia subalpina. Aggiungerò anzi, che il còmpito a lui prediletto fu quello sopratutto di far rivivere e di mettere in rilievo la memoria di quegli uomini, che per l'opera prestata alla patria o per gli studî da essi compiuti meritavano di essere sottratti all'oblio. Di qui quel numero grande dei suoi scritti, che si riferiscono alla vita e alle opere di storici, di diplomatici, di studiosi, dei quali non pochi trovansi inseriti nelle memorie e negli atti della nostra Accademia.

E a questo proposito non debbo tacere che Egli in questi ultimi tempi stava attendendo appunto a scrivere della vita e delle opere di Domenico Perrero, còmpito che gli era stato affidato dalla Classe e che egli aveva accettato di buon grado. trattandosi di concorrere a mantenere viva la memoria di un amico e collega a Lui carissimo.

Pur troppo Egli non potè compiere l'opera assuntasi, ed ora di fronte al triste evento della sua perdita non mi resta che a pregare il collega Ermanno Ferrero a dire brevemente in qualche prossima seduta della Classe della vita e delle opere dell'uno e dell'altro con quell'affetto e con quella competenza, che a Lui vengono dall'antica amicizia e dalla comunanza degli studî.

Il Socio Ferrero accetta di buon grado di fare l'una e l'altra commemorazione, solo riservandosi di esaminare se per caso fra le carte del Socio Claretta si trovasse già abbozzata o scritta la commemorazione del Socio Perrero, nel qual caso egli si farebbe un dovere di presentarla alla Classe.

Il Segretario quindi dà lettura delle condoglianze per la morte del Socio Claretta, pervenute all'Accademia da Autorità, da Istituti scientifici, da Soci nazionali non residenti e da Soci corrispondenti.

Quindi su proposta del Socio Ferrero, consenziente la Classe, il Presidente leva l'adunanza in segno di lutto per la morte del Socio Claretta, Direttore della Classe.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

E. Giglio-Tos dis.

Lit. Salussolia, Torino.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXV, DISP. 9a, 1899-900

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1900

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Marzo 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Bizzozero, Direttore della Classe, D'Ovidio, Mosso, Spezia, Camerano, Segre, Volterra, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona e Naccari Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale della seduta precedente che viene approvato.

Il Presidente dà notizia che il Ministro della Pubblica Istruzione ha inviato all'Accademia il decreto, con cui viene approvata la nomina del prof. Giorgio Gabriele Stokes a Socio straniero.

Comunica inoltre la lettera di ringraziamento del professore Stokes, quella inviata dal prof. Wislicenus che fu nominato Socio corrispondente e i ringraziamenti fatti dalla vedova del compianto Socio Beltrami per le condoglianze inviate a nome dell'Accademia.

Il Socio Camerano presenta in omaggio all'Accademia, a nome dell'autore, un'opera del prof. Giuseppe Sergi, intitolata: *Specie e varietà umane: Saggio di una sistematica antropologia* e la loda.

Vengono inoltre presentate le memorie stampate:

Sur l'entrecroisement des pyramides chez les marsupiaux et les monotrèmes del Socio straniero von Koelliker;

Osservazioni astronomiche e fisiche sulla topografia e costituzione fisica del pianeta Marte, ecc., del Socio nazionale non residente prof. G. V. SCHIAPARELLI.

Il Socio JADANZA, al quale insieme col Socio D'OVIDIO eran stati dati in esame due brevi scritti del prof. Pietro GAMBÈRA che trattano della *Scienza cosmologica di Dante* e del *Mistico viaggio dantesco,* propone anche a nome del Socio D'OVIDIO che quei due scritti sieno inseriti negli *Atti.* La Classe approva.

Il Socio MOSSO presenta una memoria del dott. Pasquale SFAMENI, intitolata: *Gli organi nervosi terminali del Ruffini e i corpuscoli del Pacini studiati nelle piante e nei polpastrelli del cane, del gatto e della scimmia.* Sarà esaminata dai Soci MOSSO, BIZZOZERO e FOÀ.

Il Socio VOLTERRA presenta un'Appendice alla nota del prof. LAURICELLA presentata antecedentemente col titolo: *Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie.*

LETTURE

Due nuove note dantesche

del Prof. PIETRO GAMBÈRA.

(Con una tavola).

I.

Sulla scienza cosmologica di Dante.

L'aiuola che ci fa tanto feroci,
Volgendom'io con gli eterni Gemelli,
Tutta m'apparve da' colli alle foci.
(*Parad.*, XXII, 151-153).

Dall'ora ch'io avea guardato prima
I' vidi mosso me per tutto l'arco
Che fa dal mezzo al fine il primo clima;
Sì ch'io vedea di là da Gade il varco
Folle d'Ulisse, e di qua presso il lito
Nel qual si fece Europa dolce carco.
E più mi fora discoverto il sito
Di questa aiuola; ma 'l Sol procedea
Sotto i miei piedi un segno e più partito.
(*Parad.*, XXVII, 79-87).

In questi versi è racchiusa una questione cosmologica assai complessa, finora non risolta. Riuscirono pressochè vani anche i tentativi degli astronomi Antonelli e Della Valle, perchè non tennero conto della cronografia del mistico viaggio dantesco, la quale è un dato necessario a interpretare parecchie questioni astronomiche del poema.

Si tratta di spiegare come Dante, quando trovavasi nei Gemelli, preceduto dal sole di un segno zodiacale e più, sia riuscito a vedere, volgendo due sole volte lo sguardo alla terra, tutte le regioni allora conosciute.

Rileviamo anzitutto che il poeta era stato trasportato coi Gemelli, dalla rotazione della sfera stellata, sino al meridiano di Cadice, quando, guardando per la seconda volta il nostro globo,

vide di là, a ponente, l'Oceano follemente valicato da Ulisse e di qua, a levante, il Mediterraneo e l'antico Continente sino al lido dell'antica Fenicia (Siria), dove la donzella Europa fu rapita da Giove e dove finisce il Mediterraneo. Dante avrebbe potuto vedere regioni situate anche più verso oriente, ma esse non erano più illuminate dal sole.

Adunque il sole tramontava a Gerusalemme (il cui meridiano passa appunto al lido più orientale del Mediterraneo), e sorgeva per conseguenza all'opposta isola del Purgatorio. Ma il poeta, dalla sommità del monte di quell'isola, era salito al cielo il giorno prima, quando colà si levava il sole; e per conseguenza aveva già impiegato un giorno (24 ore) nel suo viaggio celeste, allorchè rivolse lo sguardo alla terra, prima di lasciare i Gemelli e salire al nono cielo (*Primo Mobile* sotto l'Empireo.

Si rileva inoltre dal poema (*Inf.*, I, 2, 21; XXI, 112-114; *Purg.*, XXXII, 2; *Parad.*, IX, 40), che Dante cominciò il viaggio la sera del Giovedì Santo dell'anno 1300, il qual giorno cadde il 7 aprile (*Nota* II). Il sole, adunque, aveva già percorsi 17° del segno dell'Ariete (1); cioè, si trovava quasi in mezzo a questa costellazione, come è detto nel poema (*Inf.*, I, 38-40; *Purg.*, VIII, 133-131). E però esso allora era lontano 13° + 30° + 15° ossia 58° dal mezzo del segno dei Gemelli, i quali seguono l'Ariete dopo il Toro.

È noto che il Poeta, per uscire dalla *selva oscura*, percorrere l'Inferno, e salire dal centro della terra al monte del Purgatorio sino al Paradiso terrestre, impiègò *sette giorni*, comprese le 18 ore di fermata, dopo le quali salì al cielo. Ma ho già dimostrato che era trascorso *un altro giorno*, quando egli, prima di lasciare i Gemelli, guardò di nuovo la terra. Adunque aveva compiuti *otto giorni precisi* (192 ore) di viaggio quando salì al nono cielo, supposto che si fosse *ritrovato* per la selva mentre tramontava il sole a Gerusalemme.

---

(1) Ai tempi di Dante non era ancora stato riformato il calendario giuliano, e quindi l'equinozio accadeva parecchi giorni prima del 21 marzo; ma si continuava a supporre che accadesse in quel giorno e che allora il sole entrasse nel segno dell'Ariete. Il poeta seguiva quel calendario, che era quello della Chiesa, pur non ignorando la differenza tra l'anno giuliano e l'anno tropico, per l'effetto che questa differenza produceva di anticipare la data dell'equinozio primaverile (*Parad.*, XXVII, 142-143).

Durante questi otto giorni, il sole si era avvicinato di 8° ai Gemelli; e però, quando Dante da questa costellazione (*dal bel nido di Leda*) guardò per la seconda volta la terra, il sole lo precedeva di 58° — 8° ossia di 50° dello zodiaco ed era nel 25^mo^ grado dell'Ariete. Ma questi 50° zodiacali corrispondono a 50° di longitudine contati sull' equatore, come si può verificare sulla sfera armillare. Adunque il poeta, quando si trovava nei Gemelli e sopra il meridiano di Cadice, distava 50° di longitudine dal sole e quindi 40° (cioè 90°—50°) dal meridiano di Gerusalemme, dove il sole già tramontava, e però era distante 90° da tale meridiano (fig. 1ª).

Adunque la longitudine assegnata da Dante al mare Mediterraneo, fra Cadice e il meridiano di Gerusalemme, ossia fra Cadice e il lido della Fenicia, risulta di 40°, cioè quasi eguale a quella che è data dalle carte geografiche moderne.

I comentatori però affermano che dal canto nono del *Paradiso* si dedurrebbe che il Poeta assegnò al Mediterraneo 90° e non già 40° di longitudine. Ma *la maggior valle in che l'acqua si spanda, tra discordanti liti,* non finisce col Mediterraneo: essa è il vastissimo bacino che comprende anche il Mar Nero, l'Azov, il Caspio ed i laghi di Aral e Balkash, e che occupa appunto circa 90° di longitudine a levante di Cadice. Del resto sarebbe una vera ingenuità il credere che, ai tempi di Dante (contemporaneo di Marco Polo), si potesse attribuire al Mediterraneo, il quale era il mare più navigato, una longitudine più che doppia di quella che ha realmente.

La principal cagione dell'errore gravissimo, attribuito a Dante dai comentatori, fu l'erronea supposizione che egli avesse stimato Gerusalemme essere al centro del Continente allora conosciuto, e questo occupare quasi tutto l'emisfero terrestre, avente per vertice Gerusalemme. Ma si è detto, e si scorge dalla fig. 1ª, che Dante assegnò a tale emisfero (in gran parte boreale) ben 50° di longitudine a ponente di Cadice. Il poeta, nominando Siviglia, Cadice e Marocco, ed il Gange, intese evidentemente d'indicare, ma non di fissare, i confini occidentale ed orientale dell'emisfero avente per vertice Gerusalemme.

Continuando ora a discutere la questione proposta da Dante, osservo che egli, trovandosi in mezzo al segno dei Gemelli, era quasi sopra il tropico del Cancro, e quindi aveva di sotto il

confine boreale della zona torrida, cioè del *primo clima* del mezzo emisfero boreale della terra, limitato a ponente dal meridiano di Cadice. Ma si è detto avanti che egli era giunto coi Gemelli a questo meridiano, quando guardò per la seconda volta il nostro globo. Trovavasi adunque ad immensa altezza sopra il lembo occidentale del deserto di Sahara; e potè quindi vedere 90° dell'Oceano (*il varco folle d'Ulisse*), ed anche il continente antico sino al lido della Fenicia, dove allora tramontava il sole. Veramente egli avrebbe potuto vedere 90° di terra verso levante, ma questa oltre i 40° (oltre il lido della Fenicia) era oscura, cioè non più colpita dai raggi solari (fig. 1ª).

Si rileva dalla seconda terzina, riportata in capo a questa *Nota*, che il Poeta quando, nello stesso giorno, guardò per la prima volta la terra, si trovava di 90° ad oriente di Cadice, ossia di 50° ad oriente del meridiano di Gerusalemme, se si ammette con Dante che da Cadice a Gerusalemme corrano 40° di longitudine.

Ma, siccome egli era nei Gemelli, doveva ancora essere preceduto di 50° zodiacali, ossia dei corrispondenti 50° di longitudine, dal sole, il quale per conseguenza faceva mezzogiorno a Gerusalemme (fig. 2ª). Perciò potè vedere verso levante 90° — 50° ossia 40° di superficie terrestre ancora illuminati: cioè, vedere sino alla costa più orientale dell'Asia, la quale costa è appunto distante quasi 90° dal meridiano di Gerusalemme. E potè vedere 90° verso ponente, cioè fino al meridiano di Cadice, come si rileva dalla fig. 2ª.

Dante nei Gemelli si trovava, come si è già detto, quasi sopra il tropico del Cancro e di 50° ad oriente di Gerusalemme, quando guardò per la prima volta la terra. Quindi allora doveva stare quasi di sopra a Calcutta; e potè vedere tutto il Continente allora conosciuto, meno la piccola parte dell'Affrica e dell'Europa, situata a ponente del meridiano di Cadice ed occultata al suo sguardo.

Osservo finalmente che il giorno in cui il poeta guardò dai Gemelli due volte la terra, la prima volta quando era mezzodì a Gerusalemme e poi quando vi tramontava il sole, questo era già declinato di parecchi gradi a nord rispetto all'equatore. Egli vide, adunque, anche la regione polare artica e potè vedere sin oltre il Capo di Buona Speranza, che è il luogo più australe

dell'antico Continente, sebbene si trovi a meno di 35° di latitudine.

La parte del Continente antico, che egli vide ambedue le volte, è quella compresa fra i meridiani di Cadice e Gerusalemme (fig. 1ª e 2ª).

Pertanto risulta che Dante seppe indicare con poche parole le due posizioni dalle quali, avvolgendosi *con gli eterni Gemelli* preceduto dal sole di 50° zodiacali, poteva riuscire a vedere, *dai colli alle foci*, la prima volta quasi tutto e poi anche il resto dell'antico Continente ed *il varco folle d'Ulisse* sopra l'Oceano.

Risulta inoltre come egli abbia giustamente stimato che tutto il Continente antico (Europa, Asia ed Affrica) fosse compreso nell'emisfero che ha per vertice Gerusalemme (*Inf.* XXXIV, 112-124) e che tale emisfero comprendesse anche buona parte dell'Oceano.

II.

Principio e durata del mistico viaggio dantesco.

Dalle dichiarazioni di Dante (*Inf.*, I, 2, 21; XXI, 112-114; *Purg.*, XXXII, 2; *Parad.*, IX, 40) si rileva, come si è già detto nella *Nota* precedente, che egli partì dalla *selva oscura* la sera del Giovedì santo dell'anno 1300, il qual giorno cadde il 7 aprile; giacchè è fuor di dubbio che la Domenica di Pasqua avvenne il 10 aprile, come dimostrò il Giambullari, come si deduce mediante la regola di Gausse e come risulta da documenti inoppugnabili.

La domenica del 10 aprile 1300 (Pasqua) era proprio la prima dopo il plenilunio susseguente all'equinozio, conformemente alle disposizioni del Concilio di Nicéa. Infatti, secondo i calcoli dell'Antonelli, del Capocci e dell'Angelitti, quel plenilunio, cadde, rispetto al meridiano di Roma, verso le ore 4 antimeridiane del 5 aprile (martedì della settimana santa). E Dante col verso: *E già ier notte* (Giovedì santo) *fu la luna tonda* (*Inf.*, XX, 127), intese appunto di significare che essa fu del tutto piena prima del Giovedì santo, perchè altrimenti in quel verso avrebbe usato l'imperfetto *era* invece del passato remoto *già fu*. Anzi, egli dicendo poi che la luna, quattro giorni dopo il Giovedì santo,

era *quasi a mezzanotte tarda* (*Purg.*, XVIII, 76), cioè che era sorta quasi a mezzanotte, volle proprio indicare che essa fu totalmente piena la mattina del martedì santo (5 aprile), perchè la luna sorge appunto verso mezzanotte, quasi sette giorni dopo il plenilunio.

Adunque il nostro Poeta ben sapeva che il plenilunio che determinava la Pasqua del 1300, cadde il martedì santo (5 aprile), il che però non esclude che la luna, nella notte del giovedì santo (7 aprile), potesse ancora apparire sensibilmente tonda. Così veniva confermata approssimativamente la regola inesatta che usava la Chiesa per determinare il plenilunio.

Perciò non sussiste la contradizione che i comentatori rilevano, seguendo il Giambullari, il quale per altro suppose giustificabile misticamente il preteso errore dantesco. E risulta erroneo il tentativo fatto da parecchi chiosatori, che riferiscono il viaggio del Poeta all'anno 1301 invece che al 1300 (1).

---

(1) L'astronomo F. Angelitti, direttore dell'Osservatorio di Palermo, provocò in questi ultimi anni una vivace polemica col sostenere che il viaggio dantesco ebbe principio il 25 marzo 1301, che era il sabato precedente alla settimana di passione, perchè in quell'anno la Pasqua cadde il 2 aprile. Egli calcolò che allora la luna era piena, che Venere era mattutina e che queste ed altre circostanze astronomiche, accennate nel poema, non poterono verificarsi il 7 aprile 1300. Aggiunge, seguendo il Blanc, che il 25 marzo è l'anniversario, in anni giuliani, della morte di Cristo secondo una opinione assai diffusa nel medio evo, pur riconoscendo che per tale anniversario era anche indicato l'8 aprile, che nel 1300 cadde appunto in venerdì.

Io non ripeterò le gravi ragioni storiche e morali rilevate dai valorosi contraddittori alla data sostenuta dal valente astronomo. Mi limito ad osservare quanto segue:

1° Se Dante avesse incominciato il viaggio la sera del 25 marzo 1301, nel qual giorno la luna, divenuta piena, sorse poco dopo il tramonto del sole, egli non avrebbe potuto dire che, dopo quattro giorni, essa era *quasi a mezzanotte tarda*, cioè che si era levata quasi a mezzanotte. Invece sarebbe sorta verso le ore 10 pomeridiane e non avrebbe potuto occupare le altre posizioni cronologiche indicate dal poema. Il poeta fece coincidere il principio del suo viaggio col plenilunio ecclesiastico del 7 aprile 1300; ma poi tenne debitamente conto del plenilunio astronomico (5 aprile) nell'indicare le posizioni della luna.

2° Dai calcoli dell'Angelitti risulta che Dante, il mattino del 10 aprile 1300, non avrebbe potuto vedere Venere, la quale non era più mattutina. Ma da tali calcoli risulta anche che Venere allora nemmeno era visibile di sera. Perciò il poeta ben poteva osare di supporla ancora mat-

Si deve rigettare anche l'opinione del Boccaccio, ora generalmente invalsa, che Dante abbia incominciato il viaggio, non il 7 aprile, ma il 25 marzo del 1300.

Infatti, la luna che era piena (aveva quasi 15 giorni) il 5 aprile, dovea avere meno di quattro giorni il 25 marzo; e doveva quindi tramontare, sotto forma di falce sottile, poco dopo il sole. Così, durante la notte del 25 marzo, essa non potè illuminare la *selva oscura*, nella quale il Poeta dichiara invece che si trovò quando la luna si mostrava ancora sensibilmente tonda. Questa doveva sorgere verso le ore 8 $^1/_2$ di sera e illuminare la selva sino a giorno.

Vero è che il Giubileo del 1300 ebbe principio il 25 dicembre 1299 (Natale); e che Casella dice dell' Angelo che lo aveva sbarcato all'isola del Purgatorio (II, 98-99):

> Veramente da tre mesi egli ha tolto
> Chi ha voluto entrar con tutta pace.

---

tutina. Del resto, secondo il giudizio dell' Accademia della Crusca, *lo bel pianeta che ad amar conforta* — e che *faceva tutto rider l'oriente* — *velando i Pesci, ch'erano in sua scorta* (*Purg.*, I, 19-21), non era Venere, ma bensì il Sole. Il quale infatti era prossimo a sorgere coll'Ariete e doveva quindi velare con la sua luce la già sorta costellazione dei Pesci.

3° Riguardo alla leggenda medioevale che il 25 marzo fosse l'anniversario della morte di Cristo, è da notarsi che Dante non ne tenne conto. Invero, se egli avesse incominciato il viaggio nel 25 marzo 1301, come sostiene l'Angelitti, avrebbe fatto ricorrere la morte di Gesù nel giorno della partenza invece che nel giorno dopo. Evidentemente il poeta sacro non pensò mai di opporsi alla Chiesa, la quale doveva nel 1301 commemorare la morte di Gesù Cristo poco dopo il 25 marzo, e non il 26 (domenica precedente la Pasqua), ma il 31 (venerdì santo).

4° L'Angelitti nel determinare le posizioni che avevano il sole ed alcuni pianeti, il 7 aprile 1300 ed il 25 marzo 1301, rispetto ai segni zodiacali, non tenne conto che col calendario giuliano si continuava a fissare al 21 marzo l'entrata del sole nel segno dell'Ariete; e che quindi gli attuali segni dello zodiaco non coincidono totalmente con quelli di allora. Tenuto conto di ciò, risulta che, il 7 aprile 1300, il sole si trovava nel *diciasettesimo grado* dell'Ariete ossia quasi in mezzo al *letto del Montone*, come già dissi. E risulta invece che, il 25 marzo 1301, il sole era appena nel *quinto grado* del segno di quella costellazione, e però non poteva dirsi coricato nel letto del Montone.

Conchiudo che niuna seria obbiezione scientifica rimane contro la data, 7 aprile 1300, del viaggio dantesco. Anzi solo questa data, fra quelle possibili, sodisfa alle esigenze del poema e specialmente alla principale; cioè che il viaggio abbia avuto principio in un giovedì di passione, due giorni e più dopo il reale plenilunio.

Ma la frase *da tre mesi* non significa da *tre mesi precisi*. Infatti i tre mesi erano già passati anche quando Dante incontrò Casella, pur volendosi supporre che egli avesse incominciato il viaggio la sera del 25 marzo, anzichè in quella del 7 aprile, la qual cosa, come si è detto, è smentita altresì dalle esigenze astronomiche del divino poema.

Si noti finalmente che, non il 25 marzo, ma bensì il 7 aprile (cioè, 17 giorni dopo che il sole era entrato nel segno che, prima della riforma del calendario giuliano, era attribuito all'Ariete) poteva dirsi che il sole fosse coricato *nel letto del Montone* (*Purg.*, VIII, 134-135) ossia fra *quelle stelle — ch'eran con lui, quando l'Amor divino — mosse da prima quelle cose belle* (*Inf.*, I, 38-39).

Determiniamo ora la durata del viaggio dantesco.

Sera di Giovedì santo (7 aprile).

Il Poeta, passata la notte vagando per la selva oscura (*Inf.*, I, 21), ne uscì al mattino.

Sera di Venerdì santo (8 aprile).

Guidato da Virgilio entrò nell'Inferno (II, 43).

Sera di Sabato santo (9 aprile).

I due Poeti raggiunsero il fondo dell'Inferno mentre risorgeva la notte (XXXIV, 68) alla soprastante Gerusalemme, ossia mentre risorgeva il sole all'antipoda isola del Purgatorio. Quindi essi, oltrepassato il vicino centro della terra, si sono trovati immediatamente *da sera a mane* (XXXIV, 105).

Sera di Pasqua (10 aprile)
Mattino all'isola del Purgatorio.

Dante e Virgilio saliti dal centro alla superficie terrestre, nell'isola del Purgatorio, dove era ancora notte (*Inf.*, *ultimo verso*), all'alba si sono recati presso il mare:

> L'alba vinceva l'ora mattutina.
> (*Purg.*. I, 115).

Sera del lunedì pasquale (11 aprile)
Mattino all'isola del Purgatorio.

Dante, *vinto dal sonno*, si addormentò nell' Antipurgatorio mentre sorgeva l'aurora solare. *Nell'alba* fu tolto da Lucia e trasportato, *come il dí fu chiaro*, presso la porta del Purgatorio. Si è svegliato quando il sole *era alto già più di due ore* (v. la mia *Nota* intitolata: *L'aurora descritta nel canto nono del Purgatorio*, recentemente pubblicata dalla R. Accademia delle Scienze di Torino).

Sera del martedì pasquale (12 aprile)
Mattino al Purgatorio.

Il Poeta si svegliò al sorger del sole per avviarsi alla quinta cornice:

Su mi levai, e tutti eran già pieni
Dell'alto dí i giron del sacro monte,
Ed andavam col sol nuovo alle reni.
(XIX, 38-40).

Allora la luna era quasi arrivata al meridiano del monte del Purgatorio, perchè era colà sorta *quasi a mezzanotte* (XVIII, 76). Infatti, siccome essa fu piena il 5 aprile, come già ho detto, doveva il 12 aprile, cioè sette giorni dopo, essere ridotta quasi all'ultimo quarto (a mezzo disco apparente), e dovea quindi precedere il sole di 90° circa.

Sera del mercoledì pasquale (13 aprile)
Mattino al Paradiso terrestre.

Sognò Lia e si svegliò all'alba:

E già per gli spendori antelucani
Le tenebre fuggían da tutti i lati
E il sonno mio con esse; ond'io leva' mi.
(XXVII, 109, 112-114).

Sera del giovedì pasquale (14 aprile)
Mattino al Paradiso terrestre.

Salì al cielo con Beatrice dalla spianata del monte del Purgatorio (dal Paradiso terrestre) mentre sorgeva il sole (*Par.*, I, 43).

La luna doveva fra due ore circa giungere al meridiano del monte del Purgatorio, perchè il 12 aprile, al sorger del sole, si trovava presso tale meridiano. Adunque Dante e Beatrice arrivarono ad essere *congiunti con la prima stella* (*Parad.*, II, 30), ossia con la luna, dopo circa due ore di salita, in parte impiegate in discussioni scientifiche. La loro velocità potè ben dirsi dal Poeta fulminea, giacchè si può facilmente calcolare che essa fu di 50 chilometri per minuto secondo, ossia cento volte maggiore di quella di una palla di cannone (1).

Pertanto l'indugio di 18 ore, fatto da Dante e Beatrice prima di salire alla luna, era necessario. Essi dovevano attendere che la luna arrivasse in posizione tale da poter essere raggiunta vicina, quanto più era possibile, al loro zenit. Se avessero fatta l'ascensione nel meriggio del giorno precedente, subito dopo che Dante tornò dal fiume Ennoé, come ha creduto il Benassuti, non avrebbero potuto giungere alla luna, perchè essa allora era colà quasi al tramonto.

Sera del venerdì pasquale (15 aprile).
Mattino all'isola del Purgatorio.

Il Poeta salì dai Gemelli al nono cielo mentre il sole tramontava a Gerusalemme ossia sorgeva all'antipoda isola del Purgatorio, come è dimostrato nella *Nota* precedente.

---

(1) Ho dovuto così modificare parte della mia Nota intitolata: *La salita di Dante dall'Eden alla luna*, perchè errai con tutti i comentatori supponendo che il nostro poeta avesse creduto che il plenilunio astronomico precedente alla Pasqua del 1300, coincidesse col plenilunio ecclesiastico (7 aprile), il che, ripeto, è smentito dalle posizioni da lui assegnate poi alla luna. Del resto, anche il lungo discorso di Beatrice, il quale occupa quasi due canti del poema, prova che la salita non potè essere compiuta in brevissimo tempo.

Pertanto risulta che Dante, per uscire dalla *selva oscura* e visitare l'Inferno, il Purgatorio, il Paradiso terrestre ed i primi otto cieli, impiegò otto giorni (192 ore), supposto che egli si fosse *ritrovato* per la selva, mentre tramontava il sole a Gerusalemme.

Dante non dice quanto tempo abbia impiegato per salire dalla sfera stellata (dai Gemelli) al nono cielo e quante ore sia poi rimasto nella contemplazione dell'Empireo. Ma, tenuto conto delle sue idee simboliche circa il Sole, si può congetturare che la meravigliosa visione abbia avuto fine dopo altre 12 ore, mentre risorgeva il sole a Gerusalemme e l' alba a Roma e Firenze. E però tutto il viaggio durò *otto giorni e mezzo* ossia 204 ore.

L'Accademico Segretario
ANDREA NACCARI.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Marzo 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: PEYRON, ROSSI, BOLLATI DI SAINT-PIERRE, FERRERO, CIPOLLA, BRUSA, ALLIEVO, PIZZI e RENIER Segretario. — I Socii MANNO e PEZZI scusano la propria assenza.

È approvato l'atto verbale della adunanza 4 marzo 1900.

Il Presidente comunica la morte seguita in Napoli il 3 marzo 1900 del Socio corrispondente Comm. Bartolomeo CAPASSO. L'annunzio di questa sciagura fu partecipato telegraficamente all'Accademia dalla Società Reale di Napoli, della quale il CAPASSO era Presidente. Il Presidente dell'Accademia ha subito inviato un telegramma di condoglianza ed ha incaricato il Socio corrispondente prof. Michele KERBAKER di rappresentare l'Accademia ai funerali.

Il Segretario presenta, da parte del Socio BOSELLI, il discorso pronunciato da S. E. il Ministro del Tesoro (P. Boselli) alla Camera dei Deputati nella tornata del 20 febbraio 1900 *Sul bilancio dell'entrata*. Sarà ringraziato.

Il Socio FERRERO presenta per le *Memorie* accademiche uno scritto dell'abate F. Gabriele FRUTAZ, *Iblet de Challant capitaine*

général de Piémont et gouverneur de Nice. — Il Presidente delega a riferirne in una prossima adunanza il Socio proponente ed il Socio Cipolla.

Il Socio Renier Segretario presenta per le *Memorie* accademiche una monografia del Dott. Bernardo Sanvisenti *Sul poema di Uggeri il Danese.* — Il Presidente dà l'incarico di riferirne al proponente ed al Socio Graf.

Il Socio Brusa dà lettura di una sua nota sul volume di Achille Mestre, *Les personnes morales et le problème de leur résponsabilité pénale,* ch'egli già annunciò alla Classe nella seduta del 21 genn. 1900. — La nota è inserita negli *Atti.*

Il Socio Ferrero espone il contenuto d'una sua nota *Istruzioni agl'inviati di Francia presso le corti di Savoia e di Mantova,* che è pubblicata negli *Atti.*

Quindi la Classe si costituisce in seduta privata e procede all'elezione del Direttore di Classe. Riesce eletto, salvo l'approvazione sovrana, il Socio Bernardino Peyron.

LETTURE

Sulla responsabilità delle persone morali secondo ACHILLE MESTRE (1).

Nota del Socio EMILIO BRUSA.

Nell'incessante moto dell'esperienza e delle dottrine che più o meno si fondano sulla medesima, certi principii vanno soggetti più di altri alla legge inesorabile delle variazioni successive. Se si eccettuino i principii delle scienze pure, quali sono la logica e la matematica, nelle altre si sovrappongono, con alterna e assidua vicenda, dottrine a dottrine, e agli splendori tengono dietro i tramonti, per tal modo discoprendosi rapporti nuovi, determinandosi nuove funzioni, e le leggi cui soggiace l'ordine delle cose elevandosi e ricollegandosi in sintesi via via meno imperfette.

Nel campo delle discipline morali, come parimenti in tutto quello delle scienze applicate, le variazioni possono talora, se profonde o frequenti, gettare negli animi la sfiducia, scuotere dalla loro base istituzioni e costumanze di grande valore per la quiete e la prosperità generale. Le istituzioni giuridiche, in ispecie, dalla cui conservazione e osservanza dipende l'educazione civica, mal tollerano di essere esposte all'impeto di una balda impazienza riformatrice o rinnovellatrice.

Uno dei progressi che si sono da tempo compiuti nella ragione giuridica, del quale eccellenti furono ognora i frutti, si

(1) *Les personnes morales et le problème de leur responsabilité pénale*, par ACHILLE MESTRE. Paris, Arthur Rousseau, 1899, pp. XIX, 360.

è il principio della personalità della obbligazione che col proprio fatto delittuoso assume il colpevole. Questa obbligazione è sua di lui, e non già eventualmente solidale, e neppure collettiva di persona fisicamente fittizia e inesistente, benchè in diritto, qualificata persona morale o civile. La storia del diritto non lascia il minimo dubbio a questo proposito.

La responsabilità dei corpi collettivi per atti ostili d'insurrezione, rivolta, ammutinamento o tradimento, fu la forma, già progredita, con la quale lo stato ancor debole, o tale ridiventato, preferì esercitare la propria difesa, quando contro tali corpi non sarebbe più stata necessaria una lotta aperta con le armi. Roma costrinse così i municipii ribelli, come più energicamente anche sopprimendoli addirittura. Nei suoi sforzi per debellare i signori feudali, il principato non ha proceduto altrimenti. Ancora oggi vige la responsabilità del Comune per i furti commessi sopra le cose gettate dal naufragio sulla spiaggia vicina. E gli Stati moderni non esitano a obbligare i Comuni alla riparazione dei danni cagionati dalle rivolte e dagli ammutinamenti. Secondo la *common law* inglese, il *hundred* è responsabile di codesti danni appunto.

Da principio quelle reazioni apparivano insiememente difensive e punitive, quantunque si dirigessero contro enti collettivi del diritto pubblico. Ma già sin d'allora non poteva essere estraneo alle medesime il carattere civilistico, che la natura civile della responsabilità implicava necessariamente. È nota l'origine della pena, storicamente connessa alla vendetta privata. E se l'interesse pubblico, rappresentato dalle Comunità, dalle corporazioni e altre persone morali, doveva determinare una più pronta trasformazione della reazione contro quelle di esse che la provocavano con la loro condotta ostile o semplicemente trascurata e perfino soltanto presunta negligente, non per questo però l'impronta dell'offesa e della vendetta potè d'un tratto da privata elevarsi all'altezza di pubblica. Ancor oggi, dopo il grande progresso che pur fece la nozione dello Stato, protettore del diritto e ordinato a sua volta esso medesimo a norma, entro i limiti e con le garanzie del diritto, a raddrizzare i torti di codesti enti collettivi bastano provvedimenti di diritto privato o amministrativo. Quand'anche ai più energici di questi provvedimenti venga conferito il *nomen iuris* di pena pubblica, ciò nondimeno la sostanza

della pena ai medesimi manca sempre in qualche misura, se non affatto. Gli esempi abbonderebbero, ma troppo spesso vengono fraintesi. Il principio *societates delinquere non possunt,* ha per sè l'intima natura del rapporto, nel quale, se vi fosse delitto, questo dovrebbe esistere. E non può dunque essere che un effetto di analogie esteriori, il credere che in tema di responsabilità criminale l'ente collettivo equivalga in qualche limite, anche molto ristretto (per esempio per le sole pene pecuniarie), alla persona fisica realmente esistente.

Il signor Mestre ha voluto esaminare nel suo complesso la importante questione, con un'opera che tratta distintamente delle persone morali e del problema concernente la loro responsabilità penale (1). Sin dalle prime pagine egli pone con molta nettezza i termini del problema quale fu da lui concepito. " Ne peut-on pas dire (così a pag. 26 della Introduzione) que l'individu, membre d'une personne morale, est placé par le fait, dans un milieu qui pourra sans cesse agir sur lui d'une façon plus ou moins déterminante? Si l'acte matériel, constitutif du délit, est accompli par lui, individu, à l'instigation ou sur l'ordre de la personne morale, celle-ci ne pourra-t-elle pas encourir une part plus ou moins large de responsabilité pénale comme complice, tout comme celui qui, " par abus d'autorité et de pouvoir ", a contribué à l'exécution du délit, et est compris à ce titre dans la répression? Ne pourra-t-elle pas enfin être elle-même poursuivie et punie comme auteur principal d'un délit, l'individu qui accomplit le fait matériel étant simplement considéré comme un organe de la personne morale, co-auteur de l'exécution matérielle du délit? "

Alla soluzione di tali quesiti l'autore si è accinto col corredo di tutte le notizie storiche, legislative e dottrinali, che potessero giovare al suo intento. Il libro è scritto con la chiarezza, l'ordine e il metodo che distinguono il giurista provetto in pieno e sicuro possesso del suo argomento. Nella parte storica ci ven-

(1) Egli è anche autore di un eccellente scritto dal titolo: *Autorité compétente pour déclarer l'État débiteur*, Paris, Rousseau, 1890, pp. 120; nel quale con molta dottrina e chiarezza dimostra, che il principio secondo cui l'Amministrazione sola avrebbe il diritto di dichiarare lo Stato debitore, è un principio destituito di fondamento giuridico anche nella legislazione francese.

gono dinanzi le fonti del diritto romano, i glossatori, il diritto canonico, i postglossatori, e l'antico diritto francese, specialmente quello contenuto nella celebre Ordinanza del 1670. La teoria della responsabilità penale delle persone morali è svolta nella seconda parte: nella quale si comincia ad esaminare la possibilità per le persone morali stesse di commettere delitti, sia in quanto esse sarebbero fornite di volontà, sia rispetto agli organi dalle medesime posseduti, nonchè per le condizioni reputate necessarie all'esistenza del delitto loro; indi si passa a esaminare la possibilità di punire le persone morali. Non vi ha teoria riguardante l'uno o l'altro di codesti punti, che non siasi abilmente classificata e discussa dall'autore. Intorno alla volontà delle persone in discorso, non meno di cinque sono le teoriche esposte da lui. Quelle della finzione, della volontà legale, dei diritti senza soggetto, dei destinatari, vengono tutte rigettate. Segue infine la teorica della volontà reale, alla quale soltanto l'autore presta il proprio consenso. Le medesime teorie sono da lui discusse altresì in ordine alla influenza di ciascuna sulla nozione del delitto corporativo. Compiono lo studio, oltre una bibliografia estesissima (non meno di 13 pagine) e un indice alfabetico dei nomi citati e delle materie, tre appendici consacrate al diritto francese vigente in quanto paia all'autore che abbia adottato la sua tesi della responsabilità penale delle persone morali. Di queste appendici la prima riguarda la responsabilità per le colpe dei rappresentanti delle persone morali, in tema di amministrazione forestale e di strade pubbliche; la seconda riproduce le disposizioni della legge 10 vendemmiale anno IV concernenti le responsabilità dei Comuni in caso di attruppamenti sediziosi; e la terza quelle intorno alla responsabilità collettiva in Algeria.

La tendenza odierna di alcuni giuristi a usare e abusare delle analogie, ha condotto a estendere sempre più il campo del diritto penale. In verità questo era ed è già così vasto, grazie principalmente all'enorme infittire dei reati puramente contravvenzionali d'interesse comune di tutto lo Stato o anche solo di interesse locale, che non si sentiva proprio alcun desiderio di aggiungere all' attività del magistero punitivo anche codesta materia dei cosidetti delitti corporativi. Il signor Mestre non ha forse saputo resistere abbastanza a quella pericolosa e certa-

mente non opportuna tendenza, e ai quesiti da lui come sopra formulati, le sue risposte sono state tutte affermative.

Sostenuta anzitutto la realtà della persona morale basata sulla sua volontà giuridicamente efficace, la responsabilità penale egli la deduce da una teoria che sembra far capo all'ambiente. Se per ciò che attiene alla prima proposizione, fa piacere di vedere l'autore poco o punto propenso a seguire le orme di coloro che vanno in cerca del cervello, dei nervi, dei muscoli e di quanto dovrebbe comporre il corpo fisico dell'ente collettivo, per ciò che riflette invece la seconda proposizione, non appare ch'egli abbia perfettamente compreso la gravità e le conseguenze giuridiche della tesi che attribuisce alle *universitates* come tali la capacità di delinquere.

Naturalmente qui non si tratta della responsabilità penale incorsa dal superiore per la contravvenzione commessa dal subordinato, quando il superiore poteva con la propria diligenza impedire il fatto. Nessuno dubita di ciò, e ben fece l'art. 60 del Codice italiano ad affermare questo principio. Neppure si tratta della responsabilità degli amministratori, capi o direttori di un ente collettivo; responsabilità che può essere o penale o civile o anche amministrativa, secondo i casi. La tesi che si vuol proporre ora, estende invece agli enti collettivi la responsabilità penale. Che questi enti siano fisicamente incapaci di agire da sè, lo si riconosce; ma poi si pretende che essi siano perfettamente capaci di agire per opera altrui, quando determinano l'individuo, che fa parte della persona morale, a commettere il fatto, oppure ne eccitano o rafforzano la risoluzione delittuosa, o gli dànno istruzioni per eseguire il reato, o gli promettono assistenza od aiuto da prestarsi, appunto per opera altrui, dopo il reato stesso.

Evidente è il circolo vizioso in cui si aggira l'argomentazione. Gli enti corporativi non possono nè ordinare, nè eccitare o rafforzare le risoluzioni altrui, e va dicendo, se non precisamente per mezzo di coloro che agli enti medesimi appartengono. Del resto, una critica punto per punto degli argomenti addotti in appoggio della tesi, eccederebbe i limiti di questo breve cenno. Qui basti osservare, che in fondo ai medesimi si cela sempre una deplorevole confusione tra diritto privato e diritto penale. La confusione non può essere nata altrimenti che dalla inevitabile sostituzione di persone individuali alle persone corporative, quante

volte si designi il colpevole cui vada applicata la pena. Se a ciò si aggiunga, che nessuna pena corporale si possa mai applicare all'individuo così designato per colpevole, e che questo si fa soggiacere soltanto a pena patrimoniale, dichiarata inconvertibile nella pena carceraria in caso di insolvenza, agevolmente si spiega come i fautori della tesi siano caduti in errore. Se loro però si chiedesse, perchè mai di un supposto reato corporativo non abbia ad essere responsabile la corporazione, ma sibbene questo o quell'individuo che opera per la medesima, è lecito credere che pure in essi comincerebbe a insinuarsi il dubbio sulla saldezza della loro tesi. E ne dubiterebbero ancora più ove si risolvessero a indagare, se vi sia una buona ragione di escludere ogni specie di pena restrittiva della libertà personale, nonchè di negare la convertibilità di quella che colpisce il solo patrimonio, alla quale unicamente credono di potersi appigliare. Ognuno sa tuttavia, che nella scienza e nella pratica moderna primeggiano a buon diritto le pene carcerarie, come quelle che meglio rispondono, nei costumi nostri, al fine che la legge si propone. Eppure tale esclusione nel presente caso non è già dettata dalla considerazione, che alla persona morale manchi la persona fisica la cui libertà vogliasi restringere, perchè la persona fisica esiste nei rappresentanti e negli impiegati. Ma il delitto che questi hanno operato come tali, si vuol mettere a carico dell'ente collettivo rappresentato e amministrato. Qua esiste il patrimonio necessario che deve formare materia o mezzo della punizione, e il torto dei rappresentanti o impiegati si confonde o unifica con quello dell'ente collettivo medesimo. Si capisce bene allora, che il castigo irrogato, altro non possa essere che un castigo di carattere patrimoniale. D'altra parte, sospendere o sopprimere la vita giuridica della persona morale, non è atto vero di punizione, ma piuttosto di amministrazione, e ad ogni modo potrebbe eccedere l'entità del reato.

Nell'esercizio della sua missione di regolatore supremo dei rapporti giuridici, lo Stato ben può, ove lo stimi necessario od opportuno, stimolare l'attività dei rappresentanti e degli impiegati di una corporazione o altra persona morale, ricorrendo anche a penalità amministrative o civili che dir si vogliano, da applicarsi all'ente collettivo in forma di limitazione patrimoniale e persino nella forma di sospensione o soppressione della vita giuridica. Ma in ciò nulla ha che vedere il diritto pubblico penale propria-

mente detto. Quel provvedimento serve solo ad avvertire gl'interessati in quell'ente corporativo, del bisogno di por rimedio alle irregolarità dell'amministrazione, sia redarguendo, sia licenziando direttori, capi o altri impiegati, sia in altro modo.

Il signor Mestre si persuada dunque, che dove occorra richiamare un ente morale alla retta osservanza de' suoi doveri, non fanno difetto le adeguate sanzioni, sì civili che amministrative, e che dove ci sia davvero un reato punibile nell'interesse della sicurezza generale dei consociati, del medesimo sarà responsabile di certo una persona reale, e non una fittizia o morale o giuridica. Egli potrà così intendere meglio il grande insegnamento che scaturisce da tutto lo svolgimento storico del diritto, e secondo il quale la disintegrazione degl'istituti, dei loro fini e dei loro mezzi specifici, è stata ed è sempre la condizione precipua di ogni progresso in queste discipline. Col progredire dei costumi si rendono via via più delicati i sentimenti, più distinti e precisi i giudizi, più appropriati e armonicamente coordinati i mezzi di attuazione. E ciò che accade nel campo legislativo, egualmente si riscontra in quello giudiziario ed esecutivo. Le sanzioni penali destinate ai colpevoli, hanno la maggiore probabilità di essere effettivamente applicate; non altrettanto può affermarsi che sarebbe di quelle che minacciassero i terzi irresponsabili. Nè vale lo sforzo di coloro che distinguono i reati di così detta creazione politica dagli altri. O quelli sono vere violazioni del diritto della comune sicurezza, e non formano eccezione; o stanno invece da sè come qualcosa di arbitrario o accidentale senza nesso alcuno con le ragioni di questa sicurezza, e allora debbono farsi rientrare nella loro naturale orbita dei reati civili o amministrativi, reati che interessano rapporti di diritto privato o di diritti meramente corporativi sociali o pubblici, e di subiezione disciplinare.

Il legislatore italiano, che al fine di meglio assicurare l'osservanza degli orari si è messo nella via di applicare il principio della responsabilità penale alle società assuntrici dell'esercizio delle strade ferrate, dopo di avere dovuto riconoscere che limite insormontabile a ciò fare era, per un lato, la natura morale o civile della personalità che volevasi incolpare dei ritardi, ha, da altro lato, creduto di poter surrogare nella responsabilità penale i direttori generali o direttori d'esercizio che rappresentano le società stesse. *Incidit in Scyllam qui vult vitare Carybdim.* Anche

ammesso che la colpabilità propriamente penale possa cominciare già con la *culpa in eligendo*, è però chiaro che di nessuna colpa possano essere addebitati quei direttori, che nelle nomine e nell'esercizio della vigilanza e direzione loro su tutto il servizio da essi dipendente, nulla abbiano ordinato o trascurato contro i doveri loro imposti dalle leggi, dai regolamenti o da altre norme amministrative. In cosiffatti casi la pena sarebbe tirannica e andrebbe contro il suo scopo; e però giudici e amministratori non esiterebbero a dichiararla inapplicabile, senza ottenere d'altra parte che le società venissero eccitate a migliorare il servizio da loro assunto nel pubblico interesse. Che se le penalità pecuniarie minacciate dalla legge avessero a ricevere effettiva irrogazione, si verrebbe a gettare quei direttori in una dura e ingiusta alternativa, o di abbandonare i loro posti, o di dover accettare dalle casse delle società il danaro necessario per pagare le ammende. In questa seconda ipotesi la legge verrebbe indirettamente a colpire ancora la società, ciò che sarebbe stato più sincero fare invece direttamente, ma sempre soltanto in via amministrativa.

Istruzioni agl'inviati di Francia presso le corti di Savoia e di Mantova.

Nota del Socio ERMANNO FERRERO.

Nel chiudere la breve relazione, che, alcuni anni sono, ho fatto alla Classe accademica, del volume contenente le istruzioni ai rappresentanti della Francia presso le corti di Napoli e di Parma, io manifestava il voto che il modello dei volumi precedenti, trascurato dall'editore di questo, di nuovo fosse ripreso nel proseguimento dell'importante pubblicazione (1). I volumi, poscia usciti, delle istruzioni agl' inviati in Ispagna per cura dei signori Morel-Fatio e Léonardon, quello agli agenti in Danimarca, allestito dal profondo conoscitore della storia scandinava, il compianto Geffroy, sono di nuovo degni di lode, secondo il parer nostro, per la chiarezza, la precisione, la serietà dell'introduzione e delle note, che illustrano e collegano i documenti. Da tale ottimo sistema non si è scostato il conte Horric de Beaucaire, il quale, nell'anno passato, stampò in due volumi la raccolta delle istruzioni agli ambasciatori ed agli altri inviati alle corti di Savoia e di Mantova (2). Come ho fatto per altri volumi di questa collezione (3), dirò alcune parole intorno a questi due ultimi, tanto più volontieri dacchè i documenti in essi compresi si riferiscono alla storia italiana e specialmente a quella del nostro Piemonte.

In un'introduzione di un centinaio di pagine l'editore riassume le vicende delle relazioni diplomatiche fra la casa di Sa-

(1) *Atti della R. Accademia delle scienze*, vol. XXVIII, 1892-93, p. 800.

(2) *Recueil des instructions données aux ambassadeurs et ministres de France* etc. — *Savoie-Sardaigne et Mantoue* avec introduction et notes par le Comte Horric de Beaucaire. Paris, Félix Alcan éditeur, 1899; 2 vol. in-8° di pagg. c-432 e 451.

(3) *Atti della R. Accad.*, vol. XIX, 1883-84, p. 213-224; XXI, 1885-86, p. 317-324; XXVIII, 1892-93, p. 787-800.

voia e la Francia dalle origini di quella alla Rivoluzione, con brevità sino al 1648, con maggiore larghezza da quest'anno, assegnato come principio della serie delle istruzioni francesi. Egli si mostra assai bene informato della storia esterna dello Stato sabaudo, conosce parecchi lavori pubblicati dai nostri scrittori; specialmente si vale di una buona guida, la storia diplomatica del Carutti. In generale intende assai bene, e quindi convenientemente giudica la politica dei nostri principi, senza ripetere le declamazioni contro la loro ambizione, il facile mutare di amicizie e di alleanze, i molteplici ed intricati maneggi. " Posta tra i due rivali, la Francia e l'Impero; stabilita nei " passi delle Alpi, di cui ciascuna delle due parti a volta a volta " ha bisogno per penetrare presso il suo avversario; cercata " successivamente dalle case di Francia e d'Austria; abile al " momento propizio nello strappare concessioni vantaggiose: " talora schiacciata nella pianura e spogliata delle sue provincie " italiane o francesi, ma conservando sempre nelle gole de' suoi " monti un germe di vita propria e di rinascimento costante, " la casa di Savoia trovò nello stesso contatto de' suoi due formidabili vicini il principale elemento del suo ingrandimento e " della sua forza " (1). Così scrive il Beaucaire, che ad Emanuele Filiberto, venuto nel momento, in cui " occorreva un uomo di " alto ingegno ed una serie di avvenimenti felici per salvare la fortuna della casa di Savoia " (2), dà lode di valente capitano e di savio amministratore. È forse un po' troppo duro con Carlo Emanuele I; ma dice Vittorio Amedeo I " uomo onesto, valoroso " sul campo di battaglia, pieno d'onore e di rettitudine " (3). Di Vittorio Amedeo II addita le buone qualità e i difetti " astuto " e dissimulatore, pieghevole e temporeggiatore, e nello stesso " tempo valoroso e fiero; alto ne' suoi disegni, sovente basso " ne' suoi mezzi, a volta a volta chiuso ed aperto, taciturno e " loquace secondo che voleva confondere od affascinare, custodire o strappare un segreto. Dalla sua infanzia egli aveva " nutrito contro sua madre un sordo rancore. Per lui, come per " i Piemontesi, i Francesi sono il nemico, la cui mano di ferro

(1) T. I, pag. XIX e seg.
(2) Pag. XXI.
(3) Pag. XL.

“ doma e soffoca. Gli atti del Louvois non fecero che svolgere “ in lui questi sentimenti „ (1). Dà ragione della rottura dell'alleanza francese nel 1690, e biasima il Louvois, che spinse il duca a questo passo, per voler imitare la condotta del Richelieu nel 1638 e nel 1639, ma dimenticando che “ in politica “ la brutalità si giustifica qualche volta; ma le molestie sono “ sempre un errore „ (2). Non ne condanna l'uscita dall'alleanza franco-spagnuola nel 1703, e non tace le ragioni, da cui Vittorio Amedeo fu indotto a staccarsi dai collegati, coi quali solo con ripugnanza aveva dovuto unirsi.

Ha molta stima per Carlo Emanuele III: lo chiama “ una “ grande figura „; ripete il giudizio del Gibbon che questo monarca teneva, “ dopo l'incomparabile Federico, il secondo posto “ fra i sovrani di Europa „. E soggiunge: “ Suo padre ed egli “ avevano regnato insieme quasi tutto un secolo. Pochi paesi “ presentano, durante un periodo di cento anni, una serie più “ feconda di avvenimenti utili, una linea di condotta politica “ meglio seguita, principi più atti a governare e più persuasi “ della grandezza della loro missione „ (3). Comprende il procedere di Carlo Emanuele III sulla fine della guerra di successione polacca: “ Quando vide chiaramente che tutte le conquiste, che “ egli aveva contribuito a fare, andavano specialmente a profitto dell' infante don Carlos, cioè in fatto della Spagna, il “ re di Sardegna restrinse la sua cooperazione al puro necessario. Prolungando il loro sforzo, gli alleati avrebbero potuto “ gettare gli Austriaci fuori d'Italia „. Fin qui verissimo: ma con quanto dice prima di chi avrebbe realmente profittato da questa guerra non ci sembra concordi ciò che soggiunge: “ la “ penisola si sarebbe così trovata compiutamente libera dal giogo “ straniero „. No, agli Austriaci sarebbero di nuovo sottentrati gli Spagnuoli. “ Il re di Sardegna preferì mantenere una condizione di cose, che gli permetteva di scontare l'avvenire, continuando il suo sistema di altalena tra la Francia e l'Austria „ (4). La storia dice che ha fatto bene.

---

(1) Pag. LIII.
(2) Pag. LVI.
(3) Pag. XCIII.
(4) Pag. LXXIX.

È equanime pure con Vittorio Amedeo III. " Il successore ' di Carlo Emanuele III non si mantenne all'altezza de' suoi pre- ' decessori... Nessun principe forse era animato da sentimenti ' più nobili di lui „. E ne riporta il favorevole ritratto fattone da un contemporaneo. " Non ostante queste qualità stimabili egli ' non era di misura per dirigere un movimento, che le sue ere- ' dità di principe assoluto gl'impedivano insino di comprendere. ' Egli non era nè chiaroveggente, nè energico, e mancava di ' autorità. Sopra tutto, egli ignorò sempre l'arte di sapere sce- ' gliere i suoi consiglieri „ (1).

Come l'introduzione sono fatte con cura le notizie preposte ad ogni missione per chiarire lo stato delle relazioni al momento, in cui questa aveva principio. Il Beaucaire con le istruzioni date agli ambasciatori permanenti congiunge le più notevoli ricevute da agenti temporanei, e quando, nel corso di un'ambasciata, avvennero fatti importanti, che resero necessarie nuove direzioni, egli estrasse dal carteggio della corte parecchi di tali documenti, aggiungendo all'uopo qualche lettera degl'inviati. La Commissione degli archivii diplomatici, che ha promosso la raccolta delle istruzioni, già da quindici anni ha stabilito la pubblicazione della corrispondenza politica dei rappresentanti francesi all'estero, la quale dev'essere il compimento delle istruzioni. Ma sì fatta pubblicazione va assai a rilento (2); onde togliere da essa qualche notevole documento e servirsene a dichiarare le istruzioni ci pare sia cosa opportuna, e non guasti il disegno stabilito dalla Commissione nell'approvare la raccolta delle istruzioni.

Il momento, in cui principia la collezione, per le relazioni tra Piemonte e Francia non ha alcuna importanza. Col trattato di Cherasco del 1631 il ducato sabaudo era tornato in pace con la potente vicina: i legami fra di essi erano stati rinserrati dai

(1) Pag. XCIII, XCVI e seg.

(2) Oltre al volume contenente il carteggio del Castillon e del Marillac, ambasciatori in Inghilterra (1538-1540), che altra volta annunciammo (*Atti della R. Accad.*, vol. XXI, pag. 322), non videro ancora la luce che la corrispondenza di un altro ambasciatore in Inghilterra, l'Odet de Selve (1546-1549), e le carte del Barthélemy, ambasciatore in Isvizzera (1792-1797), (5 vol.) di tanta importanza per il periodo della Rivoluzione.

trattati di Rivoli del 1635 e del Valentino del 1645. La pace di Vestfalia, ai cui negoziati intervennero pure i rappresentanti di Savoia, confermò le stipulazioni di Cherasco, ma non ricondusse la quiete in Piemonte, che non si ebbe se non quando la Spagna si rappattumò con la Francia col trattato de' Pirenei (1659). Durante i negoziati di Münster, il Mazarini, irritato contro i plenipotenziarii sabaudi, aveva richiamato l'ambasciatore di Francia a Torino sulla fine del 1645. Tre anni dopo, si ristabilivano le relazioni diplomatiche fra le due corti; presso la sabauda era mandato ambasciatore il presidente Servien (1648). Le sue istruzioni hanno mediocre importanza. Più notevole la memoria trasmessagli nel 1672 circa le questioni tra Carlo Emanuele II e Genova, origine di una guerra, che il re di Francia, il quale allora cominciava la spedizione d'Olanda, ad ogni costo voleva veder finita. Se i buoni consigli non bastavano al duca, si doveva ricorrere alle minaccie. Alla stessa questione, in cui Luigi XIV era stato dichiarato arbitro, si riferiscono pure istruzioni del medesimo anno al signore di Gaumont. Di poco rilievo quelle ad altri agenti temporanei durante la lunga legazione del Servien, che assistette alla morte di Carlo Emanuele II (1675) ed al principio della reggenza della vedova Maria Giovanna Battista, anch'essa inchinevole verso Francia, sua patria. Questa è alle prese con Ispagna ed Impero. Una diversione in Lombardia, d'accordo con la corte di Savoia, può tornare utile, come ha giovato l'aiuto concesso a Messina sollevata contro gli Spagnuoli. Svegliare l'ambizione della pacifica corte di Torino è il punto principale indicato al marchese di Villars, mandato nel 1676 a succedere al Servien. L'anno appresso è spedito in missione straordinaria il cardinale d'Estrées per indurre la reggente a far lega per la guerra di Lombardia; ma questa guerra, nella mente di Luigi XIV, non è più che una finta minaccia alla Spagna per affrettare la conclusione dei negoziati di Nimega.

L'abate d'Estrades, venuto al posto del Villars, che era diventato sgradito alla corte ducale (1679), conchiuse con questa un trattato di alleanza difensiva il 24 di novembre 1682. Poco dopo (1684), Vittorio Amedeo II, giovane di anni, maturo di consiglio, afferrava con mano robusta le redini del governo. A Versailles era noto il suo animo; prevedevasi quindi il pericolo di un cambiamento nella condotta amichevole verso la Francia seguita dal

padre e poi dalla madre del principe. Per evitare sì fatto pericolo suggerivasi al marchese d'Arcy, nominato ambasciatore ordinario nel 1685, di osservare attentamente gli atti del duca. " Quantunque non vi sia da dubitare che il duca di Savoia, avendo " l'onore di essere nell'alleanza di Sua Maestà, non le rimanga " sempre vincolato inseparabilmente, tanto più che la potenza " di questa e i forti presidii da essa tenuti a Pinerolo ed a Ca- " sale non permetterebbero a questo principe di prendere im- " punemente un altro partito, tuttavia siccome la sua propen- " sione per il ritiro, il suo umore severo e dissimulato e la sua " avversione affatto pubblica per i consigli di sua madre e dei " ministri più inchinevoli alla Francia possono dare qualche " motivo di credere ch'egli non avrà sempre tutta la dovuta " deferenza per ciò, che gli sarà detto da parte di Sua Maestà, " e che, se potesse, prenderebbe qualche concerto con la Spagna, " con la speranza di governare più assolutamente e più indi- " pendentemente da Sua Maestà, così il marchese d'Arcy deve " osservare con cura tutti i passi di questo principe e sopra ogni " altra cosa impedire che riceva qualche ministro di Spagna in " corte per risedervi e per negoziare „ (1).

Nel 1690 il conte di Rébenac succede al d'Arcy: il malumore del duca è cresciuto e più chiaramente si è palesato; ma in Francia non si crede ancora ch'egli voglia sciogliere l'alleanza. Pinerolo e Casale continuano ad essere tenute come freni sufficienti; ma occorre avere gli occhi ben aperti sulla sua condotta, non lasciargli accogliere ministri spagnuoli, informare di qualunque leva od aumento dell'esercito ducale. Pochi mesi dopo, Vittorio Amedeo si univa coi collegati d'Augusta a crescere il numero dei nemici di Luigi XIV. Scoppia la guerra: la Savoia è perduta, il Piemonte invaso, le armi francesi trionfano sui nostri campi. Durante la guerra, più volte si avviarono pratiche o dal re o dal duca per venire ad un accordo: per queste l'editore riporta solamente le istruzioni ricevute nel 1691 dallo stesso Rébenac, che aveva suggerito di profittare del soggiorno, che dicevasi il duca avrebbe fatto a Venezia per andare in quella città a tentare di staccarlo dalla Lega. Si venne finalmente ai trattati del 29 di giugno 1696, stipulati da parte di Francia

(1) Pag. 128.

dal conte di Tessè, il quale già era intervenuto in precedenti negoziati, e le cui istruzioni (18 marzo 1696) sono contenute nella serie.

Il re di Francia fu poscia rappresentato a Torino dal conte di Briord (1697). A Versailles si è compreso che i modi imperiosi e le dure parole non servono che ad irritare il principe di Savoia: si raccomanda alla prudenza del nuovo inviato di evitare le minaccie nell'adempimento della sua missione intesa a mantenere la pace e a dissuadere il duca da qualunque disegno, che la possa turbare. Quando nel maggio del 1700 il Phélipeaux prese il posto del Briord, grosse nubi si addensavano sul cielo d'Europa: la questione dell'eredità del malaticcio re di Spagna teneva le corti in ansia ed in lavoro. È facile prevedere che il duca di Savoia non si lascierà sfuggire l'occasione di farsi innanzi. È dipinto nelle istruzioni all'ambasciatore come " un principe sempre occupato del suo ingrandimento e di varii " disegni per giungervi, diffidente, dissimulatore, persuaso che " egli penetra nei pensieri più segreti di coloro, che parlano con " lui, attento a non lasciare scoprire i proprii e credendo di " nasconderli con espressioni spesso molto lontane dai suoi veri " sentimenti. Ma la sua indole è talmente conosciuta in tutte " le corti, che, qualunque sia il suo desiderio di negoziare, egli " trova da ogni parte una diffidenza uguale su tutte le parole, " che potrebbe dare „ (1). Per essere compreso nella divisione degli Stati di Carlo II ha maneggiato a Vienna e a Londra: ha sperato che il re di Francia gli offrisse di procurargli il Milanese contro la cessione della Savoia e di Nizza. Bisogna lasciarlo nell'incertezza sugl' intendimenti della Francia, fargli sperare vantaggi da questa acciocchè non prenda alcun impegno con l'imperatore. Gli affari importanti si devono trattare direttamente con lui. " Dopo la morte del marchese di San Tommaso " niuno sembra abbia nella sua fiducia la stessa parte avuta da " questo ministro. Si è creduto lungo tempo a Torino ch'egli la " darebbe intera al presidente de la Tour, dopochè gli conferì " l'ufficio di segretario di Stato al suo ritorno dall'Olanda. Pa- " reva anche molto disposto ad aprirsi col conte di Govone. " che egli spedì presso Sua Maestà subito dopo il trattato del

(1) Pag. 211.

" 1696. Ma nè l'uno nè l'altro ebbero poscia tutto il favore, a " cui si credeva sarebbero stati inalzati, ed ogni giorno con- " ferma la diffidenza, che il duca di Savoia ha verso quelli, " che lo avvicinano „ (1). Bisogna agire con prudenza con " questo " principe ambizioso, inquieto, dissimulatore, geloso della sua " autorità, diffidente e disugualissimo ne' suoi umori... Il re " ha principalmente approvato le precauzioni del conte di Briord " per regolarsi con uno spirito di questa fatta. Esse consiste- " vano sopra tutto a non essere più assiduo presso questo prin- " cipe di quanto egli desiderasse, ad insinuargli ed a lasciargli " piuttosto pensare le cose che a dirgliele, a non entrar punto " in ciò, che ha tratto sia alla sua condotta particolare, sia a " quella verso i suoi popoli, non mostrare alcuna curiosità sui " suoi intenti e sui suoi disegni, ascoltare ciò che vuol dire " piuttosto con indifferenza che con attenzione, passare sotto si- " lenzio certe riserve, ch'egli osserva e fa osservare circa l'am- " basciatore di Sua Maestà; non fermarsi troppo a volerlo per- " suadere, con la ragione, della giustizia di ciò che gli si chiede " per non ispingerlo troppo innanzi nel partito del negare, che " il suo umore gli fa prendere facilmente e sostenere con osti- " nazione „. Dei ministri il marchese di San Tommaso, succe- duto a suo padre, non avrà mai il credito nell'animo del prin- cipe, che questi ha avuto; egli " è piuttosto un canale per " parlare che per persuadere „. Il conte de la Tour " è più fino " ed artificioso. Lo si consulta sovente negli affari, ed egli ne " saprebbe assai per procurarsi credito, se il duca di Savoia " non si fosse fatto un principio di non pigliar altro consiglio " che da sè stesso „ (2). " Un principe quale è stato dipinto il " duca di Savoia, il quale non prende consiglio che da sè stesso, " che non confida i suoi disegni per l'attuazione che ad un solo " ministro, che ora non ha alleanza certa, nè altro principio nella " sua condotta che il desiderio d'ingrandirsi, una riserbatezza ed " una diffidenza continue ne' suoi discorsi, non è facile ad essere " penetrato „ (3). Si raccomanda all'ambasciatore di scoprire più che potrà dei disegni del duca, lo s'informa di ciò che si sospetta

(1) Pag. 214 e seg.
(2) Pag. 218 e segg.
(3) Pag. 223.

circa le sue intenzioni. Gli si dànno anche ragguagli sugli altri principi d'Italia: il papa ben disposto verso la Francia, ma inoltrato negli anni e pieno di acciacchi; il granduca di Toscana, che si tiene per vassallo dell'Austria, teme la guerra, ha lo stato impoverito dalla mancanza di commercio e dalle grosse somme date all'imperatore; il duca di Mantova, tuffato nei piaceri, oppresso dai debiti sì da non avere, in caso di bisogno, di che pagare un presidio nella sua capitale; quello di Modena affezionato alla corte di Vienna e dissipatore; migliore quel di Parma; i Genovesi propensi a Spagna. I principi d'Italia hanno motivo di ruggine col duca di Savoia, e diffidano di lui, " persuasi ch'egli cagionerebbe all'Italia le più gravi disgrazie " per accrescere i suoi Stati... I popoli del Milanese, che altra " volta aveano avuto propensione per la casa di Savoia, ...si " sottometterebbero all'imperatore o a qualsivoglia altra potenza " piuttosto che al duca di Savoia „ (1).

Pochi mesi dopo, al Tessè si affidava l'incarico d'intrattenere Vittorio Amedeo sul disegno di acquisto del Milanese, per il quale, oltre alla Savoia, si dovevano chiedere larghi compensi, che si potevano poi ridurre alle contee di Nizza e di Tenda. La morte di Carlo II (1° novembre 1700) e il suo ultimo testamento, che lasciava intera la monarchia spagnuola al nipote di Luigi XIV, troncarono queste pratiche. La guerra in Italia è imminente. In fine dell'anno si rimettono al Tessè altre istruzioni per provvedere alla difesa della Lombardia e per concertare col duca di Savoia il passaggio delle soldatesche francesi per i suoi Stati. A queste tengono dietro le istruzioni al signore di Liboy per vegliare sulla persona del conte di Vernone, ambasciatore di Savoia in Francia, che Luigi XIV tratteneva a Parigi, come rappresaglia dell'imprigionamento del Phélipeaux ordinato da Vittorio Amedeo al momento, in cui spezzò l'alleanza francese (1703). Altre istruzioni sono poscia date allo stesso Liboy per accompagnare il Vernone ad Antibo (1704).

L'imperatore, gonfio per le vittorie delle sue armi in Italia, mostrò chiaramente il suo intento di tener soggetta la penisola: di qui timori nei principi e nelle repubbliche, nei quali la Francia sperò trovare i nodi per formare una lega di Stati italiani contro

(1) P. 221, 224 e seg.

il monarca cesareo. A negoziare in tal senso a Roma, a Firenze, a Venezia, a Genova fu rinviato nel 1708 il Tessè, il quale al duca di Savoia doveva fare cospicue promesse, principale il Milanese col titolo regio. Questa missione non sortì effetto; ma, due anni dopo, Vittorio Amedeo avviava col maresciallo di Berwick, comandante dei Francesi nel Delfinato, segreta pratica, a cui spettano parecchie carte riportate nell'opera.

Al ripristinarsi delle relazioni diplomatiche tra Francia e Savoia, dopo la pace di Utrecht, fu nominato ambasciatore di quella il marchese di Prie. Le sue istruzioni (28 marzo 1714) sono di poco posteriori alla conclusione del trattato di Rastadt tra l'Impero e la Francia (14 marzo), il quale aveva lasciato di malumore il nuovo re di Sicilia, che indarno si era destreggiato presso Luigi XIV acciocchè nel nuovo trattato fossero confermati i patti di Utrecht, che lo concernevano. Il marchese di Prie deve dissipare questo malumore; persuadere Vittorio Amedeo che il re di Francia non ha tralasciato nulla per soddisfarne il desiderio; dimostrargli che di poco conto sarebbero i soccorsi, che per avventura può sperare dall'Inghilterra, e che il suo vantaggio sta nel mettere ogni studio a conservare la pace. " L'utile " proprio sarà sempre il primo movente de' suoi atti. Niuno meglio " di lui conosce in che questo utile consista, e meglio intende a " conseguirlo. Nessun impegno non lo ha giammai stornato, e " quando egli ha creduto trovare il suo vantaggio in un partito " piuttosto che in un altro, i legami più forti sono stati troppo " deboli per trattenerlo. Se la sua reputazione ne ha sofferto, i " suoi Stati si sono notevolmente aumentati; ma bisogna ch'egli " conservi i suoi acquisti, e solo con una condotta opposta a " quella sinora tenuta li potrà mantenere.

" ... È prudente dubitare delle sue parole e non manisfestare " diffidenza alcuna della sua sincerità. Altrettanto egli ama ce- " lare i suoi veri sentimenti quanto si studia di scrutare e di " penetrare i più segreti pensieri di coloro, che trattano con lui, e " certamente egli vi può riuscire meglio di qualunque altro, poichè " a molto ingegno congiunge molte cognizioni acquistate con una " estrema applicazione ad ogni sorta d'affari e con l'esperienza, " che ha fatto della buona e della cattiva fortuna. Egli ne ha " tratto istruzioni così buone da non aver bisogno di ministri " che per effettuare alla lettera gli ordini, che dà loro. In questo

" modo si serve del marchese di San Tommaso „ (1). La corte francese riconosce gli sforzi del nuovo re per rendere florida la Sicilia e trarne vantaggi sconosciuti agli Spagnuoli e quelli per conciliarsi l'affetto dei sudditi dell'isola. Ma " è difficile addo-" mesticare una nazione disposta a mormorare ed a lagnarsi, " qualunque sia il trattamento che riceva, buono o cattivo. La " nobiltà era malcontenta di vedere le sue esazioni e la sua " tirannide represse dal nuovo ordine, che il re di Sicilia vuole " stabilire. I popoli si lagnano delle nuove imposte e della con-" tinuazione delle antiche. L'antipatia di tutti i Siciliani per i " Piemontesi è generale, e l'attenzione che il re, loro signore, " porta nel reprimere questi ultimi e nel punirli per il menomo " fallo, che commettano, rende gli altri più insolenti, persuasi " che non istà che ad essi di farsi temere „ (2). L'ambasciatore si deve recare in Sicilia, dove allora si trovava Vittorio Amedeo, e raccogliere informazioni su quel regno e sulle novità introdottevi dal re " per ricavare tutti i vantaggi, che può produrre " uno Stato abbandonato da molto tempo, ma che diverrà fioren-" tissimo quando sarà ben governato, come sarà certamente per " opera di un principe molto attento al bene de' suoi affari „ (3).

Al marchese di Prie, che finì la sua legazione nel 1719 non fu dato un successore sino al 1725, in cui venne il conte di Cambis. Additando a questo diplomatico lo scopo da raggiungere, cioè di stringere legami col re di Sardegna, cosa che " nell'incertezza del giro, che prenderanno gli affari d'Europa... " è la più conveniente ed anche la più necessaria, „ si rifà il ritratto di Vittorio Amedeo " uno dei più abili principi d' Eu-" ropa, tanto per le sue qualità naturali quanto per le cogni-" zioni, che la necessità e l'esperienza nei casi difficili e spinosi " gli hanno acquistato. Ha molto umore, e vi si abbandonerebbe " volontieri, ma la riflessione lo trattiene. Trae tutto dal suo " proprio fondo e dal grande uso, che ha degli affari, non do-" vendo nulla all'educazione ed allo studio. Egli non fa caso " che di ciò, che ha tratto al bene ed all'utilità de' suoi affari.

(1) Pag. 293 e seg.
(2) Pag. 295.
(3) Pag. 299

" a cui si dà interamente. La sua politica e le sue massime sono
" attinte dalle sue idee, tutto sagrificando ai suoi disegni d'in-
" grandimento, che ha e verisimilmente avrà sempre. Una volta
" (e vi è molta apparenza che sia ancora così adesso) egli go-
" vernava unicamente da sè, compiendo nel medesimo tempo ciò
" che poteva fare il principe più capace ed il ministro più abile
" e più esperimentato. I suoi disegni ed i suoi negoziati sono
" stati condotti sovente al punto dell'attuazione e della conclu-
" sione, prima che vi avessero la menoma parte que' ministri,
" in cui poneva maggiore fiducia. Egli ha l'abilità di condurre
" le persone, con cui si trattiene, a parlare di ciò che vuole e di
" giungere a conoscerle bene. Non vi è per così dire nulla, di cui
" egli ignori i particolari, sia guerra, sia finanza, sia commercio.
" Se non è mutato, il conte di Cambis troverà in lui un'avversione
" tale per l'adulazione che niuno oserebbe dargli in faccia una
" lode, ed una divozione sincera e regolare, ma senza ostenta-
" zione ". Si parla altresì dei ministri. Il marchese Solaro del
Borgo, segretario per gli affari esteri, " ha servito lungo tempo
" il re di Sardegna in Olanda durante l'ultima guerra, e fu il
" suo secondo plenipotenziario al congresso di Utrecht, dove si
" fece conoscere per ministro intelligente, abile, vigilante e ar-
" dentissimo per il vantaggio del suo padrone. Nel corso di
" questo congresso gli sfuggirono spesso discorsi, che non mo-
" stravano una perfetta saviezza; ma ciò, senza dubbio, era
" l'effetto della condizione vantaggiosa, in cui sentiva gli affari
" del suo padrone, il quale era favorito altrettanto e più di ogni
" altro alleato dalla regina Anna d'Inghilterra, che faceva il
" personaggio di arbitro ad Utrecht, non essendo credibile che
" un uomo così destro, così fino e così dissimulatore, non sappia,
" quando reputi ciò necessario, usare moderazione e pieghevo-
" lezza ". Col conte Provana, segretario per la guerra, poco avrà
da fare l'ambasciatore, che dovrà procacciarsi la fiducia del
marchese di San Tommaso, il quale, quantunque viva in una
specie di ritiro, tuttavia pare goda sempre l'amicizia del sovrano,
da cui molto spesso è consultato. " Questo marchese è nato con
" un ingegno assai ristretto, ma il re di Sardegna si studiò altra
" volta e riuscì di farne un ministro assai intelligente e capace
" di esattezza e di precisione nell'attuazione de' suoi ordini.
" Con queste qualità, di cui il marchese di San Tommaso è de-

“ bitore alle cure del suo padrone, egli sempre mostrò probità,
“ discretezza e fedeltà „ (1).

Il Cambis è da poco in Piemonte, quando Austria e Spagna si congiungono nell'alleanza di Vienna, alla quale Francia, Gran Bretagna e Prussia contrappongono quella di Annover. L'Europa si divide in due gruppi; ciascuno si adopera a trarre a sè altri Stati. Austria e Francia cercano ad un tempo di avere nella loro lega la Sardegna. Il Cambis, che si era allontanato da Torino per recarsi nel suo paese, è rimandato da noi nell'ottobre 1725, recando altre istruzioni per giungere alla desiderata unione con Vittorio Amedeo. L'anno appresso, il cardinale Fleury si vale per questo scopo di un agente segreto. Ma nè queste pratiche, nè quelle dell'ambasciatore e dell'incaricato d'affari Blondel, che resse la legazione di Torino dal 1728 al 1732, riuscirono al segno. Intanto sul trono è salito Carlo Emanuele III, col quale il conte di Vaulgrenant, nominato ambasciatore nel 1732, si deve industriare per fermare un trattato di difesa e di mutua garanzia. “ Quantunque sia verosimile che il re di Sar-
“ degna stenterà a conservare in Europa la medesima rappre-
“ sentazione e il medesimo credito, che il re Vittorio aveva
“ saputo acquistarsi, nonpertanto non si deve tralasciare di
“ tenerlo come una potenza, che, per la posizione de' suoi Stati,
“ merita di essere trattata con cura e cercata nelle condizioni
“ come l'attuale, in cui l'Europa non ha ancora un sistema as-
“ sicurato. Il re di Sardegna, per la necessità, in cui è stato
“ od ha creduto essere di prendere precauzioni contro disegni
“ reali o pretesi del re suo padre, perdette il sussidio della di-
“ rezione e dei consigli di questo principe capaci di portarlo a
“ formare ed a porre in atto i più grandi disegni ed a prendere
“ i partiti più convenienti al suo vero utile negli affari gene-
“ rali. Ma egli potrà ancora supplirvi con l'uso, che farà delle
“ idee, delle massime e de' principii, che il re, suo padre, ha
“ lasciato a lui come ai ministri della corte di Torino, che li
“ seguiranno forse più volontieri di quanto non abbiano fatto
“ per i movimenti della riconoscenza verso il re Vittorio, a cui
“ essi sono debitori del loro inalzamento e di tutto ciò, che pos-

(1) Pag. 320 e segg.

" sono sapere nell'amministrazione degli affari „ (1). Così cominciano queste istruzioni del 17 di marzo 1732, quando ancora viveva Vittorio Amedeo II, intorno alla cui prigionia il Vaulgrenant deve serbare " un silenzio assoluto con tutti. Egli, ri-
" vestito del carattere di ambasciatore, non potrebbe toccare
" di questo soggetto, senza che si prendesse ciò che direbbe
" come una manifestazione del modo di pensare del re di Francia.
" Per conseguenza sarebbe difficile che egli non biasimasse ugual-
" mente e l'azione e le circostanze, di cui non gli sono stati
" forniti particolari così ampii ed importanti da giustificare in-
" teramente ai suoi occhi un'azione, la quale da sè stessa getta
" una fatale prevenzione negli animi. Sua Maestà vuole rispar-
" miare tale disgusto al re di Sardegna, già assai da compian-
" gere nella disgrazia, ch'egli ha, di tenere, forzatamente o vo-
" lontariamente, suo padre prigioniero.

" Questo silenzio, se è vero che i ministri temono che il
" re si apra su tal fatto, li conterrà più che una riprovazione,
" la quale rimarrebbe senza effetto; poichè allora non soltanto
" finirebbe il loro timore, ma questo darebbe posto ancora al
" risentimento, che li indurrebbe ad attraversare tutto ciò, che
" la Francia tenterebbe presso il re di Sardegna. Uomini, che
" furono capaci o di consigliare al loro padrone o di non combat-
" tere il partito da lui preso verso suo padre, non sarebbero
" più scrupolosi a portarlo, contro il suo vero utile, a darsi
" all'imperatore „ (2). Si prescrive all'ambasciatore di conoscere e di sventare le pratiche, che un inviato dell'imperatore ha iniziato con Carlo Emanuele, e persuadere quest'ultimo dei benefizii dell'alleanza francese, in cui il re entrò finalmente col trattato del 26 di settembre 1733, quando è aperta la questione della successione di Polonia, che sta per far divampare un'altra guerra.

Mentre questa si combatteva al Vaulgrenant fu dato per successore nel 1734 il marchese di Saint-Nectaire senza istruzioni propriamente dette, ma con comunicazione del carteggio fra la corte ed il suo antecessore per continuarne i negoziati, intesi massimamente ad accordare il re sardo con la Spagna, di cui questi diffidava ed a ragione. La missione del Saint-Nec-

(1) Pag. 364 e seg.
(2) Pag. 369 e seg.

taire si protrasse sino al 1743, allorchè Carlo Emanuele, nella guerra di successione austriaca, trasse la spada per Maria Teresa. Prima di ciò, la corte di Versailles aveva lavorato molto per trascinare il nostro sovrano nella lega contro la regina di Ungheria, con proposte indicate in alcune lettere direttive spedite all'ambasciatore fra il 1741 e il 1743 e ripetute nell'opera. Seguono a queste le istruzioni allo Champeaux, inviato segretamente a Torino nel dicembre del 1745 e di nuovo nell'anno seguente per trattare sulla base della celebre ripartizione dell'Italia ideata dal ministro d'Argenson; e quelle al conte di Maillebois, designato plenipotenziario per il trattato definitivo, rese inutili dalla ripresa delle armi da parte del re di Sardegna.

Fatta la pace di Aquisgrana, è pensiero importantissimo della Francia il mantenimento di questa pace in Italia, epperò l'accordo col principe di Savoia. S' imperniano su ciò le istruzioni ai marchesi de la Chetardie (1749), des Issarts (1752), di Chauvelin (1753), i quali si seguirono come rappresentanti di Luigi XV presso Carlo Emanuele. Di questo sovrano non si hanno quelle fine pitture, che trovammo per Vittorio Amedeo, e le quali dinotano, fin dalla prima, che i diplomatici francesi ne avevano capito l'indole e ne sapevano stimare l'alta intelligenza. Il sistema del suo successore sta " nel non prendere impegni anticipati; egli " non consentirebbe a legarsi che al momento, in cui vedrebbe " la guerra prossima ad accendersi „ (1). La via più sicura per rendersi gradito alla corte di Savoia è " lodare sempre il go- " verno del re di Sardegna ed ammirarne l'amministrazione in " tutte le sue parti. Il ministero di Torino si è sempre fatto " un punto d'onore di conoscere meglio di qualunque altro l'arte " di governare, tanto in teoria quanto in pratica. Questo amor " proprio è così forte nel sovrano regnante quanto era nel re " Vittorio. Bisogna accarezzarlo con destrezza da questo lato sen- " sibile „ (2). Ma il vanto è giustificato. " Non vi è forse corte " più costante di quella di Torino a condursi secondo principii " invariabili. I sovrani ed i ministri si cambiano; ma lo spirito " e le massime sono sempre le stesse . . . I sovrani del Piemonte,

(1) T. II, p. 40, 54.

(2) Pag. 40 e seg.

" posti tra la Francia e gli Stati della casa d'Austria in Italia, " hanno fondato la speranza del loro ingrandimento sulle guerre, " che sopravverrebbero fra queste due principali potenze d'Eu- " ropa, e sull'alleanza, ch'essi alternatamente formerebbero con " l'una delle due a danno dell'altra. In tal modo dal principio " del secolo i duchi di Savoia hanno ottenuto un regno, un du- " cato, una parte del Milanese e fatto acquisti notevoli nel Del- " finato e nella Provenza. La posizione del re di Sardegna fa " sì che è difficilissimo, per non dire impossibile, far di meno " di lui, quando si tratta di portare la guerra al di là delle " Alpi. E siccome gli avvenimenti hanno provato che è padrone " di far pendere la bilancia in Italia dalla parte, a cui darà la " preferenza, così egli vorrà sempre vendersi troppo caro. Ma è " troppo abile per non sagrificare un utile dubbio, benchè specioso, " a vantaggi meno notevoli, che crederà poter ottenere sicura- " mente " (1). In tali istruzioni si hanno pure tocchi su alcuni nostri ministri, che riflettono la buona opinione, che in generale alla corte di Francia si aveva dei collaboratori di Carlo Emanuele. Del marchese di Gorzegno, " allievo del marchese di " Ormea si dice abbia, con minor ingegno, finezza e destrezza " uguali o maggiori del suo predecessore ". Il Bogino " è in voce " di essere uomo molto affezionato alla corte di Vienna ". Il conte de la Chavanne " a molto ingegno e a molti lumi acquistati con- " giunge ancor più di presunzione e di testardaggine, e sopra tutto " una devozione intiera all'Inghilterra, di cui si ha avuto motivo " di supporre che fosse pensionato ... nel medesimo tempo ca- " pace di amicizia e nato con un cuore sensibilissimo " (2). Il cavaliere Ossorio è " uomo d'ingegno, intatto per la rettitudine " e la probità ... molto illuminato sull' utile del suo padrone, " molto geloso della sua indipendenza e della sua gloria. Egli " spinge i suoi sentimenti per questo rispetto a segno di essere " qualche volta puntiglioso e difficoltoso " (3).

L'unione della Francia e dell'Austria nel 1756 e quindi il rovesciamento delle alleanze europee resero inutile alla prima l'avere collegato il re di Sardegna costretto d'ora in poi a star-

(1) Pag. 8 e segg.
(2) Pag. 15 e seg.
(3) Pag. 45, 58.

sene inoperoso. Perciò da quell'anno moltissimo scemò l'importanza dell'ambasciata di Torino. Il marchese di Chauvelin la tenne sino al 1765, ricevendo nuove istruzioni nel 1759 per terminare una questione di confini ed altre nel 1763 per l'affare della riversione del Piacentino, che per qualche tempo fornì alla corte di Torino materia di negoziati con quelle di Versailles, di Madrid, di Vienna e di Londra. Dal 1766 al 1791 fu ambasciatore alla nostra corte il barone di Choiseul. Durante questo lungo periodo parecchi inviati temporanei giunsero a Torino, specialmente per i matrimonii, che si strinsero allora fra le case di Savoia e di Francia.

Il ducato di Mantova e di Monferrato, con territorio molto minore di quello dello Stato sabaudo e spezzato in due parti distanti, senz'armi, senza principi savii e valorosi, contò tuttavia assai nel sistema politico della Francia in Italia. Mantova e Casale erano due vedette sulla Lombardia padroneggiata dagli Absburghesi: di gran momento adunque trattenerne i sovrani nell'obbedienza della Francia, la quale, a prezzo di una guerra sanguinosissima, aveva insediato Carlo di Nevers sul vacante trono ducale. Ma i successori di questo principe non sono sempre docili ai voleri di Francia. Mutevole l'animo di Carlo II (1); austriaca di patria e di cuore Isabella Chiara, sua moglie, che governa durante la minore età del figlio Ferdinando Carlo, ed anche, dopochè questi è maggiorenne, continua a dirigere gli affari tralasciati dal principe, dato solo senza misura ai piaceri.

Spesseggiano le istruzioni ad inviati ordinarii e temporanei, agli ambasciatori residenti a Venezia, a cui si commette talora negoziare coi Gonzaga come con altri principi d'Italia. Lunga la pratica per indurre la corte mantovana ad accettare l'indennità, che la Francia le deve pagare, per i trattati di Cherasco e di Münster, in compenso delle terre del Monferrato passate sotto la signoria di Savoia; indennità, che quella non vuole per non serrarsi la via alla rivendicazione di queste terre a malincuore perdute.

(1) Il Beaucaire, contrariamente ai documenti ufficiali, chiama Carlo III questo duca e Carlo IV il suo successore Ferdinando Carlo, tenendo come Carlo II il figlio del duca Carlo I, premorto al genitore e padre del secondo duca di Mantova del ramo di Nevers.

Altri negoziati per avere e poi per riavere alleato Carlo II nella guerra con la Spagna, che, dopo la pace vestfalica si trascinò nel Piemonte e nella Lombardia sino a quella de' Pirenei. Nel 1677 s'inizia con Ferdinando Carlo il negozio per l'acquisto di Casale (1), bramata ed ottenuta da Luigi XIV (1681), non conservata e tornata al duca nella guerra suscitata dalla lega di Augusta. Preme alla Francia aver il duca favorevole in tale guerra; si lavora perciò in questo senso. Si ripetono negoziati di alleanza all'aprirsi della guerra di successione di Spagna. Ferdinando Carlo si unisce coi Franco-Spagnuoli (1701). Le vittorie degl'imperiali gli tolgono lo Stato (1707): l'anno appresso si spegne con lui la discendenza legittima di casa Gonzaga.

(1) Vi ebbe parte il conte Mattioli, che, arrestato dai Francesi per aver rivelato il segreto dell'affare a Savoia ed a Spagna, fu ed è creduto, anche dal Beaucaire (t. II, p. 253, nota), sia stato il famoso prigioniero dalla *maschera di ferro*. Più recente degli ultimi lavori citati dal Beaucaire è l'opinione contraria del Carutti, *Storia di Pinerolo*, Pinerolo, 1897, p. 444 e segg.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

DANTE
Gemelli
Fig. 1
quando
volta la
Cadice
Gerusal
Orizz. raz.
Purg.
Ariete
Sole
2ª Posizione astronomica di Dante
dai Gemelli guardò per la prima
terra.
Gerusal.
Cadice
Orizz. raz.
Purg.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Marzo 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO GIACINTO BERRUTI

Sono presenti i Soci: SALVADORI, D'OVIDIO, MOSSO, CAMERANO, SEGRE, VOLTERRA, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI e NACCARI Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale della precedente adunanza, che viene approvato.

Si dà comunicazione della lettera, con cui il prof. Teodoro LIEBISCH ringrazia per la sua nomina a corrispondente.

Vengono accolti per la inserzione negli *Atti* gli scritti seguenti:

Una nuova trimetilpiridina, nota del Socio GUARESCHI,

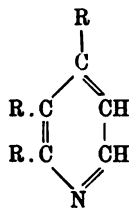
Lo studio quantitativo degli organismi e gli indici di variabilità, di variazione, di frequenza, di deviazione e di isolamento, nota del Socio CAMERANO.

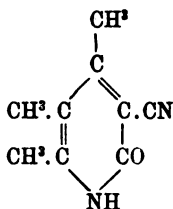
LETTURE

Una nuova trimetilpiridina.

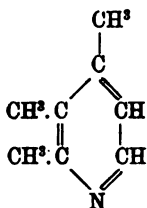
Nota del Socio ICILIO GUARESCHI.

Delle *sei* trimetilpiridine $C^5H^2(CH^3)^3N$ teoricamente ammissibili se ne conoscono solamente *due* e sono: la ***trimetilpiridina simmetrica*** 1. 3. 5 (1) e la *trimetilpiridina* 2. 3. 5 di Ahrens (2). Non si conoscono derivati piridinici trialchilici contigui:

```
        R
        |
        C
      /   \\
  R.C       CH
    ||      |
  R.C       CH
      \   //
        N
```

In alcuni miei precedenti lavori ho fatto osservare che i composti cianpiridinici che si ottengono dall'etere cianacetico si possono, per distillazione con polvere di zinco, trasformare in basi piridiniche. Dal cianmetilpiridone si forma l'αγ-dimetilpiridina e dal βcianlepidone ottenni la lepidina o βmetilchinolina, ecc. Avendo l'anno passato preparato alcuni derivati cianpiridinici dal metilacetilchetone e specialmente il βcianγβ'α'trimetilpiridone o βcianγβ'α'trimetilαossipiridina, fusibile a 305°-306°:

```
          CH³
          |
          C
        /   \\
  CH³.C       C.CN
      ||      |
  CH³.C       CO
        \   /
          NH
```

(1) Hantzsch, " Ann. ", 215, p. 33.
(2) Ahrens, " Ber. ", XXVIII, p. 796 e XXIX, p. 2998.

ho pensato che da questo si potrebbe ottenere la *trimetilpiridina contigua* 3. 4. 5 cioè:

$$
\begin{array}{ccc}
 & CH^3 & \\
 & | & \\
 & C & \\
 & \diagup \quad \diagdown & \\
CH^3.C & & CH \\
\| & & | \\
CH^3.C & & CH \\
 & \diagdown \quad \diagup & \\
 & N &
\end{array}
$$

di cui anzi ho fatto un brevissimo cenno nell' ultimo mio lavoro (1). Questa base isomera delle due sovraccennate è forse identica con qualcuna delle basi $C^8H^{11}N$ a costituzione ignota e che vanno sotto il nome di *collidine.*

Si conoscono invece i *sei* acidi piridintricarbonici $C^5H^2(COOH)^3N$ corrispondenti alle *sei* trimetilpiridine teoricamente ammissibili ed io per ossidazione della mia trimetilpiridina contigua ho ottenuto l'acido αpiridintricarbonico o *acido αcarbocincomeronico di Weidel.*

Il ciantrimetilpiridone, fusibile a 305°-306°, fu mescolato con 18 a 20 volte il suo peso di polvere di zinco e per porzioni di 5 a 8 gr. per volta fu distillato entro canna di vetro, scaldata al rosso scuro e in lenta corrente di gas idrogeno.

Si ebbe così un distillato liquido, fluorescente, con un poco di materia solida. Tra i gas sviluppatisi abbondava l'acido cianidrico.

Il distillato fu acidulato con acido solforico diluito, che produce sviluppo di molto acido carbonico e di acido cianidrico, ed estratto varie volte con etere; alcalinizzato con potassa concentrata fu di nuovo esaurito con etere il quale, disseccato con potassa solida, fu distillato. Si ebbe così un residuo oleoso, alcalino, di odore piridinico acuto. Questo fu sottoposto a distillazione frazionata, e fornì principalmente una porzione che bolliva da 180°-195°, che fu di nuovo frazionata, raccogliendo ciò che passava 185°-187°.

Distillò in ultimo una piccola porzione che bolliva verso 260° e che cristallizzava in aghetti bianchi (A).

(1) *Ossipiridine dai β dichetoni*, " Atti R. Acc. di Torino ", 1898, p. 24.

La trimetilpiridina 3. 4. 5 è un liquido incoloro che all'aria ingiallisce, più leggiera dell'acqua, del p. sp. = 0.9127 a 15°, di odore acuto piridinico. Bolle 185°-188°. È abbastanza solubile anche nell'acqua fredda e la sua soluzione acquosa satura intorbida per riscaldamento, basta tenere il tubo di assaggio fra le mani per vedere il liquido limpido farsi lattiginoso e ritornare limpidissimo dopo raffreddamento. È solubile facilmente in alcool ed in etere. Ha reazione alcalina e manda fumi in presenza di acido cloridrico. La soluzione acquosa della base versata nella soluzione di *solfato di rame* dà un precipitato azzurro insolubile in un' eccesso di base; nella soluzione di *cloruro ferrico* dà precipitato rosso-mattone.

La trimetilpiridina forma dei sali ben cristallizzati; la sua soluzione cloridrica dà precipitato cristallino, giallo, col cloruro platinico; col cloruro d'oro dà abbondante precipitato giallo cristallino; col cloruro mercurico non precipita; precipita con tutti gli altri reattivi degli alcaloidi.

Il *cloridrato* cristallizza in aghi bianchi o in lamelle rettangolari, incolore, solubilissime nell'acqua; è deliquescente.

Cloroplatinato $(C^8H^{11}N)^2 . H^2PtCl^6$. Si ottiene aggiungendo alla soluzione acquosa concentrata del cloridrato una soluzione pure molto concentrata di acido cloroplatinico. Si ha così un bel precipitato cristallino che per ricristallizzazione dall' acqua si ha in prismi corti, di colore giallo ranciato, insolubili o pochissimo solubili, nella miscela alcolico-eterea. Questo cloroplatinato secco all'aria è *anidro;* fonde a 211°-212° e diede i risultati seguenti alle analisi, che furono eseguite sul sale di varie preparazioni.

I. Gr. 1778, di cloroplatinato secco a 100°-110°, fornirono 0.0532 di Pt.

II. Gr. 0.2600, di sostanza secca a 110°, fornirono 0.0799 di Pt.

III. Gr. 0.3124 fornirono 0.0933 di Pt.

IV. Gr. 0.2896, di sostanza secca a 100°, diedero 11 cm³ di N a 14° e 740 mm.

Da cui:

	I	II	III	IV
Pt =	29.92	29.96	29.86	—
N =	—	—	—	4.31

Per la formola $(C^8H^{11}N)^2H^2PtCl^6$ si calcola:

$$Pt = 29.85$$
$$N = 4.28.$$

Cloroaurato. Si ottiene precipitando una soluzione concentrata della base, acida per acido cloridrico, con una soluzione mediocremente concentrata di acido cloroaurico. Il precipitato si ricristallizza dall'acqua calda. È anidro.

Gr. 0.1795 di sale secco nel vuoto sull'acido solforico fornirono 0.0770 di Au.

Da cui:

	trovato	calcolato per $(C^8H^{11}N)HAuCl^4$ (1)
Au %	42.89	42.75

Questo cloroaurato cristallizza in aghi lunghi, gialli, solubili nell'acqua bollente, pochissimo nella fredda, solubile nella miscela d'alcol ed etere. Scaldato con acqua fonde; secco fonde verso 100°.

Il *picrato*, dal cloridrato neutro coll'acido picrico, si ha in bei cristalli gialli riuniti a stella o a foglia di felci.

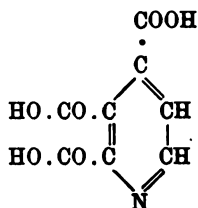
Il *solfocianoplatinato*, precipitato dal cloridrato col solfocianoplatinato di potassio, si ha in piccoli cristalli di colòr giallo vivo che hanno l'aspetto di quelli del picrato.

Ossidazione della trimetilpiridina contigua 3. 4. 5. Circa 1.7 gr. di base furono scaldati a b. m. con 12 grammi di $KMnO^4$ in 600 cm^3 di acqua. Dopo alcune ore scompare l'odore piridinico; con poco alcol scolorato affatto il liquido, filtro. Il liquido filtrato ha reazione alcalina; lo acidulo lievemente con acido nitrico poi lo concentro. Separato un poco di nitrato potassico cristallizzato, tratto il liquido con nitrato baritico il quale dà un abbon-

(1) Hantzsch (" Ann. ,, 215, p. 36) nell'analisi del cloroaurato di collidina fusibile a 112°-113° trova Au = 39.79 e dice che per $C^8H^{11}N.HAuCl^4$ si calcola 40.00 % di Au. Mentre in realtà si calcola 42.75 % ammettendo Au = 197.2. Anche col peso atomico 196.2 ammesso prima d'ora si calcolerebbe 42.65 %. Come spiegare queste differenze? La base di Hantzsch non era pura?

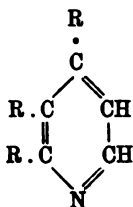
dante precipitato bianco. Questo precipitato fu ben lavato con acqua. È insolubile in acido nitrico diluito ed anche nell'acido cloridrico diluito; somiglia al solfato baritico. Scaldato sviluppa odore di piridina. Il sale così ottenuto e che non si può far ricristallizzare contiene pare $8H^2O$, di cui $6H^2O$ perde a 100°-105° e le altre $2H^2O$ a 230°. Il sale disseccato completamente a 230° fornì 49.56 % di *bario*, corrispondente a $[C^6H^2(COO)^3N]^2Ba^3$ pel quale si calcola: Ba = 49.69 %.

Questo sale baritico, che ha i caratteri del sale di bario dell'acido αcarbocincomeronico, fu trattato con acqua ed acido solforico diluito, in quantità esattamente calcolata. Il filtrato, concentrato, fornì una piccola quantità di un acido cristallizzato che disseccato a 120° fondeva verso 250° e che molto probabilmente, anzi direi senza dubbio, era l'*acido αcarbocincomeronico* di Weidel:

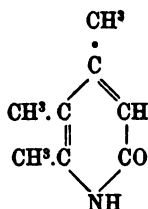
```
              COOH
               •
               C
             /  \\
HO.CO.C       CH
        ||       |
HO.CO.C       CH
             \\  //
               N
```

Io penso che partendo dai βdichetoni sostituiti:

R . CO . CH(R) . CO . R

essendo R = CH^3, C^2H^5, C^6H^5 ecc. si potranno, in generale, ottenere le basi piridiniche trisostituite della forma:

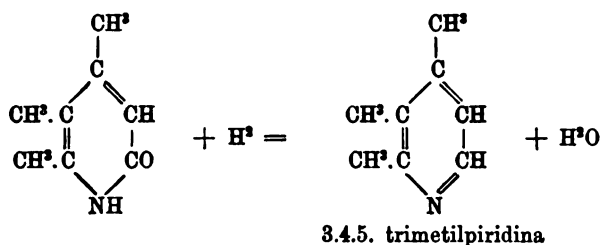
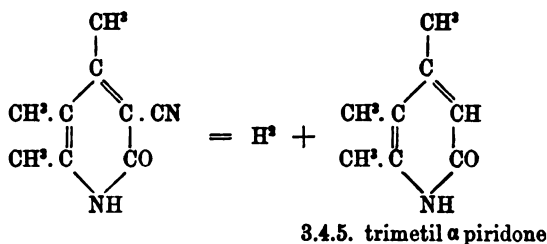
```
        R
        •
        C
      /  \\
R.C       CH
   ||      |
R.C       CH
      \\  //
        N
```

La sostanza (A) separata dalla trimetilpiridina grezza e che bolliva verso 260°-270°, non l'ho potuta ottenere in quan-

tità da poterla studiare; fonde verso 50°. Però, sia per le proprietà, sia per alcune analisi che ho potuto fare ritengo come assai probabile che questa sostanza sia il *trimetilpiridone* o *3. 4. 5 trimetilαossipiridina:*

```
            CH^3
             .
             C
           /   \\
   CH^3 . C      CH
          ||      |
   CH^3 . C      CO
           \    /
             NH
```

la cui formazione è spiegata anche dalla grande quantità di acido cianidrico che si produce durante la riduzione con polvere di zinco.

Sarebbe il prodotto intermedio della riduzione la quale avrebbe luogo nel modo seguente:

```
            CH^3                               CH^3
             |                                  |
             C                                  C
           /   \\                             /   \\
   CH^3 . C      C . CN                CH^3 . C      CH
          ||     |         =  H^2  +          ||      |
   CH^3 . C      CO                    CH^3 . C      CO
           \    /                               \    /
             NH                                   NH
                                      3.4.5. trimetil α piridone
```

```
            CH^3                               CH^3
             |                                  |
             C                                  C
           /   \\                             /   \\
   CH^3 . C      CH                    CH^3 . C      CH
          ||      |     +  H^2  =             ||      |      +  H^2O
   CH^3 . C      CO                    CH^3 . C      CH
           \    /                               \   //
             NH                                   N
                                      3.4.5. trimetilpiridina
```

Riduzioni simili saranno studiate sui corrispondenti derivati N-alchilici.

Torino, R. Università 24 marzo 1900.

Lo studio quantitativo degli organismi e gli indici di variabilità, di variazione, di frequenza, di deviazione e di isolamento.

Nota del Socio LORENZO CAMERANO.

> On peut juger du degré de perfection auquel une science est parvenue, par la facilité plus ou moins grande avec laquelle elle se laisse aborder par le calcul.....
> Les sciences font des progrès d'autant plus rapides, que les connaissances acquises sont plus exactes et qu'on est parvenu à les exprimer d'une manière plus précise.
>
> QUETELET, *Théorie des probabilités.*

Non è oggi, come ognuno ben intende, più mestieri spender parole per dimostrare il giusto valore delle due sopra riferite asserzioni del Quetelet. È oggi invece necessario ricercare se la biologia sia giunta nei varî suoi rami ad uno stadio di sviluppo tale da concedere che ad essa si possa applicare con frutto il calcolo matematico. I lavori più recenti, indubbiamente molto accurati, della scuola inglese ed americana che tentano la spiegazione delle leggi della variabilità e dell'evoluzione delle forme organiche col calcolo matematico, come già ebbi occasione di dire in una precedente nota (1), mostrano quanto sia lunga la strada da percorrersi dalle ricerche biologiche prima che i loro dati sottoposti al calcolo matematico possano condurre a risultati soddisfacenti in ordine alla spiegazione di leggi generali.

La ragione di questo fatto sta nella seconda delle asserzioni sopra riferite del Quetelet. Molte conoscenze relative ai feno-

(1) *Lo studio quantitativo degli organismi ed il coefficiente somatico,* " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XXXV, 1900.

meni biologici non sono oggi, poichè spesso non è ancora possibile fare altrimenti, espresse in maniera sufficientemente precisa da potersi sottoporre al calcolo matematico.

La nuova scuola inglese ed americana che si occupa dello studio quantitativo degli animali, non ha, a mio avviso, tenuto conto, in vari casi, in maniera sufficientemente rigorosa, della questione fondamentale: della corrispondenza più stretta possibile, cioè, del dato numerico che sottopone al calcolo colla natura del fenomeno biologico di cui il dato stesso dovrebbe essere l'espressione quantitativa. I dati numerici, in altre parole, vengono spesso preparati in modo da essere l'espressione di un troppo grande numero di cause operanti, e di cui risultante è il fenomeno che appunto viene espresso con unico dato numerico. Questa è una delle ragioni (unitamente alle altre di indole più generale che io già ebbi occasione di accennare nella mia nota precedente sopra citata) dell'utile scarsissimo e talvolta nullo che ricerche laboriosissime della scuola stessa hanno fino ad ora recato in ordine alla conoscenza delle leggi generali della variazione degli organismi.

Io mi occuperò qui dello studio quantitativo degli animali per ciò che riguarda principalmente la variabilità dei caratteri individuali nei loro rapporti coi caratteri specifici.

In tal genere di ricerche sono cose di capitale importanza: la riunione dei dati dell'osservazione, la classificazione e la riduzione in quantità fra loro comparabili.

Il metodo statistico è il solo che possa condurre a qualche risultato utile a condizione tuttavia che le modalità sue siano convenientemente applicate secondo la natura dei fenomeni che i dati raccolti colla osservazione sono chiamati a chiarire.

Se non è d'uopo dire che anzitutto è da stabilir bene quali sono le modalità dei fenomeni che si vogliono mettere in evidenza, è tuttavia opportuno ricordare sempre che i dati, che l'osservazione diretta ci fornisce intorno ai viventi, sono, nella maggior parte dei casi, l'espressione della risultante di cause molteplici, e spesso assai diverse, che hanno agito sul vivente stesso.

Le espressioni numeriche, o come oggi si dice, quantitative dei dati di osservazione che si vogliono sottoporre al calcolo matematico, devono essere preventivamente studiate con critica

adeguata per evitare il pericolo che i risultati del calcolo, matematicamente irreprensibili, non esprimano nulla di preciso in ordine alle leggi biologiche.

Nello studio di una serie qualsiasi di dati di osservazione anatomici o fisiologici, nel più ampio senso di queste due parole, è necessario tener conto di due fatti generali:

1° dei valori diversi dei dati stessi nella serie che si studia;

2° della frequenza colla quale i dati di valore diverso si trovano ripetuti nella serie stessa.

Nel metodo più usato delle medie aritmetiche questi due fatti vengono espressi con un valore risultante unico. Ciò vien seguito pure dagli autori recenti che si occupano dello studio quantitativo degli animali. Il Davenport (1) che ha riunito in un utilissimo libro i metodi statistici in rapporto collo studio della variazione biologica, propone il seguente metodo per la determinazione delle medie.

1° Si dispongono le *varianti* (così vengono denominate le grandezze diverse di un dato in una serie di osservazioni) in *classi* per ordine progressivo di grandezza incominciando dalla minore.

2° Si determina la *frequenza* di ciascuna classe, vale a dire il numero delle varianti di egual valore che entra in ciascuna classe.

Sia V la variante, F la frequenza, avremo ad esempio:

Classi	1	2	3	4	.....	n
Varianti	V	V + 1	V + 4	V + 8	.....	$V + n'$
Frequenze	F + 3	F + 1	F + 2	F + 3	.....	$F + n''$

3° Si ottiene la media M dalla formola seguente

$$M = \frac{V \times (F+3) + (V+1) \times (F+1) + (V+4) \times (F+2) + (V+8) \times (F+3) \ldots (V+n') \times (F+n'')}{(F+3)+(F+1)+(F+2)+(F+3)+ \ldots (F+n'')}$$

o più brevemente

$$M = \frac{\Sigma (v f)}{N}$$

(1) *Statistical Methods with special reference to biological variation*, New York, 1899.

in cui v è la grandezza di ogni classe, f la frequenza, N il nunumero totale delle varianti, Σ la somma dei prodotti delle classi per la rispettiva frequenza.

Si vede da quanto precede che il valore di M dipende dal numero delle classi, vale a dire dal numero dei valori diversi che un dato in una serie di osservazioni ha presentato, e dal numero delle frequenze dei valori eguali nelle classi.

Questo modo di calcolare la media non mi pare raccomandabile nel caso nostro poichè vengono ad essere conglobate nella stessa espressione numerica le risultanti di due fenomeni diversi.

Se si prende, ad esempio, a considerare le misure di un organo in una serie determinata di individui, si troverà, poniamo il caso, quattro valori diversi: $a, a+n, a+n', a+n''$ e questa diversità di valori potrà dipendere dalle cause molto complesse della variabilità dell'organo stesso. La frequenza delle quattro classi di valori sarà determinata da un altro ordine di cause che hanno agito sugli individui stessi in modo da far prevalere in essi certe dimensioni dell'organo; se nell'esempio citato si ha:

$$\begin{array}{cccc} a & a+n & a+n' & a+n'' \\ f+2 & f+10 & f+3 & f+1 \end{array}$$

si potrà conchiudere che il valore $a+n$ dell'organo in questione prevale per importanza, nella serie di individui studiati, di gran lunga sugli altri.

La causa di tale prevalenza è, ripeto, diversa da quella che ha agito sull'organo inducendo in lui quel grado di variabilità che si fa a noi manifesto coi quattro valori sopraindicati. Aggiungerò ancora, e la cosa non ha bisogno di dimostrazione, che uno stesso valore M può essere ottenuto con molteplici combinazioni dei valori delle classi e delle frequenze rispettive (1).

(1)

Siano ad esempio:	Classi	10		20		
	Frequenza	1		1		avremo M = 15
Siano invece:	Classi	10	15	20		
	Frequenza	1	2	1		avremo M = 15
»	Classi	8	10	12	30	
	Frequenza	1	1	1	1	avremo M = 15
»	Classi	10	15	20	30	
	Frequenza	4	1	1	1	avremo M = 15

e icos via discorrendo.

È questo uno dei casi più semplici in cui il calcolo ci dà un valore aritmeticamente esatto: ma dal punto di vista biologico poco utile, perchè sotto la sua rigida precisione nasconde fenomeni con andamento molto diverso.

Calcolata la media di una serie di varianti, è importante calcolare l'*indice di variabilità* delle varianti stesse.

Sono stati proposti varî metodi per calcolare l'indice di variabilità. Io ricorderò qui quello proposto dal Davenport (op. cit.) colla formola seguente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x^2 f)}{n}}$$

in cui: $x^2 =$ al quadrato della deviazione del valore di ciascuna classe dalla media, $f =$ alla frequenza di ciascuna classe, $n =$ al numero totale delle varianti, Σ indica la somma dei prodotti dei quadrati della deviazione di ciascuna classe dalla media per la frequenza delle classi stesse.

Anche questo modo di calcolare ci dà un valore σ il quale include in sè il fenomeno della variabilità del dato studiato e la frequenza delle variazioni che esso presenta, e perciò si presta alle stesse osservazioni già fatte a proposito del calcolo della media.

La *deviazione media* (DM) viene dal Davenport calcolata colla formola seguente:

$$\mathrm{DM} = \frac{\Sigma(d f)}{n}$$

in cui: d è la deviazione della classe dalla media, f è la frequenza della classe, Σ indica la somma dei prodotti delle deviazioni delle classi per la frequenza rispettiva e n è il numero totale delle varianti.

Brewster (1) calcola la deviazione media separando i dati numerici delle classi in due gruppi: uno contenente i valori su-

(1) *A measure of variability, and the relation of individual variations to specific differences*, " Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences „, vol. XXXII, 1897.

periori alla media e l'altro i valori inferiori e prendendo la metà della differenza delle medie di ciascun gruppo.

Per rendere poi comparabili gli indici di variabilità e i valori della deviazione media di differenti serie di osservazioni si dividono per le medie rispettive $\frac{\sigma}{M}$ $\frac{DM}{M}$. Questi rapporti vengono indicati colla denominazione di coefficienti di variabilità (C V).

Anche il Duncker (1) procede con un analogo metodo generale.

Il metodo sopra indicato, matematicamente irreprensibile, conduce ad ottenere valori che sintetizzano, se così possiamo esprimerci in una cifra sola, troppe cause che operano sulla variazione di un carattere e pur riuscendo comparabili fra di loro e pur concedendoci il paragone fra loro degli effetti finali delle cause di variazione in serie diverse di organismi non riescono, a mio avviso, utili allo studio analitico delle cause stesse.

Ora si è appunto questo studio analitico che è necessario fare nello stato presente della scienza applicando ad esso i metodi statistici al fine di preparare i materiali che tuttora mancano per lo studio di comparazione.

In questo campo è pel momento prematuro qualunque tentativo di sintesi fatto con procedimento matematico o con altro qualsiasi.

Pare a me che il metodo statistico da applicarsi allo studio della variabilità degli animali debba essere tale da corrispondere alla maggior analisi possibile delle cause di variazione e da concedere la deduzione di dati numerici che, per quanto è possibile, corrispondano in modo preciso all'azione delle cause stesse.

Io propongo per lo studio della *variazione biologica*, per servirmi dell'espressione della scuola inglese ed americana, il procedimento seguente che per maggior brevità espongo applicandolo ad un caso concreto.

Considero la lunghezza del capo in 21 individui ♀ di *Bufo vulgaris* Laur. del Giappone.

1° I valori assoluti delle misure, in millimetri, riduco in

(1) *Die Methode der variationsstatistik*, " Archiv für Entwickelungs mechanik der organismen ", vol. VIII, 1899.

valori espressi in 360^{esimi} della lunghezza del corpo col mezzo del coefficiente somatico ω (1).

---

(1) CAMERANO, Op. cit.

I valori che così si ottengono hanno il vantaggio di presentare più facile e più precisa alla mente nostra la valutazione delle differenze di sviluppo del carattere al quale si riferiscono e di essere senz'altro fra loro comparabili. Essi possono essere intieri, frazionari o misti. Il tener conto o meno delle frazioni dipende dal grado di precisione col quale si vuol procedere nel calcolo ed anche dal grado di precisione raggiunto nelle misure assolute. Questo a sua volta dipenderà, in gran parte, dalla natura dell'organo che si misura e dai mezzi di misura adoperati. Nel caso del carattere preso ora in esame, anche facendo la media di più misure assolute nello stesso individuo, l'errore oscillerà nell'ambito di 1 millimetro circa. Colla riduzione mediante il coefficiente somatico, l'errore viene moltiplicato ed ingrandito secondo la grandezza del coefficiente stesso, la quale dipende dalla lunghezza assoluta del corpo dell'individuo misurato. Non è conveniente quindi trascurare senz'altro le quantità frazionarie dei valori espressi in 360esimi. D'altra parte i numeri intieri accorciano notevolmente i calcoli; si può perciò procedere nel modo seguente:

I valori in 360esimi della lunghezza del capo nei 21 individui sopra detti, sono i seguenti:

110,4	110,88	102,25	105,00	96,30	102,08	97,03
93,00	108,50	97,60	99,65	97,60	105,48	95,70
97,92	101,16	105,26	112,98	82,24	120,00	114,00

La loro somma è eguale a 2155,03.

Si possono arrotondare trascurando le quantità frazionarie inferiori a 0,50, facendo = 1 le quantità superiori a 0,50 od = a 0,50. Avremo:

110	111	102	105	96	102	97	93	109	98	100
98	105	96	98	101	105	113	82	120	114.	

La loro somma è eguale a 2155.

Ora 2155,03 — 2155 = 0,03.

La quantità 0,03 è trascurabile.

Se si reputa conveniente di tener conto anche delle quantità frazionarie è necessario allora procedere alla costituzione delle Classi col metodo indicato. dal Davenport (op. cit.). Riferisco l'esempio citato dal Davenport stesso. Date le varianti:

3,2	3,8	4,1	4,3	4,3	4,5	4,7	4,9	5,0	5,1	5,2	5,2	5,3
5,3	5,4	5,6	5,7	5,8	5,8	5,9	6,0	6,0	6,2	6,4	6,7	7,3

Si dispongono in classi nel modo seguente:

2° Si dispongono i valori in classi disponendole in ordine ascendente di grandezza a cominciare dalla minore e si determina per ciascuna classe la frequenza.

Classi	82	93	96	97	98	100	101	102	105	109	110	111	113	114	120
Frequenza	1	1	2	1	3	1	1	2	3	1	1	1	1	1	1

Nel caso nostro la differenza fra due classi consecutive è eguale ad 1 (vale a dire $\frac{1}{360}$ della lunghezza totale del corpo).

3° Si considerano anzitutto i valori delle classi senza tener conto della frequenza loro.

I valori delle classi disposti nel modo sopradetto si possono ritenere corrispondere a termini di una progressione aritmetica nella quale il 1° termine è = a 82, l'ultimo termine è = a 120 e la ragione è = 1.

Nella serie di individui presa in esame, i valori 82 e 120 segnano gli estremi della variazione del carattere studiato: essi delimitano ciò che potrebbe dirsi il *campo di variabilità* della lunghezza del capo negli individui stessi. Nel caso nostro, avendo ritenuto la differenza fra le classi consecutive = 1, sono possibili, comprendendo i valori estremi, 39 valori diversi delle classi stesse (1).

Il numero dei valori diversi possibili nel campo di variabilità può ritenersi l'*indice di variabilità* del carattere studiato nella serie di individui presa in esame.

Classi	3,0 a 3,4	3,5 a 3,9	4,0 a 4,4	4,5 a 4,9	5,0 a 5,4
Media	3,2	3,7	4,2	4,7	5,2
Frequenza	1	1	3	3	7

Classi	5,5 a 5,9	6,0 a 6,4	6,5 a 6,9	7,0 a 7,4
Media	5,7	6,2	6,7	7,2
Frequenza	5	3	1	1

Pei calcoli ulteriori si tiene conto del valore medio delle singole classi.

(1) Le classi intermedie mancanti nella serie di quelle osservate sono, non è d'uopo dirlo, possibili e una serie più numerosa di individui, pur conservando gli stessi valori estremi, potrebbe presentarle. Un'altra serie di individui può presentare termini estremi del valore del carattere in discorso, più o meno differenti fra loro di quelli della serie qui considerata; ma seguendo i procedimenti qui proposti, i dati quantitativi risultanti dallo studio del carattere stesso nelle diverse serie sono fra loro comparabili.

4° Considero ora il numero delle classi effettivamente osservate nella serie degli individui studiata: esso è di 15. Ciò vuol dire che dei valori possibili, compresi gli estremi, del carattere osservati nei 21 individui presi in esame, se ne trovano solo 15. Il rapporto $\frac{15}{39} = 0{,}3846$ può essere considerato come *indice di variazione* della lunghezza del capo nella serie di 21 individui esaminata.

Credo utile distinguere l'*indice di variabilità* dall'*indice di variazione*. Il primo mostra l'estensione del campo di variazione possibile del carattere in una serie, o in altre parole il numero dei suoi valori diversi possibili; il secondo indica la maggiore o minore abbondanza di valori diversi realmente osservabile nella stessa serie di individui che si studia.

L'indice di variazione si ottiene adunque dividendo il numero delle classi osservate nella serie pel numero delle classi possibili; ossia pel numero dei termini della progressione aritmetica istituita fra i valori estremi osservati.

L'indice di variazione sarà eguale ad 1 se tutte le classi possibili si osservano nella serie degli individui che si esamina: 1 è quindi il valore massimo dell'indice di variazione per una data serie.

Data una sola classe di valori in una serie di individui, l'indice di variabilità è $= 1$ e l'indice di variazione è pure $= 1$ si avrà $\frac{1}{1} = 1$.

Date due classi consecutive, ad esempio 1 e 2, l'indice di variabilità è $= 2$ e l'indice di variazione eguale ad 1 poichè si avrà $\frac{2}{2} = 1$.

Date x classi osservate ed x' classi possibili se $x = x'$ l'indice di variazione è $= 1$.

Risulta da queste considerazioni che ad indicare il modo di variazione di un carattere in una serie di individui, è d'uopo considerare sempre i due indici, quello di variabilità e quello di variazione.

Nel caso sopracitato abbiamo, indicando con A l'indice di variabilità, e con a l'indice di variazione, la formola seguente:

$$A\ 39 \mid a\ 0{,}3846$$

nella quale i due valori corrispondono a due modalità del fenomeno di variazione di un carattere in una serie determinata di individui.

5° Media. La media aritmetica dei valori osservati ottenuta cioè dividendo la somma dei valori stessi pel numero degli individui, come è oggi usata da molti per indicare *senz'altro* il valore medio quantitativo di un carattere, non dà risultati soddisfacenti per ciò che riguarda i fenomeni in questione, oltre che per le ragioni precedentemente già dette, anche pel fatto che spesso i valori, che si sommano, sono molto diversi fra loro e il numeso degli individui è spesso troppo disegualmente distribuito rispetto ai diversi valori (1). Io propongo il procedimento seguente:

Considerata la progressione aritmetica i di cui termini estremi sono 82 e 120 e di cui la ragione è 1 e che ci rappresenta la serie possibile dei valori della lunghezza del capo nella serie degli individui studiati, si fa la media dei valori di tutti i termini della progressione. La somma dei termini della progressione è data dalla nota formola $S = \frac{a+l}{2} \times n$ in cui a è il primo termine, l l'ultimo termine, n il numero dei termini. La media sarà:

$$M = \frac{\frac{a+l}{2} \times n}{n} \qquad \text{Nel caso nostro } M = 101.$$

101 è il valore intorno al quale oscillano, per dir così, tutti gli altri valori possibili del carattere studiato entro ai limiti dei valori estremi del carattere stesso in una serie determinata di individui, indipendentemente dal numero dei valori intermedii realmente osservati nella serie stessa.

6° Il valore medio così determinato, come ho detto

(1) Non è d'uopo insistere su di ciò. Una media aritmetica ad esempio di $10 + 30 + 40 + 50 + 80$ ci dà 42, valore troppo lontano da 10 e da 80. Qualcuno usa eliminare dalla media i valori troppo diversi; ma così operando il valore della media per lo studio quantitativo dei caratteri viene ad essere meno utile ancora. Neppure è da raccomandarsi al caso nostro il metodo di fare le medie di gruppi di valori meno diversi fra loro e poi una media delle medie così ottenute.

precedentemente, *da solo*, non serve; esso ha importanza per la determinazione dell'indice di *frequenza* delle classi.

I valori che indicano la *frequenza* hanno, a mio avviso, importanza solo a condizione che essi servano ad indicare *la localizzazione della frequenza in gruppi di classi determinate o in una classe determinata.*

Propongo il procedimento seguente:

Essendo $M = 101$, si dividono le classi realmente osservate colle rispettive frequenze in 3 gruppi secondo che i valori che le rappresentano sono eguali, superiori od inferiori alla media.

Classi inferiori alla media	82	93	96	97	98	100		
Frequenza	1	1	2	1	3	1		
Classi eguali alla media	101							
Frequenza	1							
Classi superiori alla media	102	105	109	110	111	113	114	120
Frequenza	2	3	1	1	1	1	1	1

Si calcola il numero delle varianti di ciascun gruppo.

$$\begin{aligned} \text{Varianti } & 9 < M \\ \text{„ } & 1 = M \\ \text{„ } & 11 > M. \end{aligned}$$

Essendo 21 il numero totale delle varianti della serie studiata, potremo stabilire i rapporti seguenti:

$$\frac{9}{21} = 0{,}4285 \qquad \frac{1}{21} = 0{,}0476 \qquad \frac{11}{21} = 0{,}5238.$$

I numeri 0,4285 0,0476 0,5238 possono ritenersi come *indici di frequenza* delle classi i di cui valori sono inferiori, eguali o superiori alla media.

In ogni caso, se si vuole determinare l'indice di frequenza di un dato gruppo di classi o di una classe determinata qualsiasi, si fa il rapporto della somma delle varianti delle classi stesse, o della classe, e il numero totale delle varianti della serie.

Può essere utile determinare i valori limiti che comprendono la maggior frequenza di varianti. Nel caso nostro la maggior frequenza è compresa fra i valori 95 e 106.

7° Anche la determinazione quantitativa della deviazione delle classi dalla media, a mio avviso, ha importanza solo in quanto si riferisce ad un gruppo determinato di classi o ad una data classe. In ogni caso la determinazione della deviazione delle classi deve essere fatta separatamente, almeno pei valori inferiori e per quelli superiori alla media.

Propongo il procedimento seguente:

Divise le classi in due gruppi, comprendenti rispettivamente i valori inferiori e superiori alla media.

(1)	$C < M$	82	93	96	97	100			
(2)	$C > M$	102	105	109	110	111	113	114	120

Si fa rispettivamente la somma delle deviazioni dalla media di tutte le classi possibili da 82 a 101 e da 101 a 120: avremo pel primo gruppo — 200 e pel secondo + 200.

Si fanno poscia le somme delle deviazioni delle classi realmente osservate nei due gruppi le quali sono rispettivamente (1) — 40 e (2) + 76.

I rapporti $\frac{-40}{-200}$ e $\frac{+76}{+200}$ ci dànno 0,2 e 0,33

i quali valori sono gli indici di deviazione per le due serie di classi una inferiore, l'altra superiore alla media.

L'indice di deviazione di una classe determinata si ottiene con un procedimento analogo. Per la classe 96, ad esempio, avremo $D = \frac{-5}{-200} = 0{,}025$.

Volendo tener conto anche della frequenza delle varianti, si moltiplicano gli indici di deviazione per gli indici di frequenza:

$$(D < M) \times (F < M) = 0{,}2 \times 0{,}4285 = 0{,}0857 = d\,f$$
$$(D_1 > M) \times (F_1 > M) = 0{,}33 \times 0{,}5238 = 0{,}1728 = d_1\,f_1.$$

8° Può essere importante, in molti casi, determinare per una data classe o per un gruppo di classi, l'*indice di isolamento* nella serie delle classi stesse.

Si voglia, ad esempio, determinare l'indice di isolamento della classe 82 rispetto alla susseguente classe 93.

Nella progressione aritmetica (82 a 120) alla quale appartengono le due classi, si hanno 39 termini possibili o classi; fra la classe 82 e la classe 93 intercedono 10 classi possibili, il rapporto $\frac{10}{39}$ ci darà 0,2564 che è l'indice di isolamento della classe 82 dalla classe 93.

Trattandosi, non di una classe estrema, ma di una classe intermedia della serie, è d'uopo determinare due indici di isolamento fra le due classi vicine.

Volendo calcolare l'isolamento della classe 105, bisognerà calcolare l'indice di isolamento di 105 da 102 e di 105 da 109. Avremo $\frac{2}{39} = 0{,}0512$ e $\frac{3}{39} = 0{,}0769$.

Volendo tener conto anche della frequenza della classe, si moltiplica il suo indice di frequenza F per gli indici di isolamento.

L'indice di frequenza della classe 105 è 0,1428, avremo:

$$I\ 0{,}0512 \times F\ 0{,}1428 = 0{,}0073 = if$$
$$I_1\ 0{,}0769 \times F\ 0{,}1428 = 0{,}0109 = i_1 f_1.$$

Il carattere della lunghezza del capo nei 21 individui ♀ di *Bufo vulgaris* del Giappone studiato col procedimento precedente, ci ha una serie di valori indici della sua variazione quantitativa che si possono riunire nella *sinossi quantitativa* (SQ) seguente (1):

	$Ce = 82 \quad 120$	$C = 15$
	$A = 39$	$V = 21$
		$a = 0{,}3846$
	$M = 101$	$F < M = 0{,}4285$
$SQ =$ $(R=1)$	$Lmf = 95 \quad 106$	$F_1 = M = 0{,}0476$
		$F_2 > M = 0{,}5238$
	$C, 82, I = 0{,}2564$	$D < M = 0{,}2 \quad df < M = 0{,}0857$
	$C, 82, if = 0{,}0122$	$D_1 > M = 0{,}33 \quad d_1 f_1 > M = 0{,}1728$

C, classi osservate. V, numero delle varianti. C*e*, classi estreme. A, indice di variabilità. *a*, indice di variazione. M, media. F, F_1, F_2, indici di frequenza. L*mf*, limiti di maggior frequenza. D, D_1, indici di deviazione. *df*, $d_1 f_1$, indici di deviazione e di frequenza. I, indice di isolamento. *if*, indice di isolamento e di frequenza. R, differenza fra due classi consecutive corrispondente alla ragione della progressione aritmetica stabilita fra i valori delle classi estreme. S Q, sinossi quantitativa del carattere nella serie studiata.

È necessario inoltre nelle ricerche speciali intorno alle variazioni di un carattere di una serie di individui accompagnare la S Q collo specchietto delle classi osservate e delle loro frequenze che si possono disporre nel modo seguente:

Mi si conceda di insistere sulla utilità negli studi intorno alla variabilità di un carattere di non limitarsi a dare i valori degli indici: ma di unire anche lo specchietto sopra indicato delle classi e delle loro frequenze. Nel procedimento che io ho proposto per lo studio analitico della variabilità dei caratteri di una serie di individui, ho indicato alcuni indici che si riferiscono a speciali modalità del fenomeno di variazione: ma non è d'uopo dire che altri ancora se ne potrebbero escogitare in rapporto ad altre modalità, che ricerche ulteriori metteranno in chiaro e che si potranno calcolare seguendo lo stesso procedimento generale. Il loro calcolo sarà possibile se verranno date le classi e le loro frequenze. Per tal modo il lavoro fatto riuscirà realmente utile alle ricerche future anche nel caso si vogliano escogitare altri procedimenti di calcolo.

I valori compresi nella sinossi quantitativa di un carattere, determinati col procedimento sopra proposto, in una serie di

individui, sono comparabili coi valori analoghi studiati in un'altra serie in cui la ragione della progressione aritmetica iniziale, ossia la differenza fra i valori di due classi consecutive, sia eguale ad 1.

Aumentando il valore di R della progressione iniziale diminuisce il grado di precisione colla quale si studia la variazione quantitativa del carattere. Nelle ricerche che si riferiscono alle variazioni dei caratteri biologici, è conveniente procedere a misure dirette sufficientemente esatte da non dover aumentare oltre ad 1 il valore di R.

Le cose precedenti si possono riassumere nel modo seguente: Volendo esprimere le modalità principali della variazione quantitativa di un carattere in una serie di individui si determina:

1° L'*indice di variabilità* che è dato dal numero dei termini che entrano nel *campo di variazione* (esprimibile sotto forma di una progressione aritmetica colla ragione eguale ad 1, istituita fra i due valori estremi osservati del carattere).

2° L'*indice di variazione* che si ottiene dal rapporto fra il numero dei termini della progressione rappresentati da valori del carattere effettivamente osservati nella serie degli individui ed il numero totale dei termini del campo di variazione.

3° *Gli indici di frequenza* dei valori inferiori, eguali e superiori alla media. Si determina la media dei valori costituenti l'intero campo di variazione e rispetto ad essa si dividono i valori realmente osservati in tre gruppi; si sommano le frequenze dei valori di ciascun gruppo e si fanno i rapporti delle somme rispettive col numero totale degli individui della serie.

4° *Gli indici di deviazione* dalla media. Si ottengono: dividendo il campo di variazione in due parti: 1° dal valore minore al valore medio; 2° dal valore medio al valore maggiore, si fa la somma in ciascuna parte delle deviazioni di tutti i valori possibili (vale a dire dei termini delle due progressioni che si vengono così a costituire) dalla media dell' intero campo di variazione: si fanno quindi le somme delle deviazioni dei valori effettivamente osservati e appartenenti alle due sopradette porzioni del campo di variazione, dalla media dell'intero campo di variazione; per ultimo, si fanno rispettivamente i rapporti fra le due somme. Volendo tener conto anche della frequenza, si moltiplicano rispettivamente gli indici così ottenuti per gli in-

dici di frequenza ottenuti nel modo sopradetto. Con analogo procedimento, si determinano gli indici di deviazione di un valore qualsiasi della serie.

5° L'*indice di isolamento* di un valore della serie si ottiene calcolando il numero dei valori possibili che intercedono fra lui e il valore (se si tratta dei valori estremi) o i valori (se si tratta di valore intermedio) realmente osservati più vicini e poscia dividendo il numero stesso pel numero totale dei valori (o classi) del campo di variabilità. Volendo tener conto anche della frequenza del valore, si moltiplica l'indice di isolamento così ottenuto (o gli indici se si tratta di un valore intermedio) per l'indice di frequenza del valore stesso.

Il metodo sopra esposto concede non solo di tener conto dei risultamenti dello studio di qualunque serie di individui, anche poco numerosa, e quindi di utilizzare il lavoro di molti osservatori per uno scopo unico, ma concede anche la preparazione di dati quantitativi che possono essere materiale per ulteriori studi e comparazioni, in ordine alla conoscenza delle leggi che regolano il variare degli animali.

Una serie *sufficientemente* numerosa di dati preparati nel modo sopradetto potrà essere espressa graficamente sotto forma di curve colle regole note e queste potranno essere sottoposte al calcolo matematico e alle ricerche istituite dal Pearson nelle sue contribuzioni allo studio matematico dell'evoluzione (1) e seguite da altri (2).

Giova ripetere tuttavia che questo genere di ricerche non potrà dare buoni frutti che allorquando con una analisi molto più minuta di quella che non si possa fare ora, non si sia riusciti a scindere il fenomeno enormemente complesso della variazione organica in un numero sufficientemente grande di fenomeni secondari i quali concedano uno studio adeguato delle molteplici cause che li producono.

Nello stato presente delle ricerche intorno ai viventi, è

(1) " Philosophical Trans. ", vol. CLXXXV, CLXXXVI, CLXXXVII, CXCI, " Proceed. Roy. Soc. ", LX, LXII.

(2) Per le indicazioni bibliografiche in proposito cfr. Duncker e Davenport, Op. cit.

importante, come già sopra ho detto, dare la massima cura a preparare dati quantitativi atti ad uno studio di comparazione molto più preciso di quello che non si possa fare ora con quelli che vennero riuniti per lo passato e che concedano in avvenire determinazioni sicure del variare degli organismi col succedersi degli anni. Se è lecito un paragone, si può dire che, è oggi necessario fissare con dati numerici comparabili lo stato presente della variabilità dei caratteri degli organismi, come l'astronomia fissa la posizione degli astri in un dato momento, affinchè le determinazioni che verranno fatte in tempi da noi più o meno lontani, conducano a valutare in modo preciso lo spazio percorso dai caratteri stessi, nella loro variazione.

Il metodo di studio da me proposto per le variazioni quantitative dei caratteri degli animali tende ad indirizzare le ricerche per questa via e in ogni caso fornisce un mezzo per esprimere in modo più preciso di quello che non si sia fatto, in generale, fino ad ora, le variazioni quantitative dei caratteri di una serie di individui per modo che essi siano veramente paragonabili con quelli di un'altra serie qualsiasi. È lecito sperare che da un numero sufficientemente grande di ricerche condotte con tale metodo, si possa giungere ad una determinazione migliore dell'entità specifica: entità che è *la base necessaria di qualunque ricerca intorno ai fenomeni biologici.*

L'Accademico Segretario
ANDREA NACCARI.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 1° Aprile 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Cossa, Vicepresidente dell'Accademia, Peyron, Manno, Pezzi, Allievo e Renier Segretario. — I Soci Ferrero e Graf scusano la loro assenza.

È approvato l'atto verbale della seduta precedente, 18 marzo.

Il Vicepresidente Cossa, incaricato di rappresentare l'Accademia nella solennità del ricorrente secondo centenario della Accademia delle Scienze di Berlino, insieme col Socio nazionale non residente Graziadio Ascoli, riferisce alla Classe intorno a quella solenne commemorazione. Il Presidente si fa interprete della Classe col ringraziare il Vicepresidente per la rappresentanza assunta e per la minuta relazione ch'egli ebbe la cortesia di esporre. — Il Socio Cossa si assenta.

La Classe prende atto di una lettera del Socio Ferrero, in cui egli comunica risultargli da informazioni assunte che il rimpianto Socio Claretta non aveva se non riunito qualche appunto per la commemorazione del Socio Perrero. Quindi, in conformità alla promessa fatta alla Classe nell'adunanza del 4 marzo ultimo scorso, egli si assume di stendere le commemorazioni di entrambi i Socii defunti.

Il Presidente partecipa avere il Ministero dell'Istruzione trasmesso l'estratto del R. Decreto 4 marzo, col quale vien conferita al Socio Cipolla la pensione accademica già goduta dal rimpianto Socio Claretta.

Il Presidente si compiace di presentare alla Classe la sontuosa opera del conte Senatore Pier Desiderio Pasolini su *Caterina Sforza,* opera già premiata dall'Accademia col premio Gautieri destinato alla Storia. — L'offerente conte Pasolini sarà ringraziato.

Il Socio Manno offre da parte del prof. Michelangelo Billia una serie ragguardevole di suoi volumi ed opuscoli, su cui pronuncia parecchie parole di elogio. — Il prof. Billia sarà ringraziato.

Il Socio Renier, Segretario, incaricato col Socio Graf di riferire intorno alla memoria del dott. Bernardo Sanvisenti, *Sul poema di Uggeri il Danese,* legge la relazione che è inserita negli *Atti.* La relazione è favorevole e la Classe la approva. Data lettura della monografia del dott. Sanvisenti, la Classe ne vota ad unanimità l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

Il Socio Cipolla, rappresentato dal Segretario, presenta per le *Memorie* uno scritto del dott. Pietro Gribaudi su *Guglielmo Lungaspada marchese di Monferrato e suo figlio Baldovino V re di Gerusalemme.* Il Presidente incarica di riferirne alla Classe il Socio proponente ed il Socio Ferrero.

Il Segretario presenta, per incarico avuto dall'autore, una nota del Socio Ferrero: *Frammento di diploma concernente l'armata di Miseno.* È inserita negli *Atti.*

LETTURE

Frammento di diploma concernente l'armata di Miseno.

Nota del Socio ERMANNO FERRERO.

Nella mia nuova raccolta d'iscrizioni classiarie ho compreso un frammento di diploma concernente l'armata di Miseno (1) scoperto nella Bulgaria e pubblicato, da un lucido, dal ch. Héron, de Villefosse (2). Il mancante nome dell'imperatore, di cui rimane indicata la terza potestà tribunicia, era stato supplito dall'editore con quello di Traiano; perciò il diploma sarebbe del 99. Avvertii non essere bastevole il titolo di *pontifex* scritto in disteso per assegnare a Traiano piuttosto che ad un principe posteriore questo diploma, ad ogni modo non più recente di Antonino per ragione della formola di concessione dei privilegii. E siccome gli anni di servizio sono espressi coi numeri cardinali, che per la prima volta apparivano in un diploma del 129, così ho creduto escludere tanto Traiano quanto Adriano, la cui terza potestà tribunicia è del 119, ed assegnare il nuovo diploma al 140, terzo della potestà tribunicia di Antonino.

Frattanto il ch. Tocilesco ripubblicò tale diploma, entrato nel museo di Bucarest, negli *Jahreshefte des oesterreichischen archäologischen Institutes in Wien* (3), determinando in principio alcuni avanzi del nome dell'imperatore, che il precedente editore non aveva potuto osservare, ed i quali indiscutibilmente sono quelli del nome di Adriano. Questo frammento si deve quindi leggere e supplire così:

(1) *Nuove iscr. ed osserv. intorno all'ordin. delle armate dell'impero romano*, Torino, 1899, p. 45, n. 737 (*Mem. della R. Accad.*, s. II, t. XLIX, *sc. mor.*, p. 209).

(2) *Acad. des inscr. Comptes-rendus des séances de l'année 1897*, p. 538 e segg.

(3) Band II, 1899, p. 151-154.

[Imp(erator) Caes(ar) Divi Traiani Parthici f(ilius), Divi Nerv]ae nepos, [T]raia[nus Hadrianus Au]g[ustus p]ontifex maximus (1) *tribunic(ia) potestat(e) III co[(n)s(ul) III, p(ater) p(atriae)*

ii]s qui militaverunt i[n classe praet(oria)] Misenensi, quae est s[ub . . . . . .]one, sex et viginti sti[pendis emeritis d]imissis honesta mis[sione,

quorum n]omina subscripta [sunt ipsis lib]eris posterisque eo[rum civitatem de]dit et conubium c[um uxoribus, quas tunc habuissent etc.

Il Tocilesco ha creduto poter supplire il nome del prefetto *s[ub Iulio Front]one*, come si legge in un diploma del 129 (2). Ma per la distanza di dieci anni fra il nuovo e questo abbiamo qualche dubbio nell'ammettere tale supposizione, sembrandoci un po' troppo lunga la permanenza del medesimo personaggio nel comando dell'armata.

---

(1) Nell'esterno della tabella: *pontifex m....*; nell'interno *pont. max.*

(2) *C. I. L.*, III, D., IX (= n. 25 della nostra raccolta). Nell'elenco dei prefetti dell'armata di Miseno, che abbiamo dato a p. 121 delle *Nuove iscrizioni*, ci sfuggì per costui il prenome *M.*, che non si legge nel diploma, solo documento concernente questo personaggio. Per un momento il Tocilesco ha pensato che questi fosse il *Iulius Fronto*, a cui rescrisse Traiano (*Dig.*, XLVIII, xix, 5); ma da tale congettura lo ha sconsigliato il Mommsen.

Relazione intorno alla *Memoria* del Dr. Bernardo Sanvisenti: *Sul poema di Uggeri il Danese.*

Quale sia stata la fortuna della leggenda di Uggeri il Danese in Italia, indagò già Pio Rajna in un suo dotto lavoro edito nel vol. II della " Romania ". E tra i varî risultamenti di quella sua indagine, uno specialmente merita nota, questo: che la tradizione uggeriana d'Italia rappresenta uno stadio anteriore e più genuino di quella che ci rimane nella Francia medesima. Se non che il Rajna, per lo studio suo, potè valersi unicamente delle stampe antiche e di due mss. mutili. Il dott. Sanvisenti invece ebbe la ventura di rintracciare nella privata biblioteca della contessa Antonia Suardi-Ponti l'unico codice che ci conservi integro il poema in ottava rima su *Uggeri il Danese.*

Il Sanvisenti dimostra nella sua memoria che nessuna relazione intercede tra il codice nuovo del *Danese* e quelli di cui si conservano frammenti, e tra esso e le stampe. L'esame dialettologico del Sanvisenti fa vedere inoltre che, con molta probabilità, il testo in ottava rima conservato nel ms. Suardi è opera di un trecentista di Siena, il quale elaborò un originale francoveneto. Studia in seguito l'A. il carattere dell'*Uggeri* e i suoi rapporti con la tradizione francese: dimostra che francese, anche dove meno si crederebbe, è il contenuto di esso: pone in chiaro che il poema è anteriore all'*Orlando* della Laurenziana, a cui notoriamente attinse il Pulci buona parte della materia del *Morgante.* Al Sanvisenti sembra certo che il Pulci ricorresse anche al *Danese* e che da esso, e più precisamente dalla figura di Borgone, togliesse l'inspirazione pel suo Astarotte. Questa è congettura rilevantissima per la storia della poesia epica italiana del Rinascimento, e gli argomenti con che il Sanvisenti s'industria di dimostrarla meritano considerazione.

Non poche altre illazioni trae l'A. dallo studio del poema da lui rinvenuto, del quale finisce con dare un'accurata analisi,

atta a servire di base ad ulteriori ricerche e ad utili raffronti. Ma i sottoscritti credono che basti il sin qui detto a chiarire l'importanza vera e solida dello studio critico del dott. Sanvisenti, dal quale ritengono che le ardue e proficue indagini sulle vicende dell'epica cavalleresca in Italia trarranno non lieve profitto. Propongono, pertanto, alla Classe di ammetterlo alla lettura.

A. Graf.

R. Renier, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXV, DISP. 11ª E 12ª, 1899-900

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1900

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'8 Aprile 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Bizzozero, Direttore della Classe, Berruti, D'Ovidio, Mosso, Spezia, Camerano, Foà, Jadanza, Guareschi, Guidi, e Parona.

In assenza del Socio Segretario Naccari, il Presidente incarica il Socio Camerano di fungere da Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale della precedente adunanza, che viene approvato.

Il Presidente partecipa la morte del Socio straniero Giuseppe Luigi Bertrand e comunica alla Classe che furono già inviate le condoglianze alla famiglia dell'illustre matematico.

Il Presidente presenta a nome del Socio corrispondente Prof. Pirotta un opuscolo intitolato: *Osservazioni e ricerche sul Cynomorium coccineum L.*, ed a nome del Socio corrispondente Prof. Righi due opuscoli col titolo: *Volta e la pila* (Milano, 1900); *Sul fenomeno di Zeeman* (Bologna, 1900).

Il Vicepresidente Cossa rende conto alla Classe del mandato ricevuto dall'Accademia di rappresentarla nella solennità

del secondo centenario della fondazione dell'Accademia delle Scienze di Berlino. Il Socio Bizzozero ringrazia a nome di tutta la Classe il Vicepresidente.

Il Socio Foà a nome anche dei Soci Bizzozero e Mosso, legge la relazione intorno alla memoria del dott. Pasquale Sfameni intitolata: *Gli organi nervosi terminali del Ruffini ed i corpuscoli del Pacini studiati nelle piante e nei polpastrelli del cane, del gatto e della scimmia.* La relazione favorevole all'accoglimento della memoria e alla sua stampa nei volumi accademici è approvata all'unanimità e verrà stampata negli *Atti*. All'unanimità si approva pure con votazione segreta la stampa della detta memoria.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Cesare Aimonetti, *Determinazione di gravità relativa ad Aosta, Gran S. Bernardo, Courmayeur e Piccolo S. Bernardo,* presentata dal Socio Jadanza;

2° Luigi Sabbatani, *Sull'ossidazione dell'acido citrico e dei citrati col permanganato di potassio e col ferro,* presentata dal Socio Guareschi.

Per ultimo il Presidente presenta a nome del Socio Volterra, assente, per l'inserzione nei volumi delle *Memorie*, uno scritto del dott. Ermenegildo Daniele, intitolato: *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed estendibili.*

Vengono incaricati di riferire intorno a questa memoria i Soci Volterra e Segre.

LETTURE

Determinazioni di gravità relativa ad Aosta, Gran S. Bernardo, Courmayeur e Piccolo S. Bernardo.

Nota del Dott. CESARE AIMONETTI.

Nell'anno 1898 (*), il sig. Hansky, astronomo aggiunto all'Osservatorio di Meudon, per incarico del sig. Janssen, eseguì alcune determinazioni di gravità relativa a Chamounix, ai Gr. Mulets, e sulla vetta del Monte Bianco.

Allo scopo di portare un modesto contributo allo studio della gravità terrestre nelle vicinanze del grande colosso alpino, ho eseguito nell'estate dell'anno 1899 quattro determinazioni di gravità relativa ad Aosta, Gr. S. Bernardo, Courmayeur e Piccolo S. Bernardo.

In questa nota sono registrati i risultati delle osservazioni fatte, ed i valori della gravità osservata nelle singole stazioni: spero di potere fra poco pubblicare anche le rispettive riduzioni al livello del mare, che non ho potuto completare, mancandomi ancora alcuni dati relativi alle regioni circostanti le singole stazioni.

Le osservazioni furono fatte coll'apparato pendolare Sterneck di proprietà del Gabinetto di Geodesia della R. Università di Torino, munito dei quattro pendoli N. 41, 42, 45, 46 (**).

Le altezze barometriche furono lette sul barometro aneroide Troughton e Simms, N. 820, di cui determinai la correzione confrontandolo col barometro normale dell'Osservatorio astronomico

(*) Cfr. " Comptes rendus des séances de l'Académie „ 2° sem. 1898.

(**) Per la descrizione dell'apparato, ed il metodo d'osservazione, cfr. le mie note: *Determinazione relativa della gravità terrestre a Torino*, " Atti della R. Acc. delle scienze di Torino „, vol. XXXII, 1897 e *Determinazione della gravità relativa nel Piemonte*, " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino „, vol. XXXIV, 1899.

a Torino, e coi barometri normali degli Osservatori meteorologici del Gran S. Bernardo e del Piccolo S. Bernardo. Il cronometro adoperato è stato il cronometro Frodsham a tempo siderale n. 3576, a contatto elettrico. Il suo andamento è stato determinato ad Aosta e Courmayeur, mediante osservazioni di passaggi di stelle orarie nel verticale della polare, eseguite nelle sere precedenti e seguenti il giorno delle osservazioni pendolari. Al Gran S. Bernardo non mi è stato possibile, a causa del tempo, sempre nebbioso verso sera, fare osservazioni di stelle: determinai l'andamento del cronometro mediante le altezze del sole nel primo verticale. Mi servii per queste osservazioni di un teodolite Troughton e Simms avente l'approssimazione di 10″ ed il cannocchiale di 31 cm. di distanza focale. Il reticolo è formato da un filo orizzontale e cinque verticali, dei quali misurai le distanze equatoriali osservando il passaggio di una serie di stelle boreali. Nella stazione del Piccolo S. Bernardo, essendo impedito dall'incostanza del tempo di fare le osservazioni, ottenni di poter comunicare telegraficamente coll'Osservatorio astronomico di Torino, e quindi dedurre l'andamento del cronometro confrontandolo direttamente col pendolo normale dell'Osservatorio.

Nella seguente tavola sono registrati i dati relativi alle singole stazioni ed ai luoghi di osservazione, che ebbi sempre cura di scegliere appartati e poco esposti a variazioni di temperatura.

Stazione	Luogo di Osservazione	Posizione Geografica	Altezza sul m.
Aosta	Locale sotterraneo nell'edificio della Scuola Normale femminile . . .	$\varphi = 45°44'15''$ $\theta = -5\ 07\ 55$	570^m
Gran S. Bernardo	Piccolo edificio appartato, dipendente dall'Ospizio	$\varphi = 45\ 52\ 10$ $\theta = -5\ 16\ 50$	2450
Courmayeur	Cantina privata . . .	$\varphi = 45\ 47\ 25$ $\theta = -5\ 28\ 45$	1220
Piccolo S. Bernardo	Sotterraneo dell'Ospizio, sottostante a locali destinati a magazzino .	$\varphi = 45\ 40\ 30$ $\theta = -5\ 34\ 35$	2150

I risultati delle osservazioni sono registrati nelle seguenti tavole.

Durate di oscillazione, in tempo siderale, dei quattro pendoli, ridotte a 0°, al vuoto ed all'ampiezza infinitesima.

Stazioni	Pendoli			
	N. 41	N. 42	N. 45	N. 46
Aosta (*Media di 3 serie*)	0.5080634	0.5077292	0.5080801	0.5083774
Gr. S. Bernardo (*Media di 2 serie*)	0.5081601	0.5078261	0.5081756	0.5084696
Courmayeur (*Media di 2 serie*)	0.5081095	0.5077706	0.5081203	0.5084163
Picc. S. Bernardo (*Media di 2 serie*)	0.5081522	0.5078107	0.5081627	0.5084589
Torino (*Media di 2 serie*)	0.5080290	0.5076909	0.5080399	0.5083374

Assumendo per Torino il valore delle gravità:

$$g_t = 9.80570$$

si deducono i seguenti valori di $g_t - g_i$, per le singole stazioni:

Stazioni	Valori di $g_t - g_i$				Medie
	Pend. 41	Pend. 42	Pend. 45	Pend. 46	
Aosta	+ 0.001328	0.001479	0.001552	0.001543	0.00148
G. S. Bernardo	5059	5220	5236	5098	515
Courmayeur	3107	3078	3103	3043	308
Picc. S. Bern.	4754	4626	4739	4686	470

Da questi valori di $g_t - g_i$, si deducono i seguenti valori della gravità terrestre nel luogo di osservazione:

Aosta	$g = 9^m.80422$
Gr. S. Bernardo	$g = 9\ .80055$
Courmayeur	$g = 9\ .80262$
Piccolo S. Bernardo	$g = 9\ .80100.$

Torino, Gabinetto di Geodesia della R. Università.
Aprile 1900.

Sulla ossidazione dell'acido citrico e dei citrati col permanganato di potassio o col ferro.

Nota del Prof. LUIGI SABBATANI.

Da alcuni anni attendo a ricerche chimiche e biologiche sull'acido citrico e derivati suoi, ed ho fatte così varie osservazioni sull'ossidazione dell'acido libero e dei citrati di sodio, le quali non avrei certo pubblicate per ora e da sole, se a ciò non fossi indotto da una recente nota del Denigès, nella quale, senza saperlo, viene a confermare pienamente una mia osservazione, che pubblicai nel dicembre del 1898.

I.

Ossidazione col permanganato di potassio.

È noto che, ossidando col permanganato le materie organiche, si ottengono prodotti diversissimi a seconda delle condizioni sperimentali; questo pure avviene per l'acido citrico, e quando si faccia variare la quantità di permanganato, la temperatura, la reazione del mezzo in cui si opera l'ossidazione, o si aggiunga il reattivo rapidamente o lentamente, si arriva a risultati diversi.

a) *Riguardo alla temperatura* il Denigès ha annunziato ora (1) che per ossidazione a freddo dell'acido citrico col permanganato di potassio si ottiene dell'acido acetondicarbonico, ed io alla fine del 1898, studiando la reazione Stahre, aveva dimostrato questo in modo sicuro, e concludeva: " *Così rimane* " *dimostrato che per ossidazione dell' acido citrico in soluzione* " *acquosa col permanganato di potassio si forma dell' acido ace-* " *tondicarbonico* " (2).

Ma l'acido acetondicarbonico in soluzione acquosa prontamente si decompone in acetone ed anidride carbonica, non resiste poi affatto alle temperature alte e però ai più è sfuggito il prodotto che primamente si forma in questa ossidazione, ed hanno trovato soltanto l'acetone, che è il prodotto finale della reazione.

Nell'ultima edizione del Beilstein (3) trovasi ancora detto che l'acido citrico in soluzione acida dà col permanganato di potassio dell'acetone, così s'è detto fino ad ora da tutti, così Stahre (4) erroneamente interpretava la reazione da lui proposta per il riconoscimento dell'acido citrico, e però il Denigès, non avendo forse conoscenza delle mie note, ha pubblicata l'osservazione, credendo di dir cosa nuova.

Quando si ossida cautamente col permanganato l'acido citrico libero, sciolto in acqua distillata, da solo od in presenza di acidi minerali, sempre in un primo momento si ottiene dell'acido acetondicarbonico, il quale si riduce poi interamente ad acetone più o meno presto a seconda della temperatura alla

---

(1) Denigès G., *Sur l'oxydation manganique des acides citriques et maliques*, " Compt. rend. ", T. *130*, n. 1, p. 32 (2 Janvier 1900).

(2) Bergesio B. e Sabbatani L., *Formazione di pentabromoacetone dall'acido acetondicarbonico*, " Giornale della R. Accademia di medicina di Torino ", vol. IV, anno LXI, fasc. 12; Comunicazione fatta nella seduta del 9 dicembre 1898; " Annali di Farmacoterapia e Chimica ", vol. XXVIII, fasc. 12, p. 529 (dicembre 1898). — Bergesio B. u. Sabbatani L., *Bildung von Pentabromaceton aus Acetondicarbonsäure*, " Chem. Central-Blatt ", 1899, Bd. I, S. 596. Un sunto di questo lavoro è comparso anche nella " Chem.-Zeitung " del 1899. — Sabbatani L., *Ricerche farmacologiche e chimiche sugli acidi acetondicarbonico e citrico*, " Atti della R. Acc. delle scienze di Torino ", vol. XXXIV, adunanza del 1° gennaio 1899.

(3) Beilstein, *Handbuch der organischen Chemie*, Bd. I, S. 836.

(4) Stahre L., *Nordisk Farmaceutisk Tidskrift*, *2*, 141.

quale si opera: presso all'ebollizione l'acido citrico dà subito acetone e ciò è noto fin dalle ricerche di Péan de S. Gilles (1).

b) Riguardo allo stato in cui trovasi l'acido citrico si osserva che mentre libero od in presenza di acidi minerali dà sempre derivati chetonici (acido acetondicarbonico prima, acetone poi), come sale neutro per ossidazione col permanganato di potassio dà dell'acido ossalico. I sali acidi (mono e bisodico) dànno contemporaneamente acetone ed acido ossalico, come se si trattasse di una miscela di acido libero e citrato neutro.

c) Riguardo poi al modo con cui si aggiunge il permanganato, ho osservato che, aggiungendolo a goccie in soluzione acquosa bollente, in modo da raccogliere con refrigerante i prodotti volatili mano mano che si formano, si raggiunge il massimo rendimento di acetone.

d) Riguardo alla quantità di permanganato, ho osservato che, se è eccessiva, si ha una distruzione completa dell'acido citrico libero o salificato ad H^2O e CO^2; ma per aggiunta moderata di permanganato la quantità di acetone od acido ossalico che si forma è entro certi limiti proporzionale alla quantità di permanganato usata.

Riporto qui alcune esperienze che dimostrano precisamente queste cose.

Sciolgo l'acido od il citrato in gr. 200 d'acqua e faccio bollire in pallone con refrigerante per raccogliere i prodotti volatili: mentre bolle, introduco adagio adagio, goccia a goccia una soluzione satura di permanganato di potassio. Quando il permanganato non viene più ridotto, nel distillato doso l'acetone trasformandolo in iodoformio.

I da gr. 0,1915 di acido citrico ottenni gr. 0,2571 di iodoformio.

II da gr. 0,2412 di citrato monosodico ottenni gr. 0,3129 di iodoformio.

III da gr. 0,4004 di citrato bisodico ottenni gr. 0,3907 di iodoformio.

IV da gr. 0,3786 di citrato trisodico ottenni gr. 0,0332 di iodoformio.

(1) Péan de Saint-Gilles, *Oxydation de l'acide citrique au moyen du permanganate de potasse*, " Comptes rendus ", T. *47*, p. 554.

Da cui acetone $^0/_0$ ottenuto:

I dall'acido citrico	19,73
II dal citrato monosodico	19,5
III dal citrato bisodico	14,4
IV dal citrato trisodico	1,2.

Poichè in soluzione acida due molecole di permanganato cedono cinque atomi d'ossigene, si può ammettere che sette molecole di acido citrico nella prima esperienza ora riferita reagiscano con due molecole di permanganato, formando due molecole di citrato neutro col potassio ed il manganese, e liberando cinque atomi d'ossigene: questi reagirebbero poi colle restanti cinque molecole di acido citrico dando cinque molecole d'acetone.

In base a questa ipotesi si calcola che 100 parti di acido citrico cristallizzato ($C^6H^8O^7 + H^2O$) dovrebbero dare parti 19,72 di acetone e sperimentalmente abbiamo ottenuto 19,73.

Mentre, operando come sopra si disse, dall'acido citrico, dal citrato mono e bisodico si ottiene sempre acetone in grande quantità, dal citrato neutro invece (trisodico) se ne ottengono solo delle traccie come impurità: in quest'ultimo caso si formano dei carbonati e dell'ossalato.

Sciolto il citrato trisodico in acqua, si addiziona con una quantità determinata di permanganato potassico purissimo e quindi si tiene a bagnomaria bollente per 10-15 minuti. Dopo ciò si filtra, e lavato fino ad esaurimento il precipitato rimasto sul filtro, si svapora il filtrato e le acque di lavaggio riunite, si secca il residuo a 105-110° fino a peso costante, ed in una porzione di esso si cerca l'acido citrico, l'acido ossalico, gli acidi organici volatili: in un'altra porzione si dosa l'acido ossalico. Nelle diverse prove fatte si vide che:

1° rimaneva sempre un po' di acido citrico indecomposto, e la quantità di esso diventava sempre più piccola mano mano che si usava una maggiore proporzione di permanganato;

2° non si formava mai acido acetico od altri acidi volatili;

3° si produceva una forte quantità di carbonati;

4° si formava acido ossalico fino ad un certo limite in ragione della quantità di permanganato impiegata.

Riporto qui tre esperienze fatte con gr. 10 di citrato trisodico per ciascuna. Nella prima si ossidò il citrato con permanganato in ragione di una molecola di quello per mezzo di questo; nella seconda si usarono a molecole uguali il citrato ed il permanganato; nella terza si adoperò una molecola di citrato per 4 molecole di permanganato.

I residui secchi delle tre esperienze furono di gr. 9,6 nella prima, gr. 10,0 nella seconda, gr. 10,8 nella terza: dosando l'acido ossalico in questi tre residui come ossalato di calcio e pesando dopo calcinazione dell'ossalato come CaO si ebbe:

I	da gr.	1,0636	di sostanza	gr.	0,0232	di CaO
II	„	1,4092	„	„	0,0596	„
III	„	1,4698	„	„	0,2017	„

per cui da gr. 10 di citrato trisodico si ebbe:

I	con	$^1/_2$	mol. di permanganato	gr.	0,335	di acido ossalico
II	„	1	„	„	0,679	„
III	„	4	„	„	2,381	„

In quest'ultima esperienza il citrato trisodico diede il 23,8 % di acido ossalico, mentre, calcolando che una molecola di citrato trisodico con conveniente quantità di permanganato possa dare una molecola di acido ossalico, si dovrebbe avere il 25,2 %.

II.

Ossidazione operata dal ferro.

Bizio (1) aveva osservato che le soluzioni di acido ossalico lentamente si ossidano all'aria dando dell'anidride carbonica, De Vries (2) aggiungeva che molti acidi organici, fra cui anche il citrico, esposti alla luce del sole in soluzione acquosa in parte si *distruggono* per un processo di ossidazione con sviluppo di

(1) Bizio G., " Zeitschr. für analyt. Chem. ", (1870), *9*, 392.

(2) De Vries Hugo, *Sur la décomposition des acides organiques sous l'influence de la lumière solaire,* " Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas ", *3*, 365.

CO^2, e che, se l'aria non ha libero accesso, la soluzione conserva il suo titolo. Osservava poi che la luce bleu è molto attiva, non la rossa, e che per aggiunta di piccolissime quantità di ferro l'ossidazione dell'acido viene grandemente aumentata.

Avendo io preparato il citrato di ferro di Kämmerer (1), $C^6H^6O^7Fe + H^2O$, che è alterabilissimo e poco solubile nell'acqua, mi accorsi che a contatto dell'aria svolge facilmente dell'acetone; ho ripetute allora le esperienze di De Vries ed ho potuto constatare in modo sicurissimo che anche in queste condizioni l'acido citrico dà come prodotto d'ossidazione dell'acetone.

Quando per la preparazione del citrato ferroso bimetallico di Kämmerer si aggiunge limatura di ferro ad una soluzione di acido citrico al 2-5 % e si scalda in un pallone a collo un po' lungo, il ferro viene rapidamente intaccato e si ha abbondante svolgimento d'idrogene; presto il liquido intorbida, poi lascia depositare una polvere cristallina incolora, che aumenta fino a dare al liquido aspetto di poltiglia densa. Finchè lo svolgimento d'idrogene è abbondante il liquido rimane incoloro; ma quando verso la fine si rallenta, e più ancora per raffreddamento, ad operazione finita, il liquido prontamente assume colorazione verde; se si ha cura di impedire l'accesso dell'aria allora si conserva incoloro. Se si ripete la preparazione in pallone munito di refrigerante per raccogliere i prodotti volatili che possono essere trascinati dalla corrente d'idrogene e dal vapor d'acqua, si ha che durante l'operazione non passa affatto acetone; ma se si fa entrare aria nel pallone, subito compare acetone nel distillato.

In un matraccio con refrigerante a distillare pongo gr. 2,10 di acido citrico cristallizzato e gr. 0,56 di limatura di ferro con cm^3 120 di acqua, poi scaldo fino a soluzione completa del ferro: il distillato non contiene acetone. Filtro il liquido rimasto nel pallone e lo lascio all'aria per alcune ore, aggiungendo acqua in ragione di quella distillata: diventa verde e, distillato una seconda volta, nelle prime porzioni si può nettamente dimostrare la presenza di acetone. Alternando così le distillazioni e l'espo-

(1) KAEMMERER H., *Beiträge zur Kenntniss der Citronsäure*, " Ann. der Chem. u. Pharm. ", Bd. *170* (1873), 176.

sizione all'aria si ebbe sempre formazione di acetone dopo che il liquido era venuto a contatto dell'aria.

In ordine poi alle esperienze del De Vries riporto qui la seguente osservazione.

Sciolgo separatamente in due palloni molto grandi gr. 1 di acido citrico cristallizzato in 1000 cm³ d'acqua distillata, e ad uno aggiungo cinque goccie della soluzione di cloruro ferrico del reagentario, per cui tutto il liquido assume colorazione gialla. Distillando immediatamente cm³ 100 di ambo le soluzioni, nelle prime porzioni dei due distillati non si trovò affatto acetone: però il giorno dopo, distillando ancora 100 cm³ di ambo le soluzioni, nel distillato della normale non si trovò affatto acetone, mentre in quello proveniente dalla soluzione contenente ferro si potè dimostrare evidente la presenza d'acetone.

Dopo 7 giorni, stando sempre le soluzioni alla luce diffusa, da 200 cm³ della seconda soluzione si ottenne acetone, che, dosato come iodoformio, diede gr. 0,0494 di CHI^3, corrispondenti a gr. 0,0072 di acetone, per cui più di $^1/_7$ dell'acido citrico si era decomposto dando acetone, nell'altra soluzione di controllo a questo momento non era ancora dimostrabile la presenza di acetone.

Questi fenomeni di ossidazione, operati da minime quantità di ferro, sono molto interessanti, come osserva il De Vries, per i processi d'ossidazione che avvengono nelle piante e negli animali.

Qui il ferro non prende una parte fissa nella reazione; ma opera come trasportatore d'ossigene per una reazione a ciclo od oscillatoria che dir si voglia. Un tempo l'azione del ferro si sarebbe detta in questo caso *catalitica*, ora invece sarebbe forse scusabile l'espressione *fermentativa*. Il ferro non dà una ossidazione bruta, totale della molecola, come credeva De Vries; ma ossida l'acido citrico solo ad acetone.

Cagliari, Laboratorio di Materia Medica della R. Università.
Aprile 1900.

Relazione sulla Memoria presentata dal Dott. Pasquale Sfameni: *Intorno agli organi nervosi terminali del Ruffini, e ai corpuscoli del Pacini studiati nelle piante e nei polpastrelli del cane, del gatto e della scimmia.*

Premessa una sommaria descrizione delle differenti forme di corpuscoli di Ruffini che si trovano nei polpastrelli del cane, del gatto e della scimmia, l'A. passa ad una più particolareggiata descrizione dell'intima struttura di tali corpuscoli, la quale non differisce di molto da quella descritta dal Ruffini stesso per l'uomo. I capillari sanguigni seguono il decorso del troncolino nervoso, formando con numerose anastomosi una rete più o meno ampia, la quale da ogni parte circonda la fibra nervosa. Pare che i capillari sanguigni non penetrino mai nell'interno dell'organo nervoso terminale. Il tessuto di sostegno di essi è formato da scarse fibre elastiche, e da abbondante tessuto di connettivo lasso. La guaina di Henle della fibra nervosa entra a far parte del tessuto di sostegno, perchè essa si espande alla superficie del fuso di sostegno dell'organo stesso, il quale viene così ad essere fornito da un involucro. Nella compagine del tessuto di sostegno si trova annidato un reticolo formato dal cilindrasse della fibra nervosa, la quale ha perduto prima di entrare nell'organo terminale la guaina di Henle e quella midollare. L'A. studia accuratamente la sostanza granulosa che costituisce la parte fondamentale dell'organo di Ruffini; in essa si trovano dei nuclei che sarebbero i veri elementi terminali dell'organo nervoso, destinati a ricevere le impressioni del mondo esterno e a trasmetterli al cilindrasse. I corpuscoli di Ruffini che si trovano fra le zolle adipose del tessuto sottocutaneo sarebbero organi deputati al senso della pressione.

I corpuscoli di Pacini si trovano scarsissimi nei polpastrelli delle dita del cane; in maggior copia in quelli del gatto, e numerosissimi nei polpastrelli e nelle piante della scimmia e dell'uomo. L'A., in un esemplare di corpuscoli di Pacini, ha trovato ch'essi erano innervati da rami della stessa fibra nervosa, che che per altri rami va ad organi nervosi terminali di Ruffini. Presentano nel cane e nel gatto la solita struttura dei corpuscoli di Pacini, e sono più complessi nella scimmia e nell'uomo. Per questo l'A. crede che essi abbiano una funzione più delicata di quella dei corpuscoli di Ruffini, che si trovano in ugual numero, ed ugualmente costituiti in tutti questi animali.

Il lavoro è fatto con serietà di metodo e conduce a risultati importanti, perciò la Commissione propone all' Accademia la stampa della memoria.

G. Bizzozero.
A. Mosso.
P. Foà, *relatore.*

L' Accademico Segretario
Andrea Naccari.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 22 Aprile 1900.

PRESIDENZA DEL PROF. BERNARDINO PEYRON

DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Socii MANNO, BOLLATI DI SAINT PIERRE, BRUSA, PIZZI e RENIER Segretario. — Il Socio CARLE, Presidente dell'Accademia, scusa la propria assenza.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 1° aprile.

Togliendo occasione dalla lettura dell'atto verbale, il Socio BRUSA manifesta il suo rincrescimento per le frequenti assenze dalle sedute accademiche a cui egli è costretto da impegni ufficiali.

Il Socio MANNO partecipa alla Classe il desiderio del padre EHRLE, prefetto della Biblioteca Vaticana, di possedere nella nuova grande sala di consultazione instituita in quella Biblioteca, la serie delle pubblicazioni fatte dall'Accademia di Torino. Si offrono in cambio le pubblicazioni importantissime uscite in luce a cura degli Archivi e della Biblioteca del Vaticano. La Classe vota unanime che si addivenga a questo scambio di pubblicazioni, ed il Segretario lo proporrà nella prossima tornata del Consiglio di Amministrazione. Il Segretario non trascura di avvertire che nel Consiglio medesimo si era già da tempo espresso il desiderio di provocare quell'utile scambio.

È data lettura di una lettera del Ministero dell'Istruzione Pubblica, che accompagna l'estratto del R. Decreto 29 marzo u. s., col quale fu approvata l'elezione del Socio prof. Bernardino Peyron a Direttore della Classe.

Il Segretario presenta le seguenti opere:

1° da parte di S. M. il Re d' Italia i volumi XII, XIII e XIV dell' opera: *Campagne del Principe Eugenio*, Torino, 1898-1900;

2° da parte della R. Accademia delle Scienze di Berlino: A. Harnack, *Geschichte der K. Preussischen Akademie der Wissen schaften zu Berlin*, Berlin, 1900; 4 volumi;

3° da parte del Socio Nazionale non residente Senatore Domenico Comparetti il suo opuscolo: *Iscrizione arcaica del Foro romano*, Roma-Firenze, 1900.

La Classe vota ringraziamenti ai donatori.

Il cav. Alessandro Giorcelli, erede di S. E. il Senatore P. O. Vigliani, ha inviato in dono all'Accademia Torinese le carte e i documenti relativi all' arbitrato a cui fu eletto il Vigliani medesimo dall'Inghilterra e dal Portogallo, per risolvere la vertenza concernente i confini nella regione di Maníca (Africa Orientale). — La Classe riconoscente delibera che sia ringraziato il Dr. Giorcelli e che nel tempo stesso sia manifestata la sua gratitudine al prof. Alessandro Corsi dell'Università di Pisa, alla cui mediazione si deve particolarmente questo dono. È pure ringraziato il Socio Brusa, il quale si adoperò affinchè fossero rimossi alcuni ostacoli che sembravano opporsi alla donazione e tenne viva la pratica privata. — Piace alla Classe l'apprendere dal Segretario che il marchese Corsi invierà fra non molto una sua nota illustrativa delle carte riguardanti l'arbitrato anglo-portoghese.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Aprile 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Il Segretario legge l'atto verbale della precedente adunanza, che viene approvato.

Sono presenti i Soci: Cossa, Vice Presidente dell'Accademia, Bizzozero, Direttore della Classe, D'Ovidio, Spezia, Camerano, Segre, Volterra, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona e Naccari Segretario.

Il Presidente, che nella precedente seduta non potè presiedere la Classe, ringrazia il Socio Cossa per aver egregiamente compiuto l'incarico di rappresentare l'Accademia alle feste del Centenario dell'Accademia di Berlino e aver dato relazione dell'opera sua nella precedente seduta.

Egli comunica che il sig. Alessandro Giorcelli erede del Senatore Vigliani, ha donato all'Accademia gli atti relativi all'arbitrato Anglo-Portoghese, cui prese parte il Vigliani stesso. Questi documenti saranno custoditi dall'Accademia insieme con quelli dell'Alabama lasciati dal conte Sclopis. Furono inviati ringraziamenti al donatore ed anche ai professori Corsi e Brusa che s'adoperarono perchè il dono avvenisse.

Il Socio D'OVIDIO a proposito della morte del Socio straniero Giuseppe Luigi BERTRAND, annunziata nella precedente seduta, commemora l'illustre defunto colle seguenti parole:

La nostra Accademia ha ricevuto l'annunzio della morte di Luigi Francesco Giuseppe BERTRAND, suo socio nazionale (1).

Chi nei *Comptes rendus* dell'Accademia delle Scienze di Parigi legga i molti affettuosi discorsi pronunziati sul feretro del BERTRAND (2), rileva la intensa ed unanime simpatia che egli aveva saputo destare intorno a sè fin dall'adolescenza, con la precoce svegliatezza dell'ingegno, con l'indole aperta e benevola; e si persuade che i dotti francesi deplorano sinceramente la perdita, non soltanto dell'illustre matematico, dell'elegante ed arguto scrittore, ma eziandio del cittadino egregio, dell'uomo di cuore; che non soltanto Hermite, Appell, Picard, legati a lui di parentela, ma tutti indistintamente i membri dell'Istituto di Francia, sentono di aver perduto un collega di cui altamente si onoravano ed un nobile amico.

E veramente il rimpianto per la morte del BERTRAND esorbita dai confini della Francia; esso si estende nelle altre nazioni civili, e segnatamente in Italia, dove il nome del BERTRAND era notissimo e le sue opere erano tenute in gran pregio. Tra noi chiunque, se pur non abbia avuto occasione di studiare le Memorie originali del BERTRAND, ha conosciuto e ricorda con rispetto i suoi trattati di Aritmetica, di Algebra, di Calcolo differenziale e integrale; i quali, per la eleganza del dettato, per la felice scelta degli esercizi, per la serietà del metodo, non appena pubblicati, subito emergevano dalla folla dei libri di testo, ed oggi ancora sfidano gli anni, grazie alle loro solide e insieme brillanti doti.

Oltre i suddetti trattati, il BERTRAND altri più speciali ne pubblicò sulla Termodinamica, sul Calcolo delle probabilità, sull'Elettricità, e corredò di dotte note la Meccanica analitica di Lagrange.

---

(1) Nato a Parigi nel 1822, morto a Parigi il 3 aprile 1900.

(2) 9 aprile 1900. I discorsi sono di Jules Lemaître, Maurice Levy, Berthelot, Gaston Paris, A. Cornu, Duclaux, George Perrot.

Le principali ricerche matematiche del Bertrand si riferiscono all'Analisi, alla Geometria infinitesimale, alla Meccanica razionale ed alla Fisica matematica. Vanno segnalate per la loro importanza quelle sulle proprietà degli integrali dei problemi di Dinamica, sulla similitudine in Meccanica, su varî punti della teoria delle superficie e delle curve sghembe, sulle equazioni differenziali. Esse attestano la straordinaria versatilità e la originalità del suo felice ingegno, ed una vasta e soda cultura.

Le prestanti attitudini di scrittore e la profonda erudizione onde il Bertrand era dotato, rifulgono nel suo volume su Pascal e in parecchi altri lavori critici e biografici su Cauchy, Viète, D'Alembert, Copernico, Tycho-Brahe, Keplero, Eulero, Fresnel, Plücker, ecc., nonchè nel suo *Rapport sur les progrès de l'Analyse mathématique en France*, scritto per mandato avuto dal Governo nel 1867, in occasione della Esposizione universale di Parigi, contemporaneamente ad analogo lavoro affidato allo Chasles per la Geometria. Codesti lavori procacciarono al loro autore ampia fama, anche fuori della cerchia dei matematici, e lo designarono all'ambito ufficio di Segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze, già illustrato da Fontenelle e Arago.

È dunque giusto che alle voci di rimpianto e di lode innalzate in riva alla Senna facciano eco le nostre dalle rive del Po, e dicano ai dotti francesi che il loro lutto è anche nostro.

Il Presidente annunzia la morte del Socio corrispondente Prof. Alfonso Milne Edwards: dopo di che il Socio Camerano pronuncia le seguenti parole commemorative:

Non vi è dubbio alcuno che certe idee, certe tendenze, certi sentimenti si trasmettono da padre in figlio; ma non vi è dubbio pure che sulla vita dell'uomo ha azione precipua l'ambiente nel quale essa si inizia e si prosegue. Alfonso Milne Edwards, di cui la scienza piange la morte recentissima avvenuta in seguito a fiero assalto di *influenza*, fu figlio di Enrico Milne Edwards, il grande naturalista francese, e fino dai primi anni della sua vita intellettuale fece parte della grande famiglia scientifica del vecchio Giardino del Re.

Alfonso Milne Edwards seppe, come nessun altro meglio di lui, trarre profitto e delle naturali tendenze della sua mente

e degli illuminati e continuati insegnamenti paterni e dei dotti insigni che lo circondavano.

La vita di Alfonso Milne Edwards fu quella di un lavoratore attivissimo ed instancabile ; ma di un lavoratore fortunato poichè la sorte gli risparmiò la lotta affannosa per giungere ad affermare la propria individualità e gli concesse di godere della stima e dell'ammirazione che il mondo scientifico meritamente tributava ai suoi lavori.

Nato a Parigi nel 1825, Alfonso Milne Edwards veniva nell'anno 1876 nominato professore ed amministratore al Museo di Storia Naturale di quella città e nel 1877 era eletto membro dell'Accademia delle Scienze di Francia succedendo al Gervais. Nell'anno seguente otteneva la carica di Direttore del laboratorio di zoologia, anatomia e fisiologia nella Scuola pratica degli alti studi e poco più tardi l'Associazione scientifica francese lo voleva suo presidente.

Coprì in seguito, fino alla sua morte, le cariche di Direttore del Museo di Storia Naturale e di Vice-presidente dell' Accademia delle Scienze di Francia.

Il Governo francese gli concesse le maggiori onorificenze: i Corpi scientifici di tutto il mondo andarono a gara ad annoverarlo fra i loro soci: l'Accademia nostra già da vari anni l'aveva inscritto fra i suoi membri corrispondenti.

Alfonso Milne Edwards meritò tutti questi onori per l'opera sua come amministratore e, si può giustamente dire, come rinnovatore delle meravigliose collezioni del grande Museo francese; per l' impulso dato alle esplorazioni scientifiche in lontane e poco note plaghe terrestri ed in special modo per la lunga serie dei suoi importanti lavori anatomici, zoologici e paleontologici.

Non è possibile in un breve cenno biografico render conto dell'opera scientifica che il Milne Edwards ha compiuto in quasi cinquant'anni di non interrotte ricerche intorno agli animali. Io mi limiterò a ricordare qui i lavori più importanti, come ad esempio: quello sui crostacei fossili, quello, oramai classico, sugli uccelli fossili di Francia, quello sugli uccelli e sui mammiferi di Madagascar, quello sulla fauna delle regioni australi e in particolar modo poi le pubblicazioni intorno alle spedizioni del " *Travailleur* „ e del " *Talisman* „ navi armate dal Governo

francese per lo studio della fauna marina. Le ricerche del MILNE EDWARDS portarono un contributo grandissimo alla conoscenza dei meravigliosi fenomeni della vita abissale.

Tutti coloro che ebbero rapporti personali con Alfonso MILNE EDWARDS ne ricordano il carattere piacevole, i modi benevoli e cortesi, l'elevato sentire e la rettitudine dell'animo. Tutti i giornali francesi che in questi giorni annunziarono la morte dell'eminente naturalista rispecchiano questi sentimenti ed unanimi, a buon diritto, affermano che la sua morte sarà vivamente sentita da tutto il mondo scientifico.

Il Segretario presenta la storia dell'Accademia di Berlino, opera in quattro volumi pubblicata nell'occasione del secondo centenario dalla fondazione, inviata in dono dall'Accademia medesima. Presenta inoltre un opuscolo del Socio corrispondente Carlo KLEIN.

Il Segretario comunica la lettera di ringraziamento inviata dal prof. LANGLEY per la sua nomina a Socio corrispondente e un invito dell'Istituto imperiale austriaco di Geologia a prendere parte alle feste del 9 giugno p. v. nella ricorrenza del cinquantesimo anniversario della fondazione di quell'Istituto.

Il Socio VOLTERRA anche a nome del Socio SEGRE legge la relazione sulla memoria del Dott. Ermenegildo DANIELE intitolata: *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed estendibili.* La relazione è favorevole alla lettura della memoria. Essa viene approvata. Si approva pure l'inserzione della memoria nei volumi accademici.

Vengono poi accolti per l'inserzione negli *Atti* gli scritti seguenti:

1° *Esperienze sulla elasticità e resistenza di conglomerati di cementi semplici ed armati,* nota del Socio GUIDI,

2° *La pirite di Valgioje,* nota del Dott. Giovanni BOERIS, presentata dal Socio SPEZIA,

3° *Rotazioni elettrostatiche dei dielettrici liquidi,* nota dell'Ing. Alessandro ARTOM, presentata dal Socio NACCARI.

LETTURE

Prove sui materiali da costruzione.
Nota VI del Socio CAMILLO GUIDI.

Esperienze sull'Elasticità e Resistenza di conglomerati di cemento semplici ed armati.

Nota I.

Le molteplici ed importanti applicazioni che trovano i conglomerati di cemento, e specialmente i cosiddetti *cementi armati*, nelle costruzioni di diverso genere, tengono vivo nelle persone che si occupano della scienza del costruire, non meno che in quelle dedite alla parte pratica, il desiderio che si accresca sempre più il corredo di risultati sperimentali sull'elasticità e resistenza di questi materiali. E tanto più si sente tale desiderio nel nostro Paese, dove mancano notizie di questo genere per i materiali da noi impiegati, mentre all'Estero si son già ottenuti preziosi risultati a questo riguardo. Tale fu il motivo che mi indusse ad intraprendere nel mio laboratorio esperienze in proposito.

Riservandomi, in un prossimo scritto, di riferire sopra una serie più numerosa e svariata di prove, richieste dal Municipio di Torino, ora in corso di esecuzione, mi limito per adesso a riportare in questa breve Nota i risultati di alcune prove istituite sopra saggi gentilmente favoritimi dal sig. ing. G. A. Porcheddu, agente generale per l'esercizio dei brevetti *Hennebique* per l'Italia Settentrionale.

Le prove si distinguono, come segue:

1° Prove di aderenza del conglomerato al ferro;

2° Prove di elasticità e resistenza di conglomerati semplici ed armati alla pressione;

3° Prove di elasticità e resistenza di conglomerati semplici alla tensione;

4° Prove di elasticità e resistenza di conglomerati semplici ed armati alla flessione.

Le proporzioni dei materiali componenti il conglomerato sono costantemente quelle adottate nelle costruzioni *Hennebique*, e cioè Kg. 300 di cemento per m^3 0,400 di sabbia e m^3 0,850 di ghiaia, ossia, in volume; cemento: sabbia: ghiaia = 1 : 1,7 : 3,7.

Il cemento è quello a lenta presa, o Portland, di 2ª qualità della *Società Anonima Calce e Cementi di Casale.* Le resistenze unitarie di tale cemento a tensione ed a pressione, sebbene vadano soggette naturalmente a variazioni, possono tuttavia, secondo numerose esperienze da noi eseguite, essere valutate in cifra tonda come segue:

	Cemento puro Kg/cm²	Cemento e sabbia 1:3 in peso Kg/cm²
Resistenza traz., dopo 28 giorni, di provette a 8 fabbricate a mano	40	20
Id. Id. „ a macchina	—	30
Resist. schiacc., dopo 28 giorni, di cubi di 7^{cm} lato fabbricati a mano	400	150
Id. Id. „ a macchina	—	200

La sabbia è del fiume Po, la ghiaia del torrente Dora.

Il peso del m^3 di tale conglomerato all'epoca delle esperienze era di t. 2,3. Queste ebbero luogo per tutti i saggi circa 4 mesi dopo la loro fabbricazione.

Riguardo alle dimensioni dei saggi stabilii, come massima generale, che esse fossero considerevoli, affinchè i risultati sperimentali potessero con più diritto applicarsi alle costruzioni della pratica; volli inoltre che la loro fabbricazione fosse eseguita senza alcuna cura speciale, ma uniformandosi completamente alle norme pratiche seguite in tali costruzioni.

I saggi erano più numerosi di quanto risulti da questa relazione, ma sfortunatamente da alcuni di essi, per ragioni diverse, non poteronsi ottenere risultati attendibili.

Mi è caro esprimere qui la mia gratitudine oltre che al predetto ing. G. A. Porcheddu, anche al mio assistente ingegnere dott. M. Panetti per la intelligente sua assistenza sia durante la preparazione dei saggi, sia durante le esperienze da me eseguite.

Prove di aderenza.

Queste prove vennero istituite sopra prismi retti di conglomerato, a base quadrata, portanti lungo il loro asse geometrico il ferro, di cui si cercava l'aderenza. Un'estremità del detto ferro sporgeva da una delle basi del prisma, e contro essa si esercitava uno sforzo di compressione, esattamente diretto secondo l'asse geometrico del ferro; l'altra base del prisma appoggiava in modo da lasciar libera l'uscita del ferro. Lo sforzo producente lo scorrimento, diviso per la superficie di contatto fra il ferro ed il conglomerato, misurava l'*aderenza* cercata.

La tabella I contiene i risultati ottenuti; da essa si rileva quanto tale aderenza sia variabile; nelle esperienze di cui qui si tratta, essa ha oscillato da un minimo di 9 $^{Kg}/_{cm^2}$ ad un massimo di 33 $^{Kg}/_{cm^2}$; nè apparisce chiaramente quale influenza abbia in tale variazione la forma del ferro. Dal che si può dedurre che nelle costruzioni pratiche, a causa delle possibili imperfezioni del conglomerato, sia per ciò che riguarda l'impasto, come per la sua pigiatura attorno al ferro, è già molto contare su di un'aderenza di circa 10 $^{Kg}/_{cm^2}$. Tale aderenza cresce naturalmente colla maggior ricchezza in cemento del conglomerato; gli stessi ferri immersi entro prismi di cemento puro hanno sviluppato un'aderenza di 41, 50, 54 e perfino 56 $^{Kg}/_{cm^2}$.

Prove alla pressione.

I saggi cimentati a questa prova erano parallelepipedi retti aventi un'altezza di cm. 20 ed una base di cm. 14 $\times$ 14 alcuni, ed altri di cm. 10 $\times$ 10: taluni erano semplici, altri armati di quattro tondini di ferro di 15^{mm} di diametro disposti agli angoli. ad una distanza di cm. 1,5 dalle faccie laterali, e collegati nel piano trasversale equidistante dalle basi, da quattro piastrine di ferro piatto (*moietta*) di sezione mm. 20 $\times$ 2.

Per alcuni saggi armati l'armatura non arrivava perfettamente fino alle basi del prisma, ma ne rimaneva discosta di cm. 1,5, di guisa che la compressione esercitata contro le basi del saggio veniva trasmessa dal conglomerato ai tondini di ferro.

Per altri saggi invece i tondini avevano esattamente la stessa lunghezza del prisma, per modo che la pressione veniva esercitata direttamente e sul conglomerato e sui tondini dell'armatura.

Per alcuni saggi la *presa* ebbe luogo all'asciutto, per altri all'umido.

La Tabella II contiene i risultati delle esperienze sull'elasticità, istituite per mezzo dello *Spiegelapparat di Bauschinger*, e sulla resistenza alla pressione di sei dei prismi di sezione minore. La Tabella III contiene i risultati della prova a pressione di due dei prismi armati di sezione maggiore.

Le deformazioni elastiche, come del resto apparisce chiaramente dalla Tabella II, vennero valutate a partire da un certo sforzo iniziale indispensabile per tenere saldamente in posto il saggio e l'annesso apparecchio. Esse vennero registrate dopo aver sottoposto il saggio a tre o tutt'al più quattro ripetute sollecitazioni a sforzo moderato. Per pressioni moderate, quali non conviene sorpassare nelle costruzioni pratiche, risulta dalla Tabella II che i conglomerati semplici od armati possono riguardarsi come elastici.

Per i prismi armati chiamiamo *sezione apparente*, e la indichiamo con F_a, la sezione trasversale del prisma dedotta dalle sue dimensioni esterne, come se esso fosse costituito di un materiale omogeneo; chiamiamo invece *sezione ridotta in cemento*, e la indichiamo con F_c una sezione esclusivamente in conglomerato, equipollente, per la resistenza, a quella reale mista. Ritenendo che il rapporto fra il modulo di elasticità del ferro e quello del conglomerato sia in media eguale a 10, si deduce, come è noto, la F_c dalla F_a aumentando quest'ultima di dieci volte l'area della sezione complessiva dei ferri dell'armatura (*). In relazione a tali indicazioni adottiamo anche le altre: E_a, E_c, K_a'', K_c'' corrispondenti al modulo di elasticità normale, ed alla resistenza

(*) Veramente nella ipotesi suddetta basterebbe aumentare la sezione apparente di nove volte la sezione complessiva dei ferri; ma, sia perchè la percentuale del ferro rispetto al conglomerato nell'armatura *Hennebique* è sempre piccola, sia anche per l'incertezza del valore del rapporto suddetto, non è da annettere grande importanza alla differenza che ne risulta, ed è nell'uso pratico di ritenere come valor medio di tale coefficiente di ampliamento il numero 10.

massima unitaria alla pressione del prisma apparente, ovvero di quello ridotto in cemento.

Finalmente indichiamo con σ_f'' la pressione unitaria massima sopportata dal ferro dell'armatura; essa, come è noto, viene data dalla $\sigma_f'' = \frac{E_f}{E_c} K_c''$, se E_f è il modulo di elasticità normale del ferro.

Nella Tabella II abbiamo calcolato il σ_f'' per i diversi prismi armati, ritenendo $E_f : E_c = 10$; si noti però che, in realtà, nulla può dirsi di sicuro sul valore di tale rapporto *nell' istante che precede la rottura*, quindi i valori di σ_f'' vanno considerati soltanto come grossolanamente approssimati.

Dall'esame della Tabella II si deduce, come del resto era da attendersi, che il modulo di elasticità e la resistenza allo schiacciamento crescono se la *presa* completa del conglomerato avviene all'umido, piuttosto che all'asciutto. Dalla stessa tabella si desume che il modulo di elasticità E_c del conglomerato non è sostanzialmente diverso nei prismi semplici od in quelli armati, esso si aggira intorno al valore di 200 $^t/_{cm^2}$ che, come è noto, viene ammesso dalla pratica. Invece la resistenza unitaria K_c'' del conglomerato allo schiacciamento aumenta notevolmente nei prismi armati, il che è una conferma sperimentale dell'influenza benefica esercitata dall'armatura. In questa felice combinazione, i due materiali componenti si aiutano a vicenda: il conglomerato avviluppante i ferri impedisce ai medesimi d' inflettersi come solidi caricati di punta; l' armatura agendo, in virtù dei collegamenti trasversali, come una fasciatura, contrasta validamente le dilatazioni trasversali del prisma compresso.

I valori che più attendibilmente rappresentano la vera resistenza del conglomerato armato alla compressione, debitamente costruito, e stagionato all'umido, sono quelli forniti dal saggio VI della Tabella II e dal saggio II della Tabella III, cioè in media circa 250 $^{Kg}/_{cm^2}$; è quindi giustificato anche da queste esperienze l'adottare come *carico di sicurezza* k'', cioè come pressione unitaria massima ammissibile nella sollecitazione a *pressione semplice*, circa 30 $^{Kg}/_{cm^2}$ facendo $k'' : K''$ un po' maggiore di $\frac{1}{10}$ (valore adottato per le murature ordinarie) in vista della presenza del ferro. Si noti peraltro che la più piccola imperfezione d'esecuzione e condizioni accidentali sfavorevoli alla *presa* completa del conglomerato possono abbassare notevolmente il K''.

Prove alla tensione.

Queste prove vennero eseguite su saggi aventi, per un certo tratto centrale, forma prismatica di sezione quadrata di cm. 10 di lato; le loro estremità, foggiate a coda di rondine, venivano prese con opportune morse metalliche. Le resistenze unitarie offerte da sei di tali saggi furono rispettivamente di $^{Kg}/_{cm^2}$ 8; 10; 12; 12; 14; 17,6; dell'ultimo saggio determinai anche le deformazioni elastiche, e calcolai quindi il modulo di elasticità. I risultati sono riportati nella Tabella IV, dalla quale si desume che per sforzi moderati il conglomerato, sollecitato a tensione, si comporta come elastico, ed il modulo di elasticità è dello stesso ordine di grandezza di quello relativo alla sollecitazione a pressione.

Prove alla flessione.

I saggi sottoposti a questa prova avevano forma di travi prismatiche di sezione rettangolare di cm. 10×20, lunghe cm. 105, alcune senza, altre con armatura; per tutte indistintamente *la presa ebbe luogo all'asciutto.* Tutte vennero cimentate a flessione, disponendole di costa, cioè per modo che il piano di sollecitazione intersecasse le diverse sezioni trasversali della trave secondo la mediana maggiore. Riportiamo qui appresso i risultati ottenuti su alcune di esse.

I. — *Trave di beton senza armatura:*

La trave è appoggiata contro gli spigoli di due prismi, posti alla distanza $L =$ cm. 100, e vien sollecitata, in corrispondenza della sezione di mezzo, da una forza concentrata P gradatamente crescente.

Fino al valore $P = 0^t,60$, per ogni incremento di *t.* 0,20 si ha un incremento di freccia d'incurvamento della trave di mm. 0,04, dal che si deduce che la trave si comporta come elastica.

Ponendo, al solito:

$I =$ momento d' inerzia della sezione trasversale della trave, rispetto all'asse neutro,

$\rho =$ raggio d'inerzia della sezione trasversale della trave, rispetto all'asse neutro,

$f =$ freccia d'incurvamento misurata,

$\chi =$ coefficiente numerico dipendente dalla forma della sezione trasversale della trave,

si calcola il modulo di elasticità E colla

$$E = \frac{PL^3}{48If}\left[1 + 30\chi\left(\frac{\rho}{L}\right)^2\right],$$

ovvero, ricordando che per la sezione rettangolare $\chi = \frac{6}{5}$, $\rho^2 = \frac{1}{12}h^2$, se h è l'altezza della sezione,

$$E = \frac{PL^3}{48If}\left[1 + 3\left(\frac{h}{L}\right)^2\right], \qquad (1)$$

ossia, nel nostro caso:

$$E = \frac{0{,}20 \times 100^3}{48 \cdot \frac{1}{12} 10 \cdot 20^3 \cdot 0{,}004}\left[1 + 3\left(\frac{20}{100}\right)^2\right] = 156[1 + 0{,}12] = 175\ {}^{t}/_{cm^2}.$$

Per $P = 0^t{,}75$ avviene la rottura nella parte tesa della sezione di mezzo; se pertanto si esige che nelle costruzioni della pratica le sollecitazioni massime ammissibili non oltrepassino $^1/_{10}$ di quelle che producono la rottura, il momento massimo cui potrebbe cimentarsi con tutta sicurezza una simile trave sarebbe $M = {}^1/_{10} \cdot \frac{1}{4}\, 750 \times 100 =$ Kgcm. 1875, e però il carico di sicurezza k' alla tensione da adottarsi per il beton, indicando con W il modulo di resistenza della sezione trasversale della trave, risulterebbe, secondo tale esperienza:

$$k' = \frac{M}{W} = \frac{1875}{\frac{1}{6}\, 10 \cdot 20^2} = 2{,}8\ {}^{kg}/_{cm^2}.$$

II. — *Trave di beton armata da un solo tondino di mm. 11 di diametro, situato nel piano di sollecitazione e distante, col suo asse, cm. 2 dalla faccia tesa.*

Sezione trasversale ridotta in cemento:

$$F_c = 10 \times 20 + 10 \times 0,95 = \text{cm}^2\ 210.$$

Momento statico della sezione suddetta rispetto al lembo teso:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} 10 \times 20^2 + 10 \times 0,95 \times 2 = \text{cm}^3\ 2019.$$

Distanza del lembo suddetto dal baricentro:

$$y' = \frac{\mathcal{M}}{F} = \frac{2019}{210} = \text{cm.}\ 9,6.$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse neutro:

$$I = \frac{1}{3} 10 \times 20^3 + 10 \times 0,95 \times 2^2 - 210 \times 9,6^2 = \text{cm}^4.\ 7351.$$

a) La trave viene cimentata da due carichi eguali $= \frac{1}{2} P$ (componenti dello sforzo P esercitato dalla macchina) distanti cm. 100, applicati contro la facciata armata, ed appoggia contro gli spigoli di due prismi, distanti fra loro cm. $80 = L$, e distanti perciò ciascuno cm. $10 = a$ dalla sezione di carico più vicina. Nel tratto centrale L, fra gli appoggi, la curva elastica è notoriamente circolare, e la freccia d'incurvamento viene espressa dalla

$$f = \frac{PaL^2}{16EI}. \tag{2}$$

Misurando le freccie a partire da uno sforzo (P) iniziale di $0^t,50$ e procedendo di mezza in mezza tonnellata si sono ottenuti i seguenti risultati:

$P = t.$	0,50;	1,00;	1,50;	2,00;	2,50;	3,00;	3,50;	4,00
$f = {}^{mm}/_{100}$	0	2,5	5,0	11,0	18,5	29,5	42,5	60,5
Differenze	2,5	2,5	6,0	7,5	9,0	13,0	18,0.	

Il modulo di elasticità, per sforzi moderati, ha, secondo la (2), il valore:

$$E_c = \frac{0,50 \times 10 \times 80^2}{16 \times 7351 \times 0,0025} = 109\ ^t/_{cm^2},$$

che supera appena $^1/_{20}$ E_f. Ripreso pertanto il calcolo supponendo $E_f : E_c = 20$, si ottiene $E_c = 105\ ^t/_{cm^2}$, valore che differisce dal precedente di una quantità praticamente trascurabile.

b) Le condizioni di posa e di sollecitazione sono le stesse della trave I.

Le freccie d'incurvamento raggiunsero i valori seguenti:

$P = t.$	0,50 ;	1,00 ;	1,50
$f = ^{mm}/_{100}$	0 ;	13 ;	33
Differenze	13	20.	

Il modulo di elasticità, per sforzi moderati, calcolato secondo la (1) $\left(\text{ammettendo in via di approssimazione che anche per la sezione armata sia } \chi = \frac{6}{5}\right)$ ha il valore:

$$E = \frac{0,50 \times 100^3}{48 . 7351 . 0,013}\left[1 + 3\left(\frac{20}{100}\right)^2\right] = 109\ (1 + 0,12) = 122\ ^t/_{cm^2}.$$

Allo sforzo di *t.* 1,75 avviene la rottura.

Le costruzioni in beton armato, anche dopo avvenuta la rottura, resistono ancora generalmente ad una notevole sollecitazione. Questo è certamente un pregio rilevante di tal genere di costruzioni rispetto alle costruzioni in muratura ordinaria, ma non autorizza ad eccedere oltre misura nello stabilire il carico massimo ammissibile, cioè il carico di sicurezza, tanto più che tali costruzioni richieggono, nell'esecuzione, una cura tutt'affatto speciale, non paragonabile a quella richiesta da una muratura ordinaria, e non sempre rispettata nella pratica corrente. Riteniamo quindi che il carico di sicurezza possa tutt'al più essere preso $^1/_8$ del carico di rottura. Per una trave simile a quella di cui qui si tratta dovrebbesi pertanto riguardare come momento flettente massimo ammissibile

$$M = {}^1/_8 . \frac{1}{4}\ 1750 . 100 = 5469 \text{ Kgcm.}$$

e quindi il carico di sicurezza da adottare per il beton alla tensione ed alla pressione risulterebbero rispettivamente:

$$k' = \frac{5469 \cdot 9{,}6}{7351} = \sim 7 \ {}^{kg}/_{cm^2}$$

$$k'' = \frac{5469 \cdot 10{,}4}{7351} = \sim 8 \quad "$$

III. — *Trave di beton, armata di due tondini di mm. 11 di diametro situati agli angoli tesi, distanti ciascuno, col suo asse geometrico, cm. 2 sì dalla faccia tesa che dalla faccia laterale più vicina.*

$$F_c = 10 \cdot 20 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}95 = \text{cm}^2\ 219$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}\ 10 \cdot 20^2 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}95 \cdot 2 = \text{cm}^3\ 2038$$

$$y' = \frac{2038}{219} = \text{cm. } 9{,}3$$

$$I = \frac{1}{3}\ 10 \cdot 20^3 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}95 \cdot 2^2 - 219 \cdot 9{,}3^2 = \text{cm}^4\ 7800.$$

La trave è appoggiata contro gli spigoli di due prismi, posti alla distanza $L =$ cm. 100, e viene sollecitata, in corrispondenza della sezione di mezzo da una forza concentrata P, gradatamente crescente.

Misurando le freccie a partire da uno sforzo (P) iniziale di $0^t{,}50$ e procedendo di mezza in mezza tonnellata si sono ottenuti i seguenti risultati:

$P = t.$	0,50;	1,00;	1,50;	2,00;	2,50;	3,00
$f = {}^{mm}/_{100}$	0	8	16	34	55	76
Differenze		8	8	18	21	21.

Il modulo di elasticità, per sforzi moderati, calcolato secondo la (1) ha quindi il valore:

$$E = \frac{0{,}50 \cdot 100^3}{48 \cdot 7800 \cdot 0{,}008}\ (1 + 0{,}12) = 187\ {}^t/_{cm^2}.$$

Allo sforzo di *t.* 3,46 avviene la rottura. Per una trave simile a quella di cui qui si tratta, dovrebbesi pertanto riguardare come momento flettente massimo ammissibile.

$$M = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3460 \cdot 100 = 10812 \,^{\text{Kgcm}},$$

e quindi

$$k' = \frac{10812 \times 9{,}3}{7800} = \sim 13 \,^{\text{Kg}}/_{\text{cm}^2}, \quad k'' = \frac{10812 \cdot 10{,}7}{7800} = \sim 15 \,^{\text{Kg}}/_{\text{cm}^2}.$$

IV. — *Trave di beton armata simmetricamente di due tondini di mm. 11 di diametro, situati nel piano di sollecitazione, uno nella parte tesa, l'altro nella parte compressa, distanti ciascuno, col suo asse geometrico, cm. 2 dalla faccia più vicina della trave.*

Cimentata a flessione nelle stesse condizioni di posa e di carico del saggio precedente, la trave si è rotta sotto un carico $P = t.$ 1,95 e quindi, poichè per una simile trave:

$$I = \frac{1}{12} 10 \cdot 20^3 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}95 \cdot 8^2 = \text{cm}^4\, 7883,$$

risulta:

$$k' = k'' = \frac{1}{8} \, \frac{\frac{1}{4} 1950 \cdot 100 \cdot 10}{7888} = \sim 8 \,^{\text{Kg}}/_{\text{cm}^2}.$$

V. — *Trave di beton armata simmetricamente con quattro tondini di mm. 11 di diametro, situati presso i quattro spigoli longitudinali della trave. Distanza dell'asse geometrico di ciascuno di essi dalle due faccie vicine = cm. 2.*

$$I = \frac{1}{12} 10 \cdot 20^3 + 4 \cdot 10 \cdot 0{,}95 \cdot 8^2 = \text{cm}^4\, 9099.$$

La trave, cimentata come le due precedenti, si è rotta sotto il carico $P = 2^t{,}84$, talchè risulta:

$$k' = k'' = \frac{1}{8} \, \frac{\frac{1}{4} 2840 \cdot 100 \cdot 10}{9099} = \sim 10 \,^{\text{Kg}}/_{\text{cm}^2}.$$

Come vedesi la resistenza massima offerta da questa trave ad armatura simmetrica è inferiore di circa il 18 % di quella

offerta dalla corrispondente trave ad armatura semplice. Questa anomalia trova in parte una spiegazione nel fatto che in una trave di dimensioni così limitate l'aggiunta di altri ferri nella parte compressa è causa di discontinuità nel beton e di meno accurato costipamento del medesimo durante la fabbricazione; inconvenienti che possono riuscire di un'importanza maggiore del limitato vantaggio offerto dalla resistenza del ferro alla compressione.

VI. — *Trave con armatura del tipo Hennebique* (due tondini di mm. 11 di diametro, situati nel piano di sollecitazione, uno diritto e distante, col suo asse geometrico, cm. 2 dalla faccia tesa, l'altro parallelo al primo, distante cm. 2 da esso nel tratto centrale della trave e rialzato verso le estremità della medesima; i due tondini sono collegati alla zona compressa della trave mediante le caratteristiche staffe *Hennebique*).

Cimentata a flessione nelle stesse condizioni di posa e di carico della trave precedente (*), allo sforzo $P = 3^t,20$ si sono prodotte varie lesioni nella zona tesa; tuttavia la trave così lesionata sostiene ancora un carico $P = 2^t,70$. La sollecitazione massima a cui ha resistito questa trave è dunque inferiore del 7,5 % a quella sopportata dalla trave III. Ciò può essere spiegato sia dal fatto che il secondo tondino di ferro di questa trave, essendo più distante del primo dalla faccia tesa, risulta meno efficace, come pure per la discontinuità e forse per un imperfetto costipamento del conglomerato, inconvenienti causati dall'armatura più complessa, e maggiormente avvertibili in una trave di dimensioni così limitate.

VII. — Questa trave è la ripetizione della precedente, coll'aggiunta però di un tondino diritto situato nel piano di sollecitazione, distante, col suo asse geometrico, cm. 2 dalla faccia

(*) Veramente la piegatura del secondo tondino, che nella pratica corrente trova la sua ragione nella condizione di posa, che è quella di un semincastro, qui non sarebbe giustificata, comportandosi la trave come semplicemente appoggiata; tuttavia essa non è dannosa, tenuto conto della legge di variazione del momento flettente nella trave sperimentata.

compressa e collegato alla zona tesa mediante altre staffe intercalate colle prime.

La trave, cimentata nelle stesse condizioni di posa e di carico della trave precedente, si è rotta, con lesione della parte tesa in prossimità della sezione centrale, sotto lo sforzo $P=2^t,10$; cioè ha offerto una resistenza massima inferiore del 39 % a quella della trave III, il che va spiegato colle stesse ragioni addotte per la trave precedente, le quali in questo caso hanno maggior valore.

Anche da questi pochi risultati sperimentali, che vedremo però confermati, in massima, da altri più numerosi, che formeranno oggetto di altra comunicazione, risulta, come era da aspettarsi, il vantaggio arrecato dall'armatura metallica nella zona della trave che in seguito alla sollecitazione a flessione risulta tesa; la resistenza può esserne quadruplicata (Trave III). Non emerge invece il vantaggio che teoricamente dovrebbe portare l'aggiunta di un'armatura anche nella zona della trave che risulta compressa, come pure l'aggiunta delle staffe di collegamento, del che si è dato precedentemente una qualche spiegazione. Vuol essere notato come in tutte queste esperienze a flessione non verificaronsi lesioni nella zona tesa della trave se non per sforzi di poco inferiori a quelli producenti la definitiva rottura della trave. Quando, come nelle nostre prove, è applicata alla trave un flessimetro molto sensibile, la produzione delle più piccole lesioni nella zona tesa della trave è avvertita da un notevole incremento nella freccia, dipendente dal fatto che il regime di equilibrio molecolare resta bruscamente alterato, lo sforzo nel ferro che deve lavorare a tensione, cresce istantaneamente di una quantità rilevante, e produce perciò un notevole allungamento del medesimo, che si risolve in un aumento della freccia. A questo punto della prova, quando la tensione unitaria nel ferro è molto elevata (generalmente supera $2\ ^t/_{cm^2}$) si produce nel medesimo un tale allungamento da derivarne nella trave un progressivo allargamento delle lesioni, e quindi una progressiva diminuzione della parte di beton, che, nelle sezioni lesionate, dovrebbe ancora resistere a pressione; e perciò la graduale rottura della trave. È però pregio rilevante di questi sistemi armati, come è stato già precedentemente notato, che la

rottura non ha il carattere di uno sfasciamento con separazione di parti, essa è invece graduale, e la trave rotta può ancora sopportare permanentemente un notevole carico,

Sulla resistenza di queste travi ha certamente influito in senso negativo l'essere avvenuta all'asciutto la *presa* del conglomerato, tuttavia tale nociva influenza è minore di quanto potrebbe sembrare a prima vista, come si vedrà in una prossima pubblicazione. Supposto che il *carico di sicurezza* o *carico ammissibile* si prenda, come è stato già detto precedentemente, eguale ad $^1/_8$ del carico di rottura, il carico di sicurezza per il conglomerato in travi armate dovrebbe, secondo tali esperienze, oscillare fra 8 e 15 $^{Kg}/_{cm^2}$. Naturalmente nelle costruzioni della pratica debitamente eseguite, quando la stagionatura completa avvenga all'umido, e più ancora per la solidarietà delle diverse parti, la quale ne favorisce evidentemente la resistenza, tali limiti possono essere alquanto innalzati.

Torino, 29 aprile 1900.

TABELLA I.

Prove di aderenza del conglomerato Hennebique al ferro.

N° d'ordine	DIMENSIONI del prisma di conglomerato cm.		FORMA DEL FERRO immerso nel conglomerato	RESISTENZA totale allo scorrimento	ADERENZA del conglomerato al ferro	OSSERVAZIONI
	base	altezza		Kg.	Kg/cm²	
1	14 × 14	8,0	Tondo: diam. = cm. 1,8	800	18	
2	» »	9,0	» » » 2,4	1300	19	
3	» »	9,5	» » » 3,45	960	9	
4	» »	9,5	» » » 4,0	1640	14	
5	» »	9,5	» » » 4,45	2020	15	
6	» »	9,0	Quadro: lato = cm. 1,9	1380	20	
7	» »	9,2	» » » 3,0	3220	30	
8	» »	9,0	» » » 4,0	2200	15	
9	» »	10,0	Piatto: cm. 1,6 × 3,15	3120	33	*Situato in un piano mediano del prisma*
10	» »	9,0	» » 1,0 × 4,0	1120	12	*Situato in un piano diagonale del prisma*
11	» »	9,2	» » 1,0 × 4,9	1000	9	» » » »
12	» »	8,5	» » 1,2 × 7,0	2000	14	» » » »
13	» »	10,0	» » 1,5 × 5,9	2140	14	» » » »
14	» »	9,0	» » 1,6 × 5,4	1340	11	» » » »
15	» »	9,5	» » 2,0 × 5,0	2880	22	» » » »
16	» »	9,2	» » 2,4 × 4,0	2700	25	» » » »

TABELLA II.

Prove sull'elasticità e resistenza alla pressione di prismi di conglomerato Hennebique semplici ed armati.

Nº d'ordine	INDICAZIONE dei saggi	CARICO totale t.	ACCORCIAMENTI misurati sulle mediane longitudinali di due faccie laterali opposte: sinistra $\frac{1}{5000}$ mm.	destra $\frac{1}{5000}$ mm.	ACCORCIAMENTO medio $\frac{1}{10000}$ mm.	Differenze	OSSERVAZIONI
I.	Prisma di conglomerato semplice delle dimensioni cm. 10×10×20. La presa ebbe luogo all'asciutto.	0,50	0	0	0		*Lunghezza su cui vennero misurate le deformazioni* $= l =$ *cm. 15,20.* *Sezione trasversale del saggio* $= F =$ *cm*^{2} *100.* *Modulo di elasticità E* $E = \frac{1,50}{100} \frac{1520000}{105} = 218\ ^t/_{cm^2}$. *Resistenza massima K''* $K'' = \frac{11800}{100} = 118\ ^{Kg}/_{cm^2}$.
		1,00	19	12	31	31	
		1,50	40	28	68	37	
		2,00	63	42	105	37	
		2,50	90	60	150	45	
		3,00	120	80	200	50	
		11,80	Schiacciamento istantaneo				
II.	Id. Id. La presa ebbe luogo all'umido.	0,50	0	0	0		$l =$ *cm. 15,20.* $F =$ *cm*^{2} *100.* $E = \frac{1,50}{100} \frac{1520000}{94} = 243\ ^t/_{cm^2}$. $K'' = \frac{13600}{100} = 136\ ^{Kg}/_{cm^2}$.
		1,00	18	13	31	31	
		1,50	33	28	61	30	
		2,00	52	42	94	33	
		0,50	1	2	3	45	
		2,50	78	61	139		
		3,00	103	83	186	47	
		3,50	131	102	233	47	
		4,00	160	126	286	53	
		13,60	Schiacciamento istantaneo				

Segue TABELLA II.

N° d'ordine	INDICAZIONE dei saggi	CARICO totale t.	ACCORCIAMENTI misurati sulle mediane longitudinali di due faccie laterali opposte: sinistra $\frac{1}{5000}$ mm.	destra $\frac{1}{5000}$ mm.	ACCORCIAMENTO medio $\frac{1}{10000}$ mm.	Differenze	OSSERVAZIONI
III.	Prisma di conglomerato a base quadrata, armato con quattro tondini. Dimensioni del prisma cm. 10 × 10 × 20. Diametro tondini mm. 15. L'armatura rimane discosta cm. 1,5 dalle basi del prisma. La presa ebbe luogo all'asciutto.	1	0	0	0		*l = cm. 15,20.* *Sezione apparente del prisma = F_a = cm² 100.* *Sezione ridotta in cemento = $F_c = 100 + 4 \times 10 \times 1{,}77$ = cm² 171.*
		2	28	15	43	43	
		3	55	33	88	45	$E_a = \frac{3}{100} \frac{1520000}{134} = \mathbf{340}$ t/cm².
		4	79	55	134	46	$E_c = E_a \frac{100}{171} = \mathbf{199}$ t/cm².
		1	1	2	3	64	$K_a'' = \frac{28000}{100} = \mathbf{280}$ Kg/cm².
		5	110	88	198		
		6	141	127	268	70	$K_c'' = \frac{28000}{171} = \mathbf{164}$ Kg/cm².
		28	Schiacciamento istantaneo				$\sigma_f'' = 10.\ K''_c = \mathbf{1640}$ Kg/cm².
IV.	Id. Id. La presa ebbe luogo all'umido.	1	0	0	0		*l = cm. 15,20.* *F_a = cm² 100, F_c = cm² 171.*
		2	20	17	37	37	$E_a = \frac{3}{100} \frac{1520000}{113} = \mathbf{404}$ t/cm².
		3	40	34	74	37	
		4	58	55	113	39	$E_c = E_a \frac{100}{171} = \mathbf{236}$ t/cm².
		1	0	0	0	48	$K_a'' = \frac{31200}{100} = \mathbf{312}$ Kg/cm².
		5	79	82	161	50	$K_c'' = \frac{31200}{171} = \mathbf{182}$ Kg/cm².
		6	100	111	211		

Segue TABELLA II.

N° d'ordine	INDICAZIONE dei saggi	CARICO totale t.	ACCORCIAMENTI misurati sulle mediane longitudinali di due faccie laterali opposte — sinistra $\frac{1}{5000}$ mm.	destra $\frac{1}{5000}$ mm.	ACCORCIAMENTO medio $\frac{1}{10000}$ mm.	Differenza	OSSERVAZIONI
V.	Prisma di conglomerato a base quadrata armato con quattro tondini. Dimensioni del prisma cm. 10 × 10 × 20. Diametro tondini mm. 15. L'armatura ha esattamente la stessa lunghezza del prisma. La presa ebbe luogo all'asciutto.	1	0	0	0		$l = cm.\ 15{,}40.$ $F_a = cm^2\ 100,\ F_c = cm^2\ 171.$
		2	23	23	46	46	$E_a = \frac{3}{100}\ \frac{1540000}{146} = \mathbf{316}\ {}^t/_{cm^2}.$
		3	54	42	96	50	
		4	83	63	146	50	$E_c = E_a \frac{100}{171} = \mathbf{185}\ {}^t/_{cm^2}.$
		1	0	0	0	94	$K_a'' = \frac{35200}{100} = \mathbf{352}\ {}^{Kg}/_{cm^2}.$
		5	130	100	230		$K_c'' = \frac{35200}{171} = \mathbf{206}\ {}^{Kg}/_{cm^2}.$
		6	180	147	327	97	$\sigma_f'' = 10\ K_c'' = \mathbf{2060}\ {}^{Kg}/_{cm^2}.$
		35,20	Schiacciamento istantaneo				Il prisma schiacciato sopporta ancora permanentemente un carico totale di **30**^{t}.
VI.	Id. Id. La presa ebbe luogo all'umido.	1	0	0	0		$l = cm.\ 15{,}50.$ $F_a = cm^2\ 100,\ F_c = cm^2\ 171.$
		2	20	22	42	42	$E_a = \frac{3}{100}\ \frac{1550000}{132} = \mathbf{352}\ {}^t/_{cm^2}.$
		3	40	48	88	46	
		4	61	71	132	44	$E_c = E_a \frac{100}{171} = \mathbf{206}\ {}^t/_{cm^2}.$
		1	0	2	2	68	$K_a'' = \frac{39300}{100} = \mathbf{393}\ {}^{Kg}/_{cm^2}.$
		5	87	103	190		$K_c'' = \frac{39300}{171} = \mathbf{230}\ {}^{Kg}/_{cm^2}.$
		6	118	141	259	69	$\sigma_f'' = 10\ K_c'' = \mathbf{2300}\ {}^{Kg}/_{cm^2}.$
		39,30	Schiacciamento istantaneo				Il prisma schiacciato sopporta ancora permanentemente un carico totale di **33**^{t}.

TABELLA III.

Prove alla pressione di prismi di conglomerato Hennebique armati con quattro tondini di mm. 15 di diametro

(l'armatura ha esattamente la stessa lunghezza dei prismi).

N° d'ordine	DIMENSIONI del prisma	SEZIONE apparente $= F_a$	SEZIONE ridotta in cemento $= F_c$	CARICO totale di schiacciamento $= N$	$\frac{N}{F_a} = K_a''$	$\frac{N}{F_c} = K_c''$	$\sigma_f' = 10\,K_c''$	OSSERVAZIONI
	cm.	cm^2	cm^2	t.	Kg/cm^2	Kg/cm^2	Kg/cm^2	
I.	14,0 × 14,1 × 19,8	197	268	43,70	222	163	1630	*La presa ebbe luogo all'asciutto. Dopo la rottura il prisma sopporta ancora permanentemente un carico totale di 36^t.*
II.	14,1 × 14,3 × 19,8	202	273	73,50	364	269	2690	*La presa ebbe luogo all'umido. Rottura istantanea. — Il prisma rotto sopporta ancora permanentemente una pressione totale di 89^t,50.*

TABELLA IV.

Prova sull'elasticità e resistenza a tensione di un prisma di conglomerato senza armatura.

DIMENSIONI della sezione trasversale del prisma cm.	CARICO totale t.	ALLUNGAMENTI misurati sulle mediane longitudinali di due faccie laterali opposte		ALLUNGAMENTO medio $\frac{1}{10000}$ mm.	DIFFERENZE	OSSERVAZIONI
		sinistra $\frac{1}{5000}$ mm.	destra $\frac{1}{5000}$ mm.			
10×10	0,20	0	0	0		*Lunghezza su cui vennero misurati gli allungamenti* $= l =$ *cm. 20,2.*
	0,40	9	10	19	19	$F =$ *cm*^{2} *100.*
	0,60	19	19	38	19	$E = \frac{0,60}{100} \frac{2020000}{56} = \mathbf{216}\ {}^{t}/_{cm^2}$.
	0,80	26	30	56	18	$K = \frac{1760}{100} = \mathbf{17,6}\ {}^{Kg}/_{cm^2}$.
	0,20	2	6	8		
	1,76	Rottura secondo una sezione trasversale retta, del tratto centrale del saggio.				

Pirite di Valgioie.

Nota di GIOVANNI BOERIS.

(Con una tavola).

Il territorio di Valgioie, piccolo comune del circondario di Susa, si estende, quasi del tutto, sul versante meridionale della catena che divide la valle della Dora Riparia da quella del Sangone.

Nella parte alta di questo comune, e precisamente poco sopra i casali Tortorello, si estrae un calcare di color giallastro, in cui si vedono frequenti vene di cristallini di calcite in forma, per solito, di scalenoedri, e, meno spesso, di romboedri in ogni caso a facce imperfettissime.

Entro a tale calcare ho notato altresì dei rari cristalli di pirite limonitizzata, assai male conformati, e, per lo stato delle loro facce, punto atti ad essere misurati.

Anche nelle vicinanze della borgata Molino, nella parte bassa quindi di Valgioie, si rinvenne della pietra da calce somigliantissima a quella pocanzi accennata, e qui pure si attivarono delle cave ora abbandonate.

In una di queste, che ebbi occasione di visitare nell'estate scorso, raccolsi un masso di calcare, da cui spuntavano alcuni cristalli di pirite.

Attirarono questi la mia attenzione per il considerevole numero delle loro facce, e, ridotto in seguito il masso in frantumi, parecchi altri ne vennero fuori, per la massima parte di esigue dimensioni, e parzialmente trasformati in limonite.

Stavano in prevalenza addensati in certi punti dove la roccia, la cui struttura appariva minutamente granulare, presentava dei noduli di calcite spatica côn qualche cristallo, affatto raro, di quarzo e una patina ocracea, prodotto di alterazione della pirite.

La maggior parte dei cristalli estratti si presta bene a

misure, e se avvene alcuni con facce assai irregolarmente sviluppate, molti sono gli egregiamente conformati.

Per il discreto numero di forme che su di essi compaiono, alcune delle quali sono da annoverarsi tra le meno frequentemente incontrate nella pirite, e per l'ampio sviluppo che in diversi di essi prendono le facce del rombododecaedro, fatto non nuovo, ma finora non molte volte osservato, meritano un cenno descrittivo.

Le forme che ho potuto determinare con sicurezza sono:

}100{ }110{ }920{ }210{ }320{ }430{ }650{
}230{ }111{ }221{ }211{ }433{ }421{

Ecco in breve quanto può dirsi circa il modo di presentarsi e la frequenza di ognuna di esse.

}100{ Le facce di questa forma costantemente presente, nei cristalli piccoli sono, in generale, poco estese e mostrano la solita striatura; ne vidi per altro alcune poche discretamente larghe e perfettamente piane. Sono invece predominanti nei rari cristalli alquanto grossi, ma a facce scadenti, che mi fu dato d'incontrare.

}110{ È frequentissima, anzi sono una eccezione rara i cristalli che non la presentano. In certi, assai ben conformati, è largamente predominante. Le sue facce si mostrano spessissimo più o meno profondamente striate secondo gli spigoli del cubo: ne osservai però anche delle molto piane e splendentissime.

}920{ Due facce di questo raro pentagonododecaedro, nitidissime, ma poco estese, osservai sul cristallo rappresentato a modello dalla fig. 5, poste l'una da una parte e l'altra dall'altra di un piano di simmetria. Diedero ambedue una immagine alquanto diffusa. Altre tre facce di questo simbolo, una delle quali grandissima, ma con una immagine poco bella, stanno sul cristallo ritratto dalla fig. 2, il solo, fra gli studiati, che presenti una così interessante combinazione.

}210{ Si nota in tutti i cristalli. Sebbene le sue facce siano talvolta assai ampie, non lo sono mai tanto che essa costituisca

la base della combinazione. Sono poi, in molti casi, rigate parallelamente agli spigoli del cubo.

}320{ Fu trovato su tre cristalli con facce di vario sviluppo, nette e brillanti.

}430{ È una forma frequente: talora ha facce di considerevole ampiezza e sufficientemente splendenti.

}650{ Anche questa si trova sovente, con facce il più delle volte larghe, ma alquanto convesse. Non mancano però esempi di facce di tale pentagonododecaedro ben piane e di grande nitore, e allora sono piuttosto ristrette.

}230{ Di questa forma mi occorse di vedere due sole facce, sopra lo stesso cristallo, piccole, ruvide e con immagini scadenti.

}111{ Su quasi tutti i cristalli si incontrano facce dell'ottaedro, talora abbastanza estese, ma non mai così da determinarne l'abito. Sono generalmente piane e lucenti.

}221{ Non manca quasi mai e compare con facce per solito nette e notevolmente estese, le quali riflettono bene la luce. Qualche cristallo però ha delle facce di questa forma striate parallelamente alla loro intersezione con quelle di }111{.

}211{ Questa è pure una forma che si trova in quasi tutti i cristalli. Ha facce ampie, per lo più, quanto quelle di }221{ e distinte per splendore. Le poche volte che le facce di }211{ si trovarono striate nel modo che si è detto, anche quelle di }221{ ad esse associate erano pure contraddistinte da una identica striatura, parallela cioè allo spigolo che fanno colle facce dell'ottaedro.

}433{ Rinvenni poche facce di questo simbolo, ed in cristalli diversi, il più delle volte assai imperfette e ristrette di molto. Ne vidi però una notevolmente ampia e abbastanza brillante. Il simbolo }433{ si ricava dalle zone [211:111] [221:212].

}421{ Di rado compaiono sui nostri cristalli delle facce di questo comune diacisdodecaedro e sono, in ogni caso, affatto subordinate.

Nella seguente tabella riassumo i risultati delle mie misure.

Angoli	Limiti delle osservazioni	Media	Calcolato	N°
(110) : (100)	44°45′ — 45°15′	44°56′	45° 0′	20
(920) : (100)	12 24 — 12 50	12 41	12 32	5
(920) : (101)		46 15	46 21	1
(920) : (102)		64 15	64 7	1
(210) : (100)	26 25 — 26 44	26 36	26 34	20
(210) : (110)	18 10 — 18 40	18 31	18 26	10
(210) : (101)		50 46	50 46	1
(320) : (100)	33 40 — 33 47	33 43	33 41	3
(320) : (111)		36 46	36 49	1
(320) : (221)		22 20	22 24	1
(320) : (021)		60 22	60 15	1
(430) : (100)	36 44 — 36 50	36 47	36 52	5
(430) : (210)	9 50 — 10 26	10 14	10 18	3
(650) : (100)	39 31 — 39 55	39 45	39 48	5
(650) : (111)		35 35	35 36	1
(650) : (221)		20 18	20 8	1
(650) : (121)		33 18	33 15	1
(650) : (110)		5 4	5 12	1
(650) : (210)	13 12 — 13 28	13 21	13 14	4
(111) : (100)		54 42	54 44	1

Angoli	Limiti delle osservazioni	Media	Calcolato	N°
(111) : (110)	35° 0′ — 35° 27′	35° 17′	35° 16′	10
(111) : (210)	39 15 — 39 25	39 20	39 14	3
(221) : (111)	15 32 — 15 50	15 43	15 48	14
(221) : (100)	48 11 — 48 16	48 13	48 11	3
(221) : (021)	41 35 — 41 45	41 40	41 49	2
(221) : (110)	19 10 — 19 38	19 22	19 28	3
(221) : (122)	27 13 — 27 17	27 15	27 16	2
(211) : (100)	35 0 — 35 27	35 15	35 16	10
(211) : (001)		65 40	65 54	1
(211) : (111)	19 15 — 19 38	19 26	19 28	20
(211) : (210)	24 0 — 24 15	24 7	24 6	4
(211) : (221)	17 23 — 17 52	17 39	17 43	8
(211) : (110)		29 50	30 0	1
(433) : (111)		8 18	8 3	1
(433) : (211)		11 10	11 25	1
(433) : (221)	13 37 — 13 41	13 39	13 38	2
(421) : (100)	29 13 — 29 15	29 14	29 12	2
(421) : (221)		18 55	18 59	1
(421) : (211)	11 27 — 11 31	11 29	11 30	2
(421) : (210)		12 38	12 36	1

Ho trovato poi, sopra uno solo dei miei cristalli, nella zona [100 : 010], una faccettina abbastanza netta, che dava una immagine unica, per l'esiguità della superficie riflettente alquanto diffusa, la quale è probabilmente del pentagonododecaedro }720{, già noto per la pirite.

Tale faccia è inclinata di 15° 35′ sulla adiacente di }100{. Il valore teorico per lo spigolo (720) : (100) è 15° 57′. Ma poichè è unica, do la detta forma solo come dubbia.

Sul medesimo cristallo si vede anche una faccia }*hhl*{ ampia, piana, assai rilucente, la quale, per quanto si ricava dall'angolo che essa fa colla vicina di }111{, molto estesa, splendentissima e contornata da tre belle facce di }211{, sarebbe del triacisottaedro }553{ non per anco osservato nella pirite.

Ecco il valore di tale angolo e di alcuni altri misurati per controllo:

	Misurato	Calcolato
(553) : (111)	12° 13′	12° 16′
(553) : (100)	49 25	49 23
(553) : (211)	16 49	16 55

Quantunque si abbia sufficiente accordo tra osservazione e calcolo, trattandosi di una forma nuova, vista con una sola faccia, non ne riporto il simbolo altro che come dubbio.

E con ogni riserva do pure i simboli }554{ }775{ }1077{ }855{ che spetterebbero ad altrettante forme nuove per la pirite di ognuna delle quali si avrebbe una faccia sopra uno stesso cristallo, anzi nel medesimo ottante. Questo è pertanto degno di una qualche attenzione, e la figura 6 lo rappresenta al naturale.

I valori degli spigoli che, nel detto ottante, le facce di }221{ e }211{ fanno con quella di }111{ sono tutti molto prossimi ai teorici, tolto (221) : (111) = 16° 15′. Supera quindi questo il calcolato di 23′; ma la faccia (221) è parecchio difettosa. Trascurando adunque questo valore, gli altri attesterebbero che le facce da cui sono dati, non sono punto spostate.

Le facce dubbie in discorso vennero misurate su parecchie altre vicine. Trascriverò i valori trovati per ognuna, mettendoli di fronte ai richiesti dalla teoria, quando per esse si adottino i simboli riportati più sopra, dicendo pure in breve del loro aspetto, contrassegnandole col simbolo che hanno sulla figura.

(545) Appare come una faccettina triangolare, nettamente delimitata, assai splendente. L'immagine, che dà, è alquanto slargata.

	Misurato	Calcolato
(545) : (111)	5° 53′	5° 46′
(545) : (212)	9 55	10 2
(545) : (122)	19 26	19 19
(545) : (032)	41 22	41 19
(545) : (334)	6 51	7 10

(577) È ampia, brillantissima e riflette una immagine unica e netta. Sta esattamente nelle zone [211 : 111], [032 : 545]. Ciò malgrado, e quantunque le misure siano state eseguite tra facce che davano immagini ben definite, i valori ottenuti, ad eccezione di due, vanno poco d'accordo coi calcolati.

	Misurato	Calcolato
(577) : (111)	8° 57′	8° 28′
(577) : (121)	16 48	16 51
(577) : (122)	6 52	7 20
(577) : (334)	8 15	8 15
(577) : (545)	12 57	12 24
(577) : (032)	28 23	28 55

(10 7 7) È pure assai larga ed abbastanza piana: la sua immagine però è alquanto meno bella di quella offerta dalla faccia precedente

	Misurato	Calcolato
(10 7 7) : (111)	10° 1′	10° 1′
(10 7 7) : (221)	13 46	13 46
(10 7 7) : (110)	31 15	31 19

(855) Meno estesa delle due anzidette e, come esse, nella zona [211 : 111], fornisce una immagine non del tutto perfetta. Le misure si accordano discretamente col calcolo.

	Misurato	Calcolato
(855) : (111)	12° 58′	13° 16′
(855) : (221)	14 27	14 35
(855) : (110)	30 28	30 35
(855) : (211)	6 27	6 12
(855) : (10 7 7)	2 57	3 15

Aggiungerò infine che, sempre sullo stesso cristallo presentante le ora descritte facce, ma in un altro ottante, si nota l'alternato comparire di una faccia }210{ con una di un altro pentagonododecaedro, che sarebbe nuovo per il minerale ed esprimibile col simbolo }510{.

	Misurato	Calcolato
(510) : (100)	11° 38′	11° 18′
(510) : (210)	14 43	15 16
(510) : (111)	47 12	47 18

Codesta faccia dà un riflesso unico e ben distinto, ma poichè essa pure è unica, l'annovero fra quelle il cui simbolo rimane dubbio.

Milano, Museo Civico. Aprile 1900.

Rotazioni elettrostatiche dei dielettrici liquidi.

Nota dell'Ing. ALESSANDRO ARTOM.

(Con una tavola).

Le rotazioni di cilindri dielettrici solidi, posti nei campi elettrici rotanti, ottenute nelle esperienze di Arnò (1), dimostrarono l'esistenza di un ritardo con cui la polarizzazione del dielettrico segue la rotazione del campo stesso.

È oggetto di questo studio il rendere note alcune esperienze le quali provano che anche per i dielettrici liquidi posti in un campo elettrico rotante sussistono proprietà perfettamente analoghe a quelle verificate per i dielettrici solidi: l'ordine di grandezza dei fenomeni sarebbe solo diversa.

Per osservare l'azione del campo rotante sopra i dielettrici liquidi feci costruire, dopo una lunga serie di tentativi, dei piccoli cilindri cavi di stagnola, e ne avvolsi la superficie esterna con una reticella di rame a maglie tenuissime, avendo cura che la reticella si elevasse di qualche millimetro sul bordo superiore del recipiente di stagnola.

Quando sospendevo nell'aria il secchiello, dopo averlo immerso e riempito di isolante, osservavo che la reticella tratteneva un velo liquido distribuito abbastanza uniformemente.

Il volume occupato dal dielettrico e sopra il quale doveva esercitarsi l'azione del campo veniva qui ad assumere la forma di un cilindro a parete sottile limitato nella parte superiore dalla superficie libera del liquido contenuto nel recipiente.

Le dimensioni medie dei secchielli erano di un centimetro di diametro base per due di altezza.

---

(1) " Atti della R. Accademia dei Lincei ", 16 ottobre 1892.

Nelle prime esperienze utilizzai la disposizione del campo trifase a settori piani, come venne adoperata dall'Arnò per la rotazione dei dischi dielettrici, affacciando i settori alla superficie liquida superiore del cilindretto. In esperienze successive mi sono servito della disposizione a settori cilindrici e finalmente ho riunito i settori piani coi cilindrici, come mostra la figura qui annessa.

In un primo esperimento ho sospeso nel campo per mezzo di una bava di seta il piccolo cilindro cavo: finchè il secchiello era vuoto, essendo costituito da materia conduttrice, il campo esercitava su esso solamente qualche attrazione seguìta da deboli oscillazioni.

Ma allorquando io riempivo il secchiello con dielettrico liquido, e lo sospendevo nel campo, il mobile incominciava a rotare con velocità rapidamente crescente.

Invertito il senso del campo, la rotazione veniva anch'essa ad invertirsi.

L'esperienza fu lungamente ripetuta sostituendo, glicerina, olio di lino crudo, olio di vaselina, petrolio, essenza di trementina, olio di ricino, benzolo, ecc.

Il fenomeno pure rendendosi manifesto, le velocità di rotazione osservate furono notevolmente diverse, a parità di peso dei dielettrici adoperati.

Osservai che ripetendo le esperienze sopra lo stesso liquido, in condizioni identiche, le velocità di rotazione andavano aumentando da un' esperienza alla successiva come se le azioni precedentemente subìte avessero modificato lo stato del dielettrico così da renderlo più sensibile all'azione del campo. Il che si accorderebbe colle idee manifestate dal Boltzmann (1) per spiegare le esperienze di Quincke (2).

La tabella seguente raccoglie i nomi dei pochi dielettrici liquidi finora esperimentati disposti in ordine decrescente dall'olio di lino e glicerina, in cui il fenomeno fu marcatamente avvertito, all'olio di ricino per cui le velocità di rotazione erano assai piccole.

---

(1) " Wiedemann Annalen ", LX.
(2) " Wiedemann Annalen ", LIX.

Peso del secchiello vuoto gr. 1,190.

N°	DIELETTRICO	Peso contenuto nel secchiello grammi	Densità
1	Olio lino crudo	0,843	0,929
2	Glicerina	1,383	1,263
3	Olio vaselina	0,896	0,930
4	Petrolio	0,774	0,8467
5	Benzolo	0,8106	0,899
6	Trementina.	0,856	0,884
7	Olio ricino	0,9803	0,967

Le rotazioni vennero osservate quando le differenze di potenziale stavano dai 10.000 ai 12.000 volt: è però probabile che più opportune proporzioni del campo permettano di osservare il fenomeno anche a potenziali assai minori. Il campo aveva la frequenza di 42.

Il risultato di queste esperienze era fino ad un certo punto prevedibile: misure di dissipazione di energia nel petrolio col variare della frequenza del campo erano state eseguite dal prof. H. F. Weber (1).

Lo Steinmetz (2) discutendo i risultati ottenuti da Northrup e Pierce (3) nelle esperienze sulle distanze esplosive in certi olii, attribuiva il fatto che il rapporto fra le distanze esplosive negli olii isolanti e nell'aria dipende dalla natura della sorgente di energia adoperata, alla probabile presenza della isteresi elettrostatica che, date le condizioni delle esperienze, doveva venire a comparire in larga misura in quei dielettrici.

(1) Lombardi, *Sulle misure di energia dissipata nei dielettrici*, 1896.
(2) " Electrical World ,, 20 novembre 1897.
(3) " Electrical World ,, 6 novembre 1897.

Le rotazioni da me ora osservate e che non erano ancora state poste in evidenza completano le analogie di comportamento fra i dielettrici solidi e liquidi.

Anche qui abbiamo un ritardo di tempo tra l'istante dell'applicazione della forza elettrica e l'istante in cui la polarizzazione ha raggiunto il suo corrispondente valore.

Questo ritardo sarebbe causa del fenomeno da Steinmetz denominato di *isteresi viscosa* che varia come il quadrato della frequenza e della intensità del campo.

Il riconoscere poi se anche pei dielettrici liquidi si abbia a considerare un'*isteresi statica* indipendente dalla frequenza e governata dalle stesse leggi dell'isteresi magnetica; se avvengano anche per essi, come osservò il Northrup (1) delle variazioni nel potere induttore specifico, quando sono sottoposti a campi ciclicamente variabili, potrà formare oggetto di ulteriori indagini.

Gli esperimenti di cui qui si è fatto cenno, offrono modo di eseguire ricerche quantitative in condizioni talvolta migliori di quel che non si possano sempre realizzare pei dielettrici solidi; così per qualche isolante liquido potrà farsi assegnamento sopra una buona omogeneità di composizione.

In questo ordine di idee mi propongo di continuare le mie ricerche.

Io debbo intanto attestare la più viva gratitudine al comm. Pirelli che mi concesse l'uso del suo laboratorio ed all'ingegnere Emanuele Jona, i cui consigli hanno coadiuvato efficacemente l'opera mia.

Torino, aprile 1900.

---

(1) " Philosophical Magazine ", gennaio 1895.

Relazione sulla Memoria del Dott. Ermenegildo Daniele: *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed estendibili.*

Il Daniele prende le mosse da alcuni risultati trovati dal prof. Picciati nel suo lavoro: *Sull'equilibrio e sul moto infinitesimo delle superficie flessibili ed estendibili*, e, al pari del detto Autore, considerando ciascun elemento di una superficie flessibile ed estendibile che subisce una deformazione infinitesima, distingue il moto rigido dell'elemento dalla sua pura deformazione. In particolare trova le espressioni delle componenti della rotazione dell'elemento ed i tre coefficienti che caratterizzano la pura deformazione.

Il Daniele spinge però molto più innanzi lo studio cinematico della pura deformazione delle superficie flessibili ed estendibili di quanto non abbia fatto il Picciati, il quale mirava solo ad ottenere gli elementi sufficienti per lo studio delle vibrazioni delle lamine liquide. Il § 2° della Memoria del Daniele racchiude difatti una trattazione completa ed elegante della pura deformazione. Egli stabilisce varii risultati interessanti, e li confronta colle note proprietà della pura deformazione delle particelle fluide, mostrandone le analogie e le differenze.

I §§ 3° e 4° contengono la parte più importante delle ricerche del Daniele. Egli comincia dall'osservare che le tre componenti della rotazione di ogni elemento e i tre coefficienti della pura deformazione, debbono essere legati da tre relazioni e le determina, e trova poi che quando queste sei quantità verificano le dette condizioni la deformazione della superficie resta individuata, purchè si conosca lo spostamento di un suo punto qualunque. In seguito l'Autore mostra che se si vuol passare dai tre coefficienti della pura deformazione alle tre componenti della rotazione basta la integrazione di una sola equazione del 2° ordine, la quale diviene la nota equazione ca-

ratteristica di Weingarten, tutte le volte che si suppongono nulli i coefficienti della pura deformazione, ossia se si ammette che la superficie sia flessibile ed inestendibile. Finalmente nel § 4° l'Autore ritrova la precedente equazione del 2° ordine giovandosi di un metodo analogo a quello col quale il Weingarten pervenne direttamente alla equazione caratteristica, e mostra che, una volta integrata questa equazione, possono ottenersi con sole quadrature le componenti degli spostamenti dei punti della superficie.

Il § 5° della Memoria contiene delle interessanti applicazioni dei risultati precedenti.

Infine collo studio elegante di quella deformazione che il Daniele chiama *pura estensione* egli termina la sua Memoria.

La quale, per la estensione della equazione caratteristica di Weingarten alle superficie estendibili, e per la eleganza e novità dei varii risultati, merita di esser presa in seria considerazione; onde la vostra commissione ne propone la lettura alla Classe e la inserzione fra le Memorie accademiche.

C. Segre.
V. Volterra, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Andrea Naccari.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 6 Maggio 1900.

PRESIDENZA DEL PROF. BERNARDINO PEYRON
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Rossi, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Ferrero, Graf, Allievo e Renier Segretario. — Scusano la propria assenza il Presidente Carle e i Soci Brusa e Pizzi.

Approvasi l'atto verbale dell'antecedente adunanza, 22 aprile 1900.

Il ff. di Presidente partecipa la morte testè avvenuta in Firenze del Socio corrispondente prof. Giovanni Marinelli. — Fu già telegrafato al nòstro Socio nazionale non residente, Senatore Villari, pregandolo di rappresentare l'Accademia ai funerali.

Il Segretario offre un opuscolo del Socio corrispondente Vittorio Poggi: *L'atto di fondazione del monastero di S. Quintino di Spigno (4 maggio 991)*, Torino, 1900. — Sarà ringraziato.

Il Socio Ferrero presenta per le *Memorie* accademiche una dissertazione documentata del Prof. Arturo Segre: *La politica sabauda con Francia e Spagna tra il 1515 e il 1531.* — Ne riferirà apposita Commissione, composta del Socio proponente e del Socio Cipolla.

Presenta pure il Socio FERRERO una nota del Prof. Luigi VALMAGGI: *Come trascrisse Ennio il greco φ?*, che è inserita negli *Atti*.

Il Segretario presenta una nota del Socio corrispondente Aristide MARRE: *Proverbes, maximes et conseils du tagalog (langue principale des Philippines)*. — È accolta essa pure negli *Atti*.

Quindi la Classe si costituisce in seduta privata e procede alla nomina di un Socio delegato presso il Consiglio di Amministrazione dell'Accademia. Riesce eletto il Socio Francesco ROSSI.

LETTURE

Come trascrisse Ennio il greco Φ?

Nota di LUIGI VALMAGGI.

È noto che nella scrittura latina piú antica non erano in uso le consonanti aspirate, alle quali, quando occorressero in parole d'origine greca o comecchessia straniera, si sostituivano i segni delle esplosive sorde corrispondenti. In che tempo e ad opera di chi le aspirate sieno state poi introdotte nella scrittura non si sa precisamente: ad ogni modo si giudica che l'introduzione non abbia avuto luogo prima della seconda metà del secolo VII di Roma, che è il tempo in cui le consonanti aspirate cominciano a comparire nelle iscrizioni (Ritschl, *Priscae Lat. mon. Epigr.* 124 = *Opusc.* IV, 765). Su questo punto io mi riservo di tornare altrove, perché v'ha ragione di sospettare che l'uso delle aspirate in latino sia principiato assai piú presto, e forse già nel secolo VI. Se ciò fosse, s'affaccerebbe spontanea e a primo aspetto legittima l'ipotesi che l'innovazione sia da attribuire ad Ennio, dacché le riforme ortografiche sono pure non ultima tra le cause per le quali egli si dié vanto di avere rammodernato e rammorbidito i versi *quos olim Faunei vatesque canebant*. Ma vi si oppone la testimonianza esplicita di Cicerone. Alludo al famoso passo dell'*Orator* (§ 160), dove Cicerone, ragionando della mancanza di consonanti aspirate nel latino arcaico, osserva tra altro: " Burrum semper Ennius, numquam Pyrrhum; 'vi patefecerunt Bruges', non Phryges; ipsius antiqui declarant libri ". È chiaro che *Burrus* e *Bruges* sono due esempi scelti a caso da Cicerone per constatare che Ennio non usò aspirare né l'*r* né qualsisia altra consonante; e non è neppure da supporre che accanto a *Bruges* e *Burrus* egli potesse avere scritto *Anchisam* o *Karthaginienses*, come con poca coerenza gli fanno scrivere i moderni editori.

Non v'ha dubbio adunque che l'uso delle consonanti aspirate è per Ennio da escludere assolutamente. Sennonché il passo di Cicerone testé citato ha dato luogo ad una falsa opinione circa il modo come il poeta avrebbe riprodotto nella scrittura il greco φ. Molti infatti pensarono che, mentre nel periodo preclassico la trascrizione del φ era fatta col *p*, solesse invece Ennio rappresentare tanto il π quanto il φ costantemente con *b*; e su questa erronea supposizione si fondò anzi dal Corssen e da altri una vera e propria teoria grammaticale (v. la bibliografia in Saalfeld, *Tens.* 190 s. v. *Bruges*, aggiungendovi Ritschl, *Opusc.* IV, 146 sgg.; II, 477 sgg.). Ora quanto a *Burrus*, l'esempio è allegato da Cicerone come saggio di enniano *-rr-* per *-rrh-*, e non punto in proposito o ad illustrazione della trascrizione del greco π. La quale del resto non è a meravigliare che potesse venire fatta anche con *b*, per effetto della somiglianza di pronunzia tra le due lettere, onde ebbero origine *burrus* (aggettivo, πυῤῥός), *buxus* (πύξος), *carbasus* (κάρπασος) e all'opposto *carpatinus* (καρβάτινος) (1). Strano sarebbe invece se Ennio avesse fatto corrispondere un semplice *b* anche a φ, dal momento che cosí nelle iscrizioni (v. gli esempi in Schmitz, *Beitr. zur lat. Sprach- und Litteraturk.*, Leipzig 1877, 125 sgg. e Seelmann, *Ausspr.* 259) come nelle poche traccie che ce ne conservano i manoscritti (cfr. gli esempi dei codd. di Plauto raccolti dal Fleckeisen, *N. Jahrbb.* 1891, 658 n.) la trascrizione arcaica di φ è sempre *p*. Se potrebbe ammettersi, ove non si avessero prove in contrario, che il grecizzante Ennio introducesse in latino l'uso delle aspirate, e quindi riproducesse φ con *ph*, non si saprebbe spiegare all'opposto come egli si attenesse a un modo di trascrizione, che non ha in suo favore altro documento che il dialettale *balaena* (*ballaena*) per φάλαινα. La qual trascrizione di φάλαινα col suo *b* per φ parve già ai grammatici antichi cosí insolita, che per ispiegarla ricorsero al confronto col latino *b* per il greco π, come si vede in Paolo compendiatore di Festo, p. 22 Th.: " Ballenae nomen a Graeco descendit. Hanc illi φάλαιναν dicunt

(1) Cfr. Terenzio Scauro p. 14 K.: " *b* cum *p* et *m* consentit, quoniam origo earum non sine labore coniuncto ore respondet. A quo quem Graeci Πυρρίαν nos Byrriam, et quem nos Pyrrum antiqui Burrum et Palatium Balatium, item Publicolam Poplicolam ".

antiqua consuetudine, qua πυῤῥόν burrum, πύξον buxum dicebant „. Ognuno intende che dove Ennio avesse avuto per regola di rendere il φ greco con *b*, Paolo (ossia Festo, ossia, in ultimo, Verrio Flacco: cfr. L. Mackensen, *De Verrii Flacci libris ortogr.* in *Comment. philol. Jen.* VI, 2°, pp. 44 e 52), che dimostra sí grande familiarità col testo di Ennio, avrebbe trovato in esso numerosi e assai piú calzanti riscontri col latino *ballaena* per gr. φάλαινα.

È questa anzi una prima prova indiretta che Ennio non trascrisse per regola φ con *b*. Ma non ne mancano altre. Cosí con quella di Paolo concorda esplicitamente l'attestazione di Quintiliano, il quale nota come affatto isolato e sporadico il *B* cosí di *Burrus* come di *Bruges* (I, 4, 15: " Sed B quoque in locum aliarum dedimus aliquando, unde *Burrus* et *Bruges* et *Belena*) „. E in questa parte Quintiliano non può avere attinto esclusivamente a Verrio Flacco. Né accanto agli argomenti esterni sono da dimenticare le traccie che ci è dato scoprire nei frammenti stessi del poeta. Sono indizî scarsi, e per lo piú assai dubbî, per la varietà e incertezza della tradizione manoscritta degli autori, diversi di tempo e di tendenze, che hanno conservato quei frammenti, i quali le piú volte ci son giunti ritoccati e rammodernati per differenti vie. Pure alcun partito se ne può trarre, chi li consideri con le dovute cautele; e quanto alla questione onde ci stiamo ora occupando, v'è appunto qualche documento, su cui, per la natura stessa dello scrittore che ce l'offre, è lecito fare pieno assegnamento. Notiamo intanto che nella decina di vocaboli enniani superstiti, dove occorre la trascrizione di φ (*sulpureus* Ann. 271 M.; *Pilippo* ib. 378 M.; *rumpia* ib. XIV, 8° M.; *Pemonoe* Wien. Stud. XIII, 325 sg.; *Prugio* Fab. 114 M.; *Delpicus* ib. 298 M.; *Crespontem* ib. 338 M.; *pilosopandum* ib. 424 M.; *pilologam* (?) inc. sed. XII M.), nessun codice ci presenta indizî della pretesa riproduzione di φ con *b*. Per lo piú prevale la grafía rammodernata con *ph*, ovvero con *f*: solo qua e là s'incontrano sporadicamente forme col semplice *p*, e potrebbero essere tanto errori del copista quanto residui della grafía originaria. Cosí in *Crespontem* di *Fab.* 338 i codd. dell'autore *ad Herennium* (II, 24, 38 Marx) hanno tutti il solo *p* (*chrespontem* BCPΠ, *trespontem* b, *threspontem* l d). Parimenti il cod. D di Prisciano (I, 223 H.) legge *sulporeas* in *Ann.* 271.

Sennonché il documento per questo rispetto piú interessante è *rumpia* di Gellio X, 25, 4 (cod. *rupia*, ma *rumpiae* ib. 2). Ed è interessante per il confronto con altre citazioni gelliane di Ennio, nelle quali i codici ci danno le forme con *ph*, come in *Philippo* di *Ann.* 378 (XVIII, 9, 2), e in *philosophandum* di *Fab.* 424 (V, 15, 9). La sopravvivenza di *rumpia* lascia intendere che anche negli altri passi enniani Gellio doveva avere trascritto, su esemplari corretti, *Pilippo* e *pilosopandum* secondo l'ortografia arcaica, le quali forme, poi che n'era chiarissima l'origine greca, il copista rammodernò agevolmente in *Philippo* e *philosophandum*, laddove lasciò intatto *rumpia* di X, 25, 4 (l'esempio di Ennio è addotto a proposito di una enumerazione di nomi di armi " in historiis veteribus scripta "), perché non seppe ravvisarvi il greco ῥομφαία.

Dalle osservazioni sin qui fatte risulta certo che Ennio, non altrimenti che gli altri scrittori del suo tempo, usò rappresentare con *p* il φ greco, ed è perciò eccezione unica la grafía *Bruges* esplicitamente attestata da Cicerone nel passo dell'*Orator* sopra citato. Sennonché questo *Bruges* di Ennio non è foggiato punto sul greco Φρύγες, ma bensí sulla forma forestiera Βρύγες (anche Βρίγες, Βρύγοι: cfr. Erodoto VI, 45; VII, 73; Strabone VII, 3, 2; VII, p. 278 Müll.-Dübn.; XII, 3, 20; Apoll. Rodio IV, 470; e Kretschmer, *Einl. in die Gesch. der griech. Spr.* 229), che probabilmente egli leggeva nella tragedia greca originale che aveva dinanzi. La stessa grafía l'Osann (*Anal. crit.* 15) propose di restituire eziandio in *Fab.* 114 (e fu seguito dal Vahlen), dove i codd. di Cicerone hanno *Phrygio* e lo scoliasta Gronoviano *Frugio*, che è la forma preferita dal Ribbeck nell'ultima edizione dei *Scaen. Rom. poesis fragm.* (I, p. 68). Ma in questo luogo è verosimile che Ennio trascrivesse semplicemente l'aggettivo Φρύγιος " troiano ", e sarà quindi prudente attenersi alla forma *Prugio* secondo la regola generale.

Proverbes, maximes et conseils traduits du tagalog (langue principale des Philippines)

Nota del Socio corrispondente ARISTIDE MARRE.

AVERTISSEMENT

Pour rendre plus exacte et plus facile au lecteur la prononciation des mots tagalog qui figurent dans ce petit *Recueil de proverbes, maximes et conseils*, il me paraît indispensable de le faire précéder de quelques observations et instructions, sous forme d'avertissement.

On sait qu'avant l'arrivée des conquérants espagnols dans l'Archipel des Philippines, les indigènes, de race malaise pour la plupart, faisaient usage d'un alphabet syllabique, composé seulement de trois voyelles et de quatorze consonnes.

Une de ces trois voyelles représentait notre *a;* la seconde représentait à la fois *é* et *i*; la troisième représentait à la fois *o* et *ou*.

Chacune des quatorze consonnes se prononçait avec une voyelle inhérente, qui était invariablement *a*, à moins qu'elle ne fût marquée d'un point placé au dessus ou au dessous d'elle. Quand le point était placé au dessus de la consonne, il indiquait qu'elle devait se prononcer avec le son *é* ou *i*; quand il était placé au dessous, il indiquait que la consonne devait se prononcer avec le son *o* ou bien *ou*.

L'alphabet tagalog avec ses caractères primitifs a été supplanté dès la fin du XVI^e^ siècle, par l'alphabet latin; mais il importe de faire observer que nos lettres

c, f, j, q, v, x, z

doivent être éliminées de l'écriture des mots tagals.

c et *q* sont remplacés par *k*, comme dans toutes les autres langues malayo-polynésiennes;
f est remplacé par *p*; *v* par *b*; *j*, *x*, *z* par *s*.
Cette consonne sifflante *s* ne prend jamais le son adouci de *z*.
g se prononce toujours dur, et jamais comme le *j* français.

La langue tagalog, comme le malais, le javanais et les autres langues de la famille malayo-polynésienne, possède une nasale des consonnes gutturales, que n'ont point les langues européennes. C'est la consonne qu'on appelle *nga*, qui combine en un seul les deux sons *na* et *ga*. Pour différencier dans l'écriture ce *nga* malayo-polynésien des deux consonnes *n* et *g* se suivant, tout en appartenant à deux syllabes distinctes, nous ferons usage des deux caractères *nĝ*, à l'instar des Philippins du XIX[e] siècle, et nous écrirons en conséquence *hanga* et *hanĝa*, *lingo* et *linĝo*.

Hanga (terme, fin) se lit *han-ga*, et *hanĝa* (s'admirer) se lit *ha-nga*. *Lingo* (dimanche) se lit *lin-go*, et *linĝo* (tuer) se lit *li-ngo*.

Le vénérable abbé Favre avait imaginé pour la transcription du *nga* malais, le caractère *rg* où les deux éléments *na* et *ga* sont unis.

Nous ferons observer en outre que jamais une consonne ne doit se lier dans la prononciation avec une autre consonne, et que quand il s'en rencontre deux de suite dans l'écriture, elles doivent être séparées dans la lecture et considérées comme appartenant à deux syllabes distinctes. Ex.: *loklok* (repos) et *magloklok* (se tenir en repos) doivent se prononcer *lok-lok*, *mag-lok-lok* et non *lo-klok ma-glo-klok*.

De même, quand deux voyelles se trouveront juxtaposées, il faudra les prononcer séparément l'une de l'autre. Ex.: *arao* (jour, soleil), *òo* (oui), *ay* (être), *may* (avoir), *amain* (oncle), etc.

Cela dit, nous présentons notre petit opuscule au lecteur bénévole, en le priant de l'accueillir favorablement.

Vaucresson, près Versailles, le 20 avril 1900.

PROVERBES

1. *Ang kahoy na babad sa toubig, sa apouy ay di magdikit.*
Le bois imbibé d'eau ne brûle pas dans le feu.
2. *Ang pousa, i, kapagka minsan na banliàn, toubig na malamig ay iniilagan.*
Le chat une fois échaudé fuit l'eau froide.
3. *Nag babansag kang marounong, ay mangmang ka.*
Tu te vantes d'être un savant, tu es un ignorant.
4. *Bougnousin natin ang làyag, at may hánĝin.*
Larguons la voile, quand il y a du vent.
5. *Boukhin mo ang bibig mo, at lalamon ka nang lánĝao.*
Ouvre la bouche et tu avaleras des mouches.
6. *Madoulas na loubhâ ang paboukang binhi.*
L'anguille est très glissante.
7. *Nagbouboubouboula ang toubig at ang poulot.*
L'eau et le miel jettent de l'écume.
8. *Maginĝat ka sa aso, at bakâ ka makagat.*
Prends garde au chien, qu'il ne te morde pas.
9. *Masamang kahouy ang di namoumounga.*
Le mauvais arbre est celui qui ne donne pas de fruits.
10. *Koumakalat ang lanĝis kong maboubô.*
L'huile va en s'étendant quand on la verse.
11. *Hindi nakatikim nang manĝa bagay na matatamis, ang di loumanĝap nang kapaitan.*
12. Qui n'a pas goûté ce qui est amer, n'apprécie pas ce qui est doux.
13. *Walàn ang malakas na pàra nang kasalatàn.*
Rien n'est plus fort que la nécessité.
14. *Koun ang katoto mo, i, poulot houag mong kanin maobos.*
Si tu es ami du miel, ne le mange pas tout.
15. *Pamingàla, i, mapoupouksa pag nagkakasondo ang pousa, t, ang dagã.*
16. Quand le chat et les souris vivent en paix, le garde-manger s'en ressent.

17. *Ang datihan sa panĝanib ay doumalousong sa kaàway* (*).
Celui qui est accoutumé aux dangers affronte l'ennemi.

18. *Ang masamang damò, i, dinamamatay.*
Mauvaise herbe ne meurt pas.

19. *Matakot ka sa dilâ, gayòn-din sa dilâ mo, magpaka inĝat ka sa kaniya.*

20. Redoute la langue, et même la tienne, prends bien garde à elle.

21. *Di mangyaring makapanaog ang walang paa.*
Impossible de se baisser à qui n'a pas de pieds.

22. *Houag mong hamakin ang basàhan, at touina, i, kailangan.*
Ne méprise pas le torchon qui te sert toujours.

23. *Houmihip at houmigop ay di mapagsàsabay.*
Souffler et humer en même temps ne se peut faire.

24. *Ang may malaking pagibig sa kaniyang sariling katawàn ay koulang nang pagibig sa iba.*

25. Celui qui a beaucoup d'amour pour soi en a peu pour les autres.

26. *Ang manĝa ibon ay kawan-kawan koun loumipad.*
Les oiseaux volent par troupes.

27. *Ang pagibig na paimbabao, ay agad napapàwi.*
L'amour feint disparaît promptement.

28. *Ang nagkakatatlong tambal na loubid, ay maliwag mapatid.*
La corde tressée en triple est difficile à rompre.

29. *Sa paggawa lamang nahahalata ang kamahalan.*
C'est seulement par l'œuvre que se connait la noblesse.

30. *Ang manĝa kayamanan, ay pain din nang demonio sa tawo.*
Les richesses sont l'appât avec lequel le démon amorce l'homme.

31. *Koun saan naroon ang pananĝis ay naroon ang patay.*
Où sont les pleureurs, c'est là qu'est le mort.

32. *Sa isang masamang binhî nangagaling ang masasaklap na bounĝa.*
D'une mauvaise graine proviennent les fruits amers.

(*) On dit aussi: *Ougali nang matapang ang soumougba sa kaáway* (c'est la coutûme des braves de se mettre au milieu des ennemis).

33. *Houag mong ipagpaniboukas ang gagawin mo.*
Ne diffère pas au lendemain ce que tu as à faire.

34. *Soumosonod sa katouaan ang kaloumbàyan.*
Derrière la joie vient la tristesse.

35. *Marami ang patay sa manĝa bouhay.*
Les morts sont plus nombreux que les vivants.

36. *Ang salapî ay hindi nakababanal sa tawo.*
L'argent ne fait pas l'homme vertueux.

37. *Walang lîhim na di nasipot.*
Il n'y a pas de secret qui ne se découvre.

38. *Soumousoubo ang poulot.*
Le miel fait de l'écume.

39. *Sousoukabsoukab ang tawong mahagouay.*
L'homme de grande taille se baisse en marchant.

40. *Soumousougba ang paroparò sa apouy.*
Le papillon s'élance vers le feu.

41. *Houag kang doumiyan sa tampak sa arao.*
Ne te mets pas au soleil au moment de sa plus grande chaleur.

42. *Tantong darating ang kamatayan na walang pagsala.*
Une chose bien certaine, c'est que la mort arrivera sans faute.

43. *Hindi mawawalan nang isang pounit sa isang tastas.*
A la déchirure ne manquera pas le trou.

44. *Hindi loumimo iyang boulas mo, at mapourol.*
Ton harpon ne pénètre pas, c'est qu'il est émoussé.

45. *Walang makaliligtas sa parousa.*
Personne n'est exempt de peine.

46. *Nagwiwikawika ka, anong banta mo?*
Vous me flattez beaucoup, quel est votre but?

47. *Nagbibiki ang walang bait.*
L'imprudent mange à pleines joues.

48. *Ang mayamang maràmot, ay mapagdahop sa paggougol.*
Le riche avare est naturellement mesquin en ses dépenses.

49. *Malamig ang toubig sa boukal.*
Froide est l'eau de la fontaine.

50. *Ang pagiisip ay matoulin sa palaso, matoulin pa sa hanĝin.*
La pensée est plus légère que la flèche, plus rapide que le vent.

51. *Houag mong ipanotnot sa maraming kamay.*
Ne fais pas effiler (de tissu) à qui a les mains sales.

52. *Doumadami ang bigas koun isaing.*
Le riz grossit en cuisant.

53. *Mabouting olam ang asin.*
Le sel est un bon aliment.

54. *Bato ang inouounan nang manĝa banal.*
Les justes ont une pierre pour oreiller.

55. *Tinĝinan mo sa giring poula koun saangaling ang hanĝin.*
Regarde à la girouette quel vent souffle.

56. *Ang tawong palalò ay di nahihiyã.*
L'homme orgueilleux est impudent.

57. *Kaya nanga, t, nanhihinĝouha ka may kasalanan karin.*
Puisque tu te piques, c'est que tu es en faute.

58. *Ang manĝa kahouy ay nakakakanlong sa bahay.*
Les arbres servent d'abri à la maison.

59. *Houag kang dadaan sa masamang daan.*
Ne passe pas par le mauvais chemin.

60. *Pinamamaipouyan ka nang aso mo.*
Ton chien te fait fête en remuant la queue.

61. *Kailan poupouti ang ouak?*
Quand le corbeau se fera-t-il blanc?

62. *Natapatan mo ang pagkakataon.*
Ne laisse pas échapper la bonne occasion.

63. *Dinagit nang láouin ang sisiou.*
Le milan saisit le poussin en volant.

64. *Nakaliliyo ang bangkang mabouay.*
La barque qui penche de côté et d'autre cause des étourdissements.

65. *Ang mababang loob ay dinoudouahàgi nang manĝa palalo.*
L'humble de cœur est molesté par les superbes.

66. *Kanikaniyang hingil.*
Chacun a son goût.

67. *Houag kang loumabnot nang bouhok sa iba, at lalabnoutan ka naman.*
N'arrache pas les cheveux aux autres, ils t'arracheraient les tiens.

68. *Loungmalakip ang douag sa likod nang matapang.*
Le poltron se couvre du bouclier du brave.

69. *Houmihinĝil ang mahinā sa malakas.*
Le faible se rattache au fort.

70. *Pagmay hanĝin may alon.*
Tu as le vent, tu auras le flot.

71. *Parati nang nagkakaamol ang manĝa bâta.*
D'ordinaire les enfants se barbouillent le visage.

72. *Sa palakain ang kanin loumabas,*
at ang katamisa, i, sa malakas.
Au mangeur la nourriture, à l'homme fort la douceur.

73. *Nabolonan ang koumakain nang patago.*
A celui qui mange à la dérobée, la voix s'arrête dans le gosier.

74. *Ang hamak na tawo, ó moura, ay makikilala sa gawā.*
L'homme vil et bas sera connu par ses actes.

75. *Koun may sala ang natay nang baka gayon din ang houmawak nang pàa.*
Pèchent également celui qui tue la vache et celui qui la saisit par la patte.

76. *Ang toubig ang ipinapaligpig.*
L'eau est ce qui remue de soi.

77. *Ang pagpapaimbabao ay dayâ.*
Feintise est tromperie.

MAXIMES ET CONSEILS

1. *Ang lahat nang kaàliwan ay na sa Dios.*
Toute consolation est en Dieu.

2. *Ang anak na marounong goumalang sa kaniyang manĝa magoulang, ay marounong din naman sa iba.*
L'enfant qui sait respecter ses parents saura respecter son prochain.

3. *Koun di mo maaaralan ang anak mo, sino ang aaral sa kaniya.*
Si tu ne peux pas admonester ton fils, qui l'admonestera?

4. *Houag mong ariin ang di iyo.*
Ne t'approprie pas ce qui n'est pas à toi.

5. *Oumawat kayo sa nangagaaway.*
Éloigne-toi des gens qui se querellent.

6. *Houag mong soundin ang di tapat na bilin.*
N'obéis pas à un ordre qui ne serait pas juste.

7. *Houag kang magbintang.*
Ne porte pas de faux témoignage.

8. *Houag kang tatangap nang biyayâ, at ang nakabouboulag sa mata nang mabait.*
Ne reçois pas de présents, car ils aveuglent les yeux de l'homme prudent.

9. *Ang hindi magagaling na gawà, ay nakapoupousyào sa kaginòohan nang goumagawâ.*
Les actions qui ne sont pas honnêtes, ternissent la noblesse de celui qui les commet.

10. *Kinakabig mo ang mangâ, walang katouiran.*
Viens en aide à ceux qui n'obtiennent pas justice.

11. *Ang mangâ maloulouba na loob, ay dapat ibigin.*
Les doux de cœur doivent être aimés.

12. *Houag mong gamitin ang soundang laban sa kapowa mo tawo.*
Ne te sers pas du couteau contre ton prochain.

13. *Mahangây ang pait nang pagaaral hangâng bata, at houag ang pait nang kamangmangan koun toumandang walang magagâwa.*
Mieux vaut l'amertume de l'étude dans l'enfance que l'amertume irrémédiable de l'ignorance dans la vieillesse.

14. *Hindi dapat igalang ang posong sinoman siya.*
On ne doit pas le respect à l'homme déhonté quel qu'il soit.

15. *Ano mang makita mo, ó madingîg mo, ay hahanapin mo ang dahilàn.*
De ce que tu vois ou entends, cherches-en le motif.

16. *Ang dounong ay nakamamahal at nakaliliwanag nang bait sa nagaaral na magaling.*
La science ennoblit et illumine l'entendement de celui qui l'étudie bien.

17. *Ang totoong galang ay namamahay sa pouso at bait.*
Le vrai respect réside dans le cœur et l'entendement.

18. *Houag mong gamitin ang di iyo.*
Ne fais pas usage de ce qui n'est pas à toi.

19. *Houag mong giliwin ang di dapat.*
N'aime pas ce qui n'est pas juste.

20. *Houag kang magwikâ nang manĝa hamak na wikâ.*
Ne dis pas de paroles oiseuses.

21. *Ibigin mo ang kaloulouа mong lalo sa lahat nang kayamánan dito sa loupâ.*
Aime ton âme plus que toutes les richesses de la terre.

22. *Isipin mong magaling bago mo gawin ang anoman, at akalain mo koun ano ang iyong kahihinatan.*
Avant d'entreprendre quelque chose, réfléchis bien et examine bien ce qui pourra en résulter pour toi.

23. *Tongkol hindi magaling ay dapat mong ligtasan.*
Toute tâche qui n'est pas bonne, tu dois l'éviter.

24. *Kailànman houag kang makiki pagloupongloupong sa manĝa walang ginagawâ.*
Ne te mets jamais en la compagnie des gens oisifs.

25. *Ang tawòng mabalinouin houag paniwalâan.*
A l'homme changeant ne donne pas ta confiance.

26. *Ang sariling pinamamahayan nang kamahalan, ay ang kaloulouа, at ang kaniyang ipinangyàyari; datapouâ, t, sa manĝa kaloulouang malinis lámang.*
La noblesse réside dans l'âme et dans ses facultés, mais seulement dans les âmes honnêtes.

27. *Ang karounongan ang tounay na nakapagpapamahal sa tàwo; hindi ang kayamánan kahit gaano ang pagka dakila.*
C'est la sagesse qui ennoblit réellement l'homme; ce n'est pas la richesse si grande qu'elle soit.

28. *Bago ka goumawâ nang anoman ay dapat ka mounang magousisang magaling; kapag ang pagousisa, i, nawalâ ang lahat ay masisirâ.*
Avant de faire quoi que ce soit, tu dois d'abord te bien informer; faute d'examen tout est détruit.

29. *Ang panahon ay loubhang mahal, dili mo soukat pabaya ang makaraàn.*
Le temps est très précieux, tu ne dois pas le laisser passer.

30. *Ang pagkakasondo nang loòb, ay siyang ikinagagaling nang lahat nang bagay.*
L'uniformité des volontés est cause de bonne réussite en toutes choses.

31. *Houag kang magbigay dahilan, na hamakin ka nang iba.*
Ne donne pas motif aux autres de te mépriser.

32. *Tongkol hindi magaling houag mong ipahayag.*
Une chose qui n'est pas bonne, ne la publie pas.

33. *Nananagipos mandin ang bouhay nang tawo.*
La vie de l'homme s'en va se consumant peu à peu.

34. *Loubhang dapat pintohouin ang Dios kay sa manĝa tawo.*
Il vaut mieux obéir à Dieu qu'aux hommes.

35. *Houag kang mamintohô sa masasang gawi nang loob mo, ó nang manĝa kaibigan mo.*
N'obéis pas aux mauvaises inclinations de ta volonté ou de tes goûts.

36. *Dapat ikapipi nang dila mo ang di magaling na wikâ.*
Ta langue doit être muette plutôt que de dire des paroles inconvenantes.

37. *Houag kang makialam sa hindi maboubouting tawo.*
Ne fréquente pas de mauvaises personnes.

38. *Houag kang koukouhang hàtol sa nagdoudounondounongan lamang.*
Ne prends pas conseil de gens faisant les entendus.

39. *Pawiin mo sa loob mo tongkol masama.*
Efface de ton cœur tout ce qui est mauvais.

40. *Houag kang poumayag sa lahat nang ikapapahamak nang iba.*
Garde-toi de te prêter à ce qui peut faire advenir du mal aux autres.

41. *Ang salapi ay hindi nakababanal sa tawo.*
L'argent ne fait pas l'homme vertueux.

42. *Ilagan mo ang manĝa bagay na ikapagkakamit mo nang sisi.*
Fuis les choses pour lesquelles tu pourrais recevoir un blâme.

43. *Houag mong itaboy ang kasalanan mo sa iba.*
N'attribue pas à autrui tes propres fautes.

44. *Sa mata at bait nang marounong ay walang soukat matagô.*
Rien ne peut demeurer caché à la vue et à l'entendement du sage.

45. *Ang katamasaha, i, walang kaboulouhan.*
L'abondance et les plaisirs de la table ne sont pas choses utiles.

46. *Ang tapang na walang katouiran, ay loubhang mapanĝanib.*
La valeur sans la justice est dangereuse.

47. *Magaling pa ang toumahimik sa manĝousap nang walang toto.*
Mieux vaut se taire que de parler à tort et à travers.

48. *Touparin mo ang pangako mo.*
Accomplis ce que tu as promis.

49. *Oumaliou ka sa nalouloumbay.*
Donne consolation à celui qui est affligé.

50. *Inĝatan mo ang aral sa iyo nang iyong ama.*
Observe les instructions de ton père.

51. *Isang kahaláyan sa pagkain ang houmouthot, at houmimod nang bouto.*
Il est malséant, quand on mange, de sucer et de lécher les noyaux.

52. *Houag mong papayágan kailanmang makapasok sa pousou mo ang masamang isip at panimdim.*
Garde-toi de laisser pénétrer dans ton cœur les mauvaises pensées et imaginations.

53. *Mapagbiaya kounouâ ang paham na magdarayâ.*
Le trompeur prend l'apparence d'un homme généreux.

54. *Dapat nating pagtanoungan ang sinomang matandang mabait, at marami siyang námasdan.*
Nous devons prendre conseil auprès d'un vieillard prudent, pour acquérir de l'expérience.

55. *Houag kayong boumoungkal nang lihim.*
Ne découvre pas ce qui est caché.

56. *Houag mong ipagkailâ ang katotohanan.*
Ne nie pas la vérité.

57. *Dapat hanĝarin ang kaloubàyan sa panĝoungousap.*
Dans la façon de parler on doit être doux et agréable.

58. *Ang pagkakaukoloukol nang manĝa bigay, ay nakaloulougod sa tinĝin.*
La proportion que gardent les choses plaît à la vue.

59. *Mahalay ang magpaoupa sa isang gawang walang kabolohan.*
C'est chose inconvenante de toucher un intérêt pour une bagatelle.

60. *Ang bouhay natin dito sa loupâ ay pagbouboundu riǹ toui na.*
Notre vie sur la terre est une lutte continuelle.

61. *Houag mong ipahamak ang kapowa mo tawo sa manĝa bintang.*
Ne porte pas préjudice à ton prochain par des faussetés.

62. *Nananalig ako sa Dios, ang nananalig sa tawo, i, malilinlang.*
J'espère et je me confie en Dieu; celui qui espère et se confie en l'homme sera confondu.

63. *Papanatilihin mo ang anak mo sa magaling.*
Fais que ton fils s'habitue au bien.

64. *Houag mong hayaang panibouloushin nang manĝa anak mo ang kanilang sariling loob.*
Ne permets pas que tes fils suivent leur propre volonté.

65. *Tongkol bagay na hindi magaling, ay houag mong ipakikiousap kanginoman.*
Ne sollicite de personne des choses qui ne sont pas bonnes.

66. *Houag mong parahan ang masàmang asal.*
N'imite pas les mauvaises mœurs.

67. *Houag kang magpaparali at koukouhang hatol sa hindi marounong.*
Ne te montre pas et ne demande pas à paraître devant ceux qui ne sont pas vraiment sages.

68. *An sampoong outos nang Dios, ay siyang totoong paralouman sa pagparoon sa Langit.*
Le décalogue est l'aiguille aimantée véritable et sûre pour aller au Ciel.

69. *Ang masamang pinagkaratihan ay siyang ikinapapahamak.*
L'obstination est cause de la perdition.

70. *Ang pamimilit sa manĝa babae, ay hindi sa tawo koundi sa hayop.*
Violenter les femmes, ce n'est pas d'un homme mais d'une bête brute.

71. *Hindi mo mapagbabahalaan tongkol aring poulot.*
De chose trouvée tu ne peux disposer.

72. *Dapat mong malaman koun sinosino ang dapat mong igalang na pagpougayan.*
Il te faut savoir quelles sont les personnes que tu dois saluer en ôtant ton chapeau.

73. *Houag kang soumabi nang mahalay.*
Ne nomme pas les choses indécentes.

74. *Houag kang magalis sa bibig nang iba nang kaniyang sabi.*
N'ôte pas de la bouche des autres leurs paroles.

75. *Nagpapatouloy ang maawain sa doumaraan.*
Accueille et héberge le voyageur qui passe.

76. *Pinadarati nang Dios ang sangkaloupaan.*
Dieu a fait l'univers stable et durable.

77. *Bayaran mo ang dayang ginawa mo.*
Paye le dommage que tu as fait.

78. *Houag kang didilhay sa harap nang iba, t, mahalay.*
Ne rote pas devant les autres; c'est chose inconvenante.

79. *Mahalay sa tingin ang pagdila, ò paghimod sa manga daliri, ó sa pingan kayâ.*
C'est une chose tout-à-fait inconvenante de lécher ses doigts ou les plats, quand on mange.

80. *Tongkol masamâ ay dapat mong limoutin.*
Toute chose mauvaise, tu dois l'oublier.

81. *Walang nalilingid sa Dios, at ang nakikita niya, ay ang kaibouiboutouran nang pousou.*
Rien n'est caché à Dieu, parce qu'il sonde et voit ce qu'il y a de plus caché dans les cœurs.

82. *Houag mong ilingid ang katotohanan.*
Ne cache pas la vérité.

83. *Walang hanĝan ang kalouloua nang tawo.*
L'âme de l'homme n'a pas de fin.

84. *Houag mong daanin sa lakas ang manĝa doukha sa pagaalis nang ganang kanilà.*
Ne foule pas les pauvres en leur prenant de force ce qui est à eux.

85. *Loumayò ka sa manga hindi makaaaral sa iyo nang magaling.*
Éloigne-toi de ceux qui ne peuvent pas te donner de bons conseils.

86. *Tongkol hindi magaling ay dapat mong ligtasan.*
Tu dois éviter tout ce qui n'est pas bon.

87. *Houag kang manlibak sa kanginoman.*
Ne te moque de personne.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

TORINO — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

G. Boeris *del.*

SOMMARIO

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXV, DISP. 13ª E 14ª, 1899-900

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1900

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Maggio 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Berruti, Spezia, Camerano, Segre, Volterra, Jadanza, Guareschi e Naccari Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale della precedente adunanza che viene approvato.

Il Segretario comunica una lettera dell'Accademia delle Scienze di Berlino che ringrazia per la parte presa dalla nostra Accademia alle feste del secondo centenario della sua fondazione e annunzia l'invio d'una pubblicazione che conterrà la descrizione di quelle feste.

Il Segretario presenta tre opuscoli del Socio straniero Ernesto Haeckel, la biografia di Sophus Lie scritta dal Socio corrispondente Noether e una memoria del Socio corrispondente Fiorini.

Il Socio Spezia presenta una nota intitolata: *Contribuzioni di geologia chimica. Solubilità del quarzo nel silicato sodico.* Sarà inserita negli *Atti*.

LETTURE

Contribuzioni di geologia chimica.
Solubilità del quarzo nelle soluzioni di silicato sodico.

Nota del Socio GIORGIO SPEZIA.

(Con una tavola).

La grande diffusione del quarzo in geodi ed in grandiose litoclasi, la corrosione che sovente si osserva nei cristalli e successiva rigenerazione e le pseudomorfosi, dimostrano come il quarzo sia anche depositato da soluzioni ricchissime di silice e che in pari tempo debba essere per speciali condizioni facilmente solubile.

Tale minerale fu estesamente studiato nei suoi caratteri morfologici e fisici, ma non camminarono di pari passo gli studi e le osservazioni su quelle proprietà, le quali possono servire a formulare probabili ipotesi sul ciclo d'evoluzione minerale della silice e la formazione del quarzo.

A chi studia i minerali non soltanto nel laboratorio esaminando cristalli staccati, ma li osserva in natura e nella loro giacitura, molti problemi si presentano, alla cui risoluzione anche ipotetica manca la base di osservazioni e di esperienze.

La chimica insegna che il sodio ed il potassio, indicati dalla mineralogia come i più diffusi fra i metalli alcalini, costituiscono i composti facilmente solubili più ricchi di silice. In pari tempo si può ammettere, che acque ricche di silicati alcalini circolino per le roccie; perchè anche ritenuto come causa iniziale l'azione di acque ricche di carbonati alcalini sulla silice idrata ovvero sul quarzo, è evidente che si costituiranno silicati alcalini, che rimarranno in determinate condizioni sciolti nelle acque.

Considerando poi la variabile composizione di cui sono suscettibili i silicati alcalini, mi parve oggetto di studio importante per la geologia chimica lo sperimentare se vi fossero solu-

zioni di essi, le quali potessero agire sul quarzo, massime che sulla solubilità di detto minerale si trovano tuttora, in trattati anche recenti di chimica, nozioni non perfettamente esatte.

Infatti, in qualcuno si può leggere che il biossido di silicio è insolubile nell' acqua ed in tutti gli acidi ad eccezione del fluoridrico e che nella potassa e nella soda calde è solubile soltanto il biossido di silicio artificiale ma non il cristallizzato; in altri che il quarzo non è attaccato da alcun solvente ad eccezione dell'acido fluoridrico.

Forse la ragione prima di tali affermazioni starà nel fatto che la solubilità a caldo di un corpo è intesa nei trattati di chimica relativa ad una temperatura non superiore ai 100°, dando valore in generale soltanto agli effetti visibili o ponderabili avuti in poche ore per tale limite di temperatura; ossia si trascura l'impiego di una più alta temperatura e di un tempo maggiore di durata dell'esperienza, cioè l'aumento dei fattori di maggiore intensità di reazione e di maggiore accumulazione di effetti.

Io presi ad esaminare l'azione delle soluzioni di silicato sodico sul quarzo, perchè da una serie di esperienze relative ad un lavoro sulla struttura ad intreccio del quarzo nelle roccie, mi persuasi che a temperature superiori ai 100° le acque contenenti anche piccola quantità di silicato sodico debbano avere una azione energica sul materiale quarzoso.

Le presenti esperienze sulla solubilità del quarzo nel silicato sodico in soluzione acquosa, furono parimenti eseguite su lastre e prismetti di quarzo, come quelle che io già pubblicai (1), in cui il solvente era l'acqua sola. Per lo scopo delle mie esperienze ritengo tale metodo di risultato più esatto che non quello di far uso del quarzo ridotto in polvere; massime che la maggiore velocità di soluzione che si ha collo stato polverulento si può sempre compensare colla maggior durata dell'esperienza.

Nelle presenti ricerche sulla solubilità ad alta temperatura furono, come in altre congeneri da me eseguite, adoperati recipienti d'argento posti in altri d'acciaio con chiusura ermetica.

Una prima esperienza ebbe per fine di sapere quale concentrazione di soluzione fosse necessaria per ottenere effetti ben evidenti e di assicurarmi se, come supponevo, il quarzo presen-

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXIII, pag. 289.

tasse due direzioni di solubilità diversa, anche rispetto all'azione solvente del silicato sodico.

Con tale sale cristallizzato preparai una soluzione, la quale da un'analisi risultava composta su 100 parti in peso di 1,45 di Na^2O e 1,37 di SiO^2 ossia si può ritenere che contenesse 2,82 % del silicato Na^2SiO^3.

Quindi approntai due lastrine rettangolari di quarzo; una tagliata parallelamente all'asse di simmetria aveva il peso di gr. 0,8320 con un'area parallela all'asse di 298 mmq. e normale all'asse di 42 mmq.; l'altra lastra tagliata normalmente all'asse aveva il peso di gr. 0,8332 con un'area normale all'asse di 281 mmq. e parallela di 60.

Entrambe le lastre furono poste nello stesso recipiente d'argento, immerse nello strato superiore del liquido costituito dalla suindicata soluzione e mantenute per 24 ore alla temperatura da 290° a 310°. Finita l'esperienza e ripesate le lastre trovai, che quella parallela all'asse aveva perduto gr. 0,2012 di peso e l'altra normale di gr. 0,2714.

Ambedue poi avevano profonde figure di corrosione.

Da questa esperienza risulta la differenza di solubilità fra le due direzioni e più di tutto importante appare l'energica azione del solvente sul quarzo. E se si volesse esprimere tale grande solubilità del quarzo in profondità media di erosione, confrontando l'area complessiva delle due lastre colla somma delle loro perdite in peso, si avrebbe che, nelle indicate condizioni di temperatura, tempo e concentrazione di soluzione, la profondità di erosione nella superficie di quarzo esposta all'azione del solvente, sarebbe stata di millimetri 0,26 in 24 ore!

Nel recipiente d'argento sia in fondo sia sulle pareti, vi era un deposito di grumi biancastri di silice in parte isotropi ed in parte con granuli anisotropi.

Considerata la grande azione del solvente ne preparai una soluzione più diluita, la quale conteneva su 100 parti in peso 0,83 del silicato Na^2SiO^3.

Con detta soluzione feci una prima esperienza, direi qualitativa, con un cristallo di quarzo di Carrara limpido e rotto da un capo, ma dall'altro completo e colle faccie dei romboedri perfettamente liscie; soltanto sulle faccie del prisma erano appena visibili colla lente le traccie delle consuete strie.

Tale cristallo fu mantenuto nella suindicata soluzione alla temperatura da 290° a 310° per 24 ore; dopo l'esperienza si presentava corroso e coll'aspetto rappresentato dalla fig. 1 coll'ingrandimento di 4 diametri. In detto cristallo, ed in altro pure di Carrara sottoposto ad eguale trattamento, comparvero per la corrosione le faccie dell'emiprisma $10\bar{1}$ come già ottenne Molengraaff (1) con soluzioni di carbonato alcalino.

Una seconda esperienza con la stessa soluzione fu eseguita sopra una lastrina di quarzo, la quale aveva il peso di gr. 1,6218 ed era tagliata colle faccie maggiori parallele all'asse di simmetria; perciò presentava una superficie di minima solubilità di 495 millimetri quadrati ed una superficie di massima solubilità di $72^{mmq.}$, normale cioè all'asse.

S'intende che la lastra nel recipiente d'argento era, con un sostegno dello stesso metallo, tenuta nello strato superiore del liquido, onde evitare una possibile saturazione di questo intorno ad essa.

Tale lastra mantenuta per 38 ore alla temperatura da 290° a 310° perdette in peso gr. 0,0346 e sulle faccie si produssero belle figure di corrosione. Nel recipiente d'argento sulle pareti inferiori vi era traccia di deposito siliceo. Siccome il recipiente conteneva 46 gr. di soluzione, la composizione di questa dovette per la quantità di quarzo disciolta diventare su 100 p. di 0,48 di SiO^2 e di 0,42 di Na^2O, ossia si era formato un silicato acido stabile e solubile soltanto ad alta temperatura e dal quale diminuendo questa si separava silice.

Sono esperienze che debbono essere di breve durata, per evitare che saturandosi anche gli strati superiori del liquido, ove sta la lastra di quarzo, non si depositi nuovo quarzo anche su di essa col diminuire della temperatura, impedendo per tale fatto di conoscere la vera perdita in peso.

Una prova poi, che a più bassa temperatura, di quella tenuta nelle dette esperienze, si possa in tempo relativamente breve osservare un effetto ponderabile del solvente, l'ebbi con una lastra di quarzo del peso di gr. 0,8476, avente un'area preponderante di minima solubilità. Tale lastra tenuta per

(1) " Zeit. f. Kry. Groth. ", vol. XIV, p. 173.

7 giorni alla temperatura da 145° a 160° in una soluzione contenente 0,43 °/₀ di Na^2SiO^3 perdette 4 milligrammi in peso.

Per un tentativo di ricerca sul limite del potere solvente della soluzione, corrispondente alla proporzione in essa fra SiO^2 e Na^2O ed alla temperatura, feci la prova seguente: composi una soluzione molto ricca in silice saturando a caldo una parte di quella che avevo preparata per le precedenti esperienze, con silice gelatinosa ed aggiungendo silice finchè la soluzione non fosse più limpida. Tale soluzione filtrata con doppio filtro rimaneva opalescente per silice non combinata, e analizzata conteneva su 100 parti in peso 0,65 di SiO^2 e 0,27 di Na^2O.

Con detta soluzione sperimentai una lastra di quarzo del peso di gr. 2,7286 facendo durare l'azione per 5 giorni alla temperatura di 290°-310°. Dopo l'esperienza pesata la lastra, questa aveva aumentato in peso di gr. 0,0093, e su certi spigoli al microscopio si presentava un deposito di nuovo quarzo. La soluzione poi era divenuta limpida e si erano formate delle esilissime patine silicee e quarzose.

Infine con una soluzione che aveva su 100 parti 0,53 di SiO^2 e 0,34 di Na^2O pure leggermente opalescente e nella quale avevo posta la stessa lastra che nella precedente esperienza aveva aumentato di peso, il quale era quindi di 2,7379, trovai che alla stessa temperatura di 290° e 310° in 40 ore la lastra aveva perduto soltanto 4 milligrammi del peso.

Da questa seconda esperienza, nella quale vi fu ancora traccia di azione sul quarzo, si potrebbe arguire, che una soluzione di poco più ricca in silice di quella adoperata, come p. es.: una soluzione del silicato $Na^2Si^2O^5$ non agirebbe più sul quarzo alla temperatura da 290° a 310°, salvo ad avere ancora azione a più alta temperatura.

Del resto lo stabilire quale sia la costituzione chimica di un silicato sòdico corrispondente alla temperatura nella quale diviene più ricco in silice per la sua azione sul quarzo e determinare la temperatura nella quale tale silicato rimane solubile nell' acqua non sono facili ricerche; sia per la graduale solubilità dovuta all'aumento di temperatura, sia al graduale deposito, che avviene ovunque nell' apparecchio, della silice, col diminuire della temperatura.

Ad ogni modo le poche esperienze eseguite dimostrano come

una soluzione del silicato sodico Na^2SiO^3 possa ancora sciogliere molto quarzo a seconda delle temperature; e si può asserire che coll'aumento della temperatura si formerebbero nella soluzione dei silicati sodici più acidi, ritornando essi col diminuire della temperatura ad essere più basici con separazione sia di quarzo sia di silice idrata a seconda della temperatura.

Tale risultato concorda con altre esperienze da me fatte, che cioè trattando con acqua il silicato sodico vetroso contenente il 71 $^0/_0$ di SiO^2, con temperature superiori a 250° ed in pochi giorni ottenni masse quarzose se la quantità di silicato era grande rispetto all'acqua e cristalli isolati di quarzo se la soluzione rimaneva più diluita.

A proposito del silicato sodico vetroso ricco in silice posso aggiungere, che esso servirebbe bene per le esperienze che qualcuno volesse fare sulla rigenerazione dei cristalli di quarzo.

Essendo poi sempre all'ordine del giorno in chimica ed in geologia l'argomento, se la pressione abbia nella solubilità una grande influenza, la quale sarebbe secondo alcuni anche maggiore di quella della temperatura, io credetti opportuno di eseguire altre esperienze in proposito, per riconoscere se il comportamento del quarzo rispetto alle soluzioni di silicato sodico fosse eguale a quello che io trovai rispetto all'acqua (1) cioè: che la pressione non ha influenza alcuna sulla solubilità del quarzo.

Le esperienze sugli effetti della pressione nella solubilità in generale non raggiunsero grandi pressioni e pel quarzo la massima impiegata fu quella delle mie esperienze e che era di 1850 atmosfere.

Mentre per le esperienze a secco, ossia senza la presenza di liquidi, come quelle fatte da Spring e da altri si potè andare sino al massimo di resistenza degli apparecchi.

L'esperimento sulla solubilità, massime se deve durare a lungo, trova di consueto, per pressioni superiori a 2000 atmosfere, una difficoltà sia nell'ottenere una chiusura tale del recipiente, che non si perda il liquido coll'andar del tempo, sia nella spesa per avere una buona pompa di compressione.

---

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ,, vol. XXXI, pag. 246.

Perciò io adottai ora un sistema col quale si può sperimentare la solubilità anche con la pressione di 6000 atmosfere mantenuta per molti giorni.

Basandomi sul fatto che una sostanza plastica trasmette la pressione in modo uniforme, in tutte le direzioni, talchè un vano contenente un liquido inchiuso in detta sostanza non muta di forma per la pressione, ma rimanendo perfettamente simile di forma diminuisce soltanto un poco di volume, per l'elasticità della sostanza e del liquido, ideai di fare uso di recipienti di paraffina, i quali venissero compressi entro un cilindro d'acciaio da uno stampo.

La fig. 2 rappresenta in grandezza naturale la sezione di uno degli apparecchi e spero, che la seguente descrizione sarà sufficiente per coloro i quali hanno quelle nozioni di meccanica, che unite all' attitudine manuale tecnica, servono a procurarsi un apparecchio e condurre bene un'esperienza. A è il recipiente d'acciaio forato e tenuto chiuso da un capo da un grosso tappo a vite che deve chiudere ermeticamente, B lo stampo di acciaio temperato, CC due dischi d'acciaio fra i quali sta un disco di stagno D che per la pressione completa la chiusura, E un recipiente di sottile lamina di stagno che va a contatto esatto con la parete del foro. Detto recipiente viene per l'esperienza riempito con paraffina fusa F e quando questa è raffreddata vi si scava un vano cilindrico; in tale vano si pone la soluzione H e vi si immerge il prisma di quarzo Q sostenuto da un filo di platino unito ad un coperchio di paraffina, il quale viene saldato ai bordi del vano fondendo la paraffina con uno spillone riscaldato; quindi si cola altra paraffina fusa in modo da completare il riempimento del recipiente di lamina di stagno.

Dopo tale preparazione si introduce il recipiente capovolto nell'apparecchio, come indica la figura, si pongono i dischi di acciaio con quello di stagno e lo stampo; poi il tutto si porta sotto l'azione di un torchio.

Trascorso il tempo fissato per l' esperimento, si toglie il grosso tappo a vite G ed adoperando la pressione dello stesso torchio si spinge fuori dell'apparecchio, coll'aiuto se occorre di uno stampo più lungo, il recipiente a paraffina, nel quale si esamina il risultato dell'esperienza.

Una precauzione da usare è quella di evitare che nel vano,

dove havvi il liquido, vi sia dell'aria; perchè questa comprimendosi lascierebbe diminuire lo spazio del vano ed il prisma di quarzo potrebbe andare in contatto della parete di paraffina.

Il torchio che io feci costrurre consta di una ruota a manubri che per mezzo di un ingranaggio fa girare una vite perpetua i cui giri imboccano nei denti di una ruota, la quale dà movimento alla vite di pressione, che a sua volta agisce sullo stampo con l'intermediario di un pezzo cilindrico a movimento fisso rettilineo onde non comunicare allo stampo, in causa della pressione, il movimento rotatorio della vite. Facendo girare la ruota a manubri ossia motrice si comprime lo stampo e poi sospendendo pesi ad una cordicella in fili di ferro che avvolge la circonferenza della ruota motrice, la pressione rimane continua e corrispondente al peso, meno naturalmente la perdita per gli attriti.

Essendo poi in tali congegni l'attrito grandissimo e difficile a calcolarsi, io procurai di conoscere l'effetto utile del torchio in modo diretto.

Perciò feci tagliare da una stessa sbarra di ghisa una serie di piccoli cilindri torniti di vario diametro, ed alcuni di essi furono dati al Professore Guidi, cui sono molto grato per la sua cortesia, il quale determinò la loro resistenza alla rottura nel suo laboratorio di costruzioni nella Scuola d'applicazione degli Ingegneri al Valentino.

In seguito io cercai il peso necessario da porre alla ruota motrice del torchio per produrre la rottura di altri eguali cilindri di ghisa; in tal modo ebbi l'effetto utile del torchio e potei stabilire con molta approssimazione la pressione che dovevo avere a seconda del peso. Con 120 kilog. avevo la pressione di 30 tonnellate, sufficiente per le esperienze con gli apparecchi a paraffina, sebbene questi richiedano un diametro dello stampo maggiore di quello che fu da altri usato per esperienze a secco.

L'impiego della paraffina serve soltanto per le esperienze a temperatura ordinaria e nelle quali il liquido che si adopera non agisca sulla paraffina; per temperatura maggiore potrebbe servire qualche metallo; inoltre l'uso di detta sostanza è anche utile per sperimentare sugli effetti di alta pressione uniforme ed in ogni senso sopra un minerale. Io già feci alcune prove sul

quarzo e sulla calcite, ed in altro scritto dirò come le mie esperienze concordano assai bene con quelle eseguite dal Pfaff sul calcare, per dimostrare molto azzardata l'ipotesi di Heim (1) che una roccia sottoposta a pressione uniforme in tutti i sensi diventi plastica.

Per l'esperienza di paragone fra l'effetto della pressione e quello della temperatura nell'azione solvente del silicato sodico, io preparai due prismi di quarzo a base rettangolare il più possibilmente di eguali dimensioni ed aventi entrambi le due facce maggiori normali all'asse di simmetria del cristallo e le quattro minori parallele ad esso; in tali condizioni i due prismi lavorati con la stessa fina smerigliatura presentavano all'azione solvente un'area complessiva di eguale solubilità.

Uno dei prismi del peso di gr. 0,8742 fu, nel modo indicato per le altre esperienze, mantenuto per 24 ore da 290° a 310°, nella stessa soluzione di silicato sodico contenente su 100 parti 0,42 di Na^2O e 0,41 di SiO^2 e la perdita in peso fu di gr. 0,0588; inoltre si formarono belle figure di corrosione e la fig. 3 rappresenta quelle sopra una superficie del prisma parallela all'asse di simmetria del quarzo.

L'altro prisma del peso di gr. 0,8768 fu posto nell'apparato a paraffina del diametro esterno di 38 millimetri e sottoposto al torchio, pel qual diametro e col peso alla ruota motrice di 120 kg. la pressione era di 2600 atmosfere. L'esperienza, s'intende, fu fatta con eguale soluzione di silicato sodico, la durata fu di 5 giorni e la temperatura del recipiente in acciaio oscillò dai 18° ai 20°. Dopo l'esperienza il prisma fu pesato ed il peso era rimasto perfettamente inalterato, la solubilità fu quindi assolutamente nulla.

Allora ripetei l'esperienza collo stesso prisma ponendolo in un altro apparato a paraffina del diametro di 25 millimetri ed è quello rappresentato in grandezza naturale dalla figura 1 già descritta. Per detto diametro e col peso di 120 kg. la pressione era di 6000 atmosfere. La durata dell'esperienza fu di 8 giorni nel qual tempo la temperatura del recipiente d'acciaio oscillò da 18° a 20°.

---

(1) " Untersuchungen über den Mechanismus der Gebirgsbildung ", vol. II, pag. 84.

Anche in questa seconda esperienza il prisma di quarzo mantenne esattamente il suo peso, e la fig. 4 rappresenta il suo aspetto identico al primitivo ossia colla superficie finamente smerigliata; mentre la fig. 3 già accennata indica come fu trasformata nel suo aspetto la superficie della faccia di eguale orientazione nel prisma sottoposto all'azione dell'alta temperatura. L'ingrandimento di entrambe le figure è di 8 diametri.

Per la scrupolosità, che deve avere uno sperimentatore nel procurare di evitare errori e per prevenire qualche obbiezione, debbo fare un'osservazione, a riguardo di una differenza di condizioni, nelle quali furono condotte l'esperienza con alta temperatura e le due eseguite sotto pressione.

I prismi di quarzo potevano come dissi ritenersi eguali e la soluzione identica, ma vi era una differenza fra il volume del prisma e quello della soluzione.

Nell'esperienza a caldo il prisma di quarzo aveva un volume di 330,7 millimetri cubi ed il recipiente d'argento, che per questa esperienza era più piccolo di quelli adoperati nelle altre, conteneva 22 centimetri cubi di soluzione.

Invece nelle esperienze sotto pressione il prisma aveva il volume quasi eguale dell'altra cioè 329,8$^{mmc.}$, ma diversa era la quantità di soluzione; perchè l'apparecchio grande di paraffina conteneva soltanto 11 centimetri cubi e quel piccolo 6.

Io ritengo tuttavia che detta differenza fra il volume del prisma e la quantità di soluzione non possa influire menomamente sul risultato dell'esperienza essendo stata la solubilità nulla.

D'altronde sè vi fosse stata una perdita di peso nel prisma di quarzo in causa della solubilità, tale perdita doveva essere proporzionale al liquido impiegato, ossia se fu di 58 milligrammi nell'esperienza ad alta temperatura doveva essere di 29 mill. nell'apparecchio grande di paraffina e di 15,7 in quel piccolo, considerando la minore quantità di solvente. Inoltre supponendo che la quantità di quarzo disciolta a caldo in 24 ore non avesse prodotta la saturazione, la perdita in peso nelle esperienze ad alta pressione doveva essere maggiore, essendo stata per esse maggiore la durata dell'esperimento.

Piuttosto un'altra obbiezione potrebbero presentare coloro pei quali la pressione è un fattore più energico della temperatura nella solubilità. È un'obbiezione alla quale spetterebbe un altro nome, ma che tuttavia conviene prevenire.

Essi potrebbero osservare che nelle mie esperienze ad alta pressione la solubilità vi fu, ma le molecole silicee non ebbero tempo di diffondersi ed allontanarsi per così dire dall'attrazione delle forze cristallogeniche e che diminuita la pressione ritornarono al loro posto non dando luogo quindi a perdita di peso nel prisma di quarzo. Rispondo che anche supposto che 8 giorni di tempo non fossero sufficienti per la diffusione, è evidente che se le molecole erano rese libere, esse dovevano disporsi secondo le leggi cristallogeniche e risanare sulle faccie del prisma le asperità e gl'incavi prodotti dalla smerigliatura. Ora il microscopio nulla rivelava di tutto ciò e da questo risulta anche il vantaggio dell'uso delle lastre o prismi in questo genere di esperienze invece della polvere.

Perciò dalle mie esperienze di confronto e da quella eseguita a più bassa temperatura, risulta che il quarzo, solubile nelle soluzioni diluite di Na^2SiO^3 già alla temperatura da 145° a 160°, rimane, nelle stesse soluzioni alla pressione di 6000 atmosfere, temperatura da 18° a 20° ed in 8 giorni di tempo, *perfettamente insolubile* come trovai che lo era nell'acqua pura alla temperatura di 25° con pressione di 1750 atmosfere per 5 mesi.

Io riaffermo tale insolubilità per togliere ogni diversa interpretazione data alle mie esperienze. Per es. Brauns (1) nel suo pregevole libro, accennando in una postilla alle mie ricerche in confronto di quelle eseguite da Pfaff (2) sull'influenza della pressione nella solubilità del quarzo nell'acqua a temperatura ordinaria, asserisce che io avrei trovato una solubilità minore di quelle indicate da Pfaff. No, io scrissi che nelle condizioni sopraindicate di temperatura, di pressione e di tempo il quarzo era perfettamente insolubile, mentre il Pfaff, con un metodo di esperienza che io dimostrai suscettibile d'errori, aveva trovato che il quarzo alla pressione di 260 atmosfere, temperatura di 18° ed in soli 4 giorni si scioglieva in ragione di una parte su 4700 parti d'acqua.

Io ritengo che i risultati delle esperienze debbano essere indicati esattamente, tanto più quando sono affatto diversi, per invogliare altri a ripeterle a vantaggio della scienza.

---

(1) " Chemische mineralogie ". Leipzig 1896, pag. 90.

(2) " Allgemeine Geologie als exacte Wissenschaft ", 1873, pag. 311.

Da queste poche ricerche riesce evidente il fatto, non privo d'interesse per la geologia, che il silicato sodico Na^2SiO^3, anche in soluzioni diluite, rimane ancora ad alta temperatura un solvente energico per il quarzo, costituendo silicati più acidi che restano in soluzione per l'alta temperatura e perciò le soluzioni di silicato sodico e per analogia anche di silicato potassico prodotto in qualsiasi modo, costituiscono un potente veicolo della silice alla profondità nella quale domina la temperatura necessaria per la solubilità del quarzo in esse.

Se, p. es., una soluzione di silicato sodico Na^2SiO^3 scorresse, supponendo che non incontrasse cause di decomposizione per reazioni chimiche, con moto ascensionale in una litoclasi attraversante roccie molto quarzifere ed alla profondità corrispondente alla temperatura di 300°, tale soluzione scioglierebbe quarzo allargando la litoclasi e poi lo depositerebbe più in alto per la diminuzione di temperatura che succede avvicinandosi alla superficie terrestre.

Ed è poi evidente che tale deposito sarebbe causato dalla diminuzione di temperatura e non già dalla diminuzione di pressione, avendo questa nessuna influenza sulla solubilità del quarzo nell'indicato solvente.

Quindi dalle mie indagini sperimentali è anche resa insostenibile, almeno pei filoni di quarzo, l'ipotesi di Sterry Hunt (1): che il riempimento dei filoni, prodotto dalle acque minerali, sia dovuto *principalmente* alla riduzione del potere solvente causata dalla diminuzione di pressione, che subiscono le acque avvicinandosi alla superficie terrestre.

(1) " Chemical and geological essays ,, pag. 204.

L'Accademico Segretario
ANDREA NACCARI.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 20 Maggio 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. BERNARDINO PEYRON
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Socii: Rossi, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Ferrero, Graf, Cipolla, Brusa, Allievo, Pizzi e Renier Segretario. — Scusano la loro assenza il Presidente Carle ed il Socio Cognetti de Martiis.

Approvasi l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 6 maggio.

Il Segretario dà lettura:

1°, di una lettera in data 30 aprile 1900, con la quale la R. Accademia delle Scienze di Berlino ringrazia della parte presa dall'Accademia torinese alle feste del secondo centenario della sua fondazione e annunzia il prossimo invio di una pubblicazione descrivente quelle feste;

2°, d'un invito della Società Archeologica di Francia a prender parte al Congresso archeologico, che si terrà a Chartres dal 27 giugno al 3 luglio 1900.

Il Socio Cipolla incaricato col Socio Ferrero di riferire intorno alla memoria del dottor Pietro Gribaudi intitolata: *Guglielmo Lungaspada marchese di Monferrato e suo figlio Baldovino V re di Gerusalemme*, legge la relazione che è inserita negli *Atti*. — La Classe approva la relazione, e udita la lettura del lavoro, ne delibera a voti unanimi l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

Costituitasi poscia la Classe in seduta privata, procede alla elezione di Soci nazionali residenti. Riescono eletti, salvo l'approvazione sovrana, il professore Gian Pietro Chironi della R. Università di Torino e il reverendissimo sacerdote professore Fedele Savio.

LETTURE

Relazione intorno alla memoria del Dr. Pietro Gribaudi: *Guglielmo Lungaspada marchese di Monferrato e suo figlio Baldovino V re di Gerusalemme.*

L'autore di questa breve Memoria tratta di un famoso marchese di Monferrato del sec. XII, cioè di Guglielmo Lungaspada, del quale nessuno erasi occupato di proposito, in una speciale monografia. Ilgen aveva trattato di Corrado, Hopf di Bonifacio, ecc., ma Guglielmo non aveva finora trovato un biografo. Assai opportunamente fece quindi il Dott. Gribaudi a prendere questo tema ad oggetto dei suoi studi.

La vita di Guglielmo va dal 1134 incirca al 1177. In Italia egli si trovò involto nella lotta dei Comuni contro Federico Barbarossa, e seguì le parti di quest'ultimo. Più tardi venne chiamato da Baldovino IV in Palestina, e vi sposò Sibilla sorella di Baldovino. Ma poco dopo morì. Suo figlio, Baldovino V, ancora bambino, venne creato re, ed opposto a Guido di Lusignano, secondo marito di Sibilla. Ebbe vita brevissima, e morì, con sospetto di veleno, nel 1186.

L'autore di questa Memoria, allarga il campo delle sue ricerche, specialmente per il periodo più importante della trattazione e collega le azioni del Lungaspada cogli eventi di Terrasanta. In questa parte lo scritto di cui ci occupiamo assume, per l'argomento trattato, un'importanza più che regionale.

Quanto al metodo con cui il lavoro è condotto, esso sembra lodevole. Molte conclusioni nuove in questo scritto forse non si troveranno; ma c'è grande diligenza e accuratezza nello spoglio e nella valutazione delle fonti, e nell'esame dei lavori critici recenti, intorno ai quali l'Autore rileva non ristretta conoscenza.

Per questi motivi, i sottoscritti non esitano a proporne la lettura alla classe.

E. Ferrero.
C. Cipolla, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Maggio 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIULIO BIZZOZERO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: BERRUTI, D'OVIDIO, MOSSO, CAMERANO, SEGRE, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA e NACCARI Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale della seduta precedente che viene approvato.

Il Socio PARONA presenta a nome del traduttore dott. Francesco VIRGILIO un opuscolo del professore E. REYER, intitolato: *Esperimenti di Geologia e di Geografia.*

Il Segretario presenta due opuscoli del Socio corrispondente Rodolfo Armando PHILIPPI: 1° *Las Tortugas chilenas;* 2° *Sobre las Serpientes de Chile.*

Il Socio SEGRE presenta due note, l'una è del Dr. Gaetano SCORZA ed ha per titolo: *Sulle curve canoniche di uno spazio lineare qualunque e sopra certi loro covarianti quartici;* l'altra del signor Francesco SEVERI ed ha per titolo: *Ricerche numerative sulle coniche secanti delle curve gobbe.*

Saranno inserite negli *Atti.*

LETTURE

Sopra le curve canoniche di uno spazio lineare qualunque e sopra certi loro covarianti quartici.

Nota di GAETANO SCORZA.

In una nota precedente (*), pubblicata in questi Atti, abbiamo dimostrato che sopra l'ente algebrico semplicemente infinito di genere p a moduli generali esistono solo $2^{p-1}(2^p+1)$ corrispondenze simmetriche (p, p) prive di coincidenze. E nel caso particolare $p=3$ abbiamo fatto osservare che, rappresentato l'ente algebrico sopra una quartica piana, le 36 corrispondenze (3, 3) simmetriche e prive di coincidenze situate sull'ente si ottengono subito considerando le 36 quartiche di cui quella data è covariante S (**). Ora è importante stabilire che un qualche cosa d'analogo vale anche pel caso di p (>3) qualunque, quando si rappresenti l'ente di genere p sopra una curva (*canonica*) di genere p e ordine $2p-2$ di S_{p-1}.

Così insieme a una nuova proprietà delle curve canoniche si ottiene anche una definizione proiettiva assai semplice delle corrispondenze in questione (***).

(*) Scorza, *Sopra le corrispondenze* (p, p) *esistenti sulle curve di genere* p *a moduli generali*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXV, 1900. Indicheremo questa Nota colla lettera N. tutte le volte che ci occorrerà citarla.

(**) Scorza, *Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali*, " Math. Ann. ", Bd. 52.

(***) Un'altra caratterizzazione di queste corrispondenze si ha rappresentando l'ente algebrico di genere p sopra una curva piana e considerando certi sistemi di curve (aggiunte) di contatto (cfr. per $p=3$: Pascal, *Sulla teoria delle funzioni σ abeliane pari a tre argomenti*, " Ann. di Mat. ", serie II, t. XVII), e noi vi abbiamo già alluso nella N. al n° 12; ma crediamo inutile insistervi e perchè immediata e perchè assai meno notevole, sembra, di quella contenuta nelle pagine seguenti.

1° Consideriamo una delle $2^{p-1}(2^p+1)$ corrispondenze simmetriche (p, p) prive di coincidenze esistenti sopra una curva d'ordine $2p-2$ e genere p, C_p^{2p-2}, dello spazio S_{p-1}, a $p-1$ dimensioni, e, per chiarezza, indichiamola con Σ. Poi diciamo *relativo* a un punto x di C_p^{2p-2} il p-gono storto che ha per vertici i p punti $y', y'' \dots y^{(p)}$ corrispondenti a x per Σ.

Si ha subito:

Se un punto y' di C_p^{2p-2} è un vertice del p-gono relativo al punto x, x è un vertice del p-gono relativo ad y', e le faccie opposte ad y' e x in questi due p-goni coincidono (*).

Infatti la corrispondenza Σ è simmetrica e i $2p-2$ punti, che si ottengono dai corrispondenti di x e y', escludendo questi punti medesimi formano un gruppo della serie canonica (**), che è tagliata su C_p^{2p-2} dagli iperpiani di S_{p-1}.

Ne segue che se per un punto di C_p^{2p-2} passa una faccia del p-gono relativo a un punto x, o x o il vertice opposto nel p-gono a quella faccia è vertice del p-gono relativo al punto considerato, e quindi:

Il sistema ∞^1 di iperpiani, Γ, costituito dalle faccie dei p-goni relativi ai punti di C_p^{2p-2} è della classe $p(p-1)$.

2° Il genere di Γ si trova subito senza alcuna difficoltà.

Osserviamo perciò che tra i punti di C_p^{2p-2} e gli iperpiani di Γ è stabilita una corrispondenza $(2, p)$, se si dicono omologhi un punto di C_p^{2p-2} e un iperpiano di Γ quando questo è una delle faccie del p-gono relativo a quello. Sopra Γ non si hanno elementi di diramazione perchè Σ è priva di coincidenze; invece il numero dei punti di diramazione di C_p^{2p-2} è dato dal numero dei punti uniti della corrispondenza che si ottiene sopra C_p^{2p-2} dicendo omologhi due punti che siano vertici di un medesimo p-gono della ∞^1. Ora questa corrispondenza è una $[p(p-1), p(p-1)]$ simmetrica di valenza $p-1$ (***), dunque possiede

(*) Si osservi che i p punti corrispondenti a x per Σ non formano *mai* un gruppo speciale (N., n° 8), quindi il p-gono relativo ad x ha sempre p faccie ben determinate.

(**) N., n° 10.

(***) In generale, dimostriamo che:

Fra due punti y' e y'' di una curva algebrica corrispondenti a un punto x in una corrispondenza (α, β) di valenza γ, esistente sulla curva, passa una corrispondenza simmetrica $[\alpha(\beta-1), \alpha(\beta-1)]$ di valenza $\alpha-\gamma^2$.

$4p(p-1)$ punti uniti, e tale è il numero dei punti di diramazione della $(2, p)$ esistenti su C_p^{2p-2}. Ne segue, applicando una ben nota formula di Zeuthen (*), che:

Il sistema Γ *è del genere* $\frac{3p(p-1)}{2}+1$ (**).

3° Siano x ed x_1 due punti qualunque di C_p^{2p-2} e siano $y', y'' \dots y^{(p)}$; $y_1', y_1'', \dots y_1^{(p)}$ i vertici dei p-goni ad essi relativi. Sappiamo (***) che i punti x ed x_1 insieme a un gruppo qualunque della serie canonica costituiscono un gruppo corresiduale al gruppo dei punti $y', y'' \dots y^{(p)}, y_1', y_1 \dots y_1^{(p)}$, dunque, rammentando che la serie doppia della serie canonica è completa ed è tagliata su C_p^{2p-2} dalle quadriche di S_{p-1} (****), si ha che un iperpiano qualunque per la retta xx_1 taglia C_p^{2p-2} in altri $2p-4$

Infatti diciamo $x_1, x_2 \dots x_\alpha$ gli α punti x corrispondenti ad y', e $y', y_i'' \dots y_i^{(\beta)}$ i β punti corrispondenti ad x_i $(i=1, 2 \dots \alpha)$, nella corrispondenza (α, β).

Detto p il genere della curva, $u_1, u_2 \dots u_p$ i p integrali normali di 1ª specie esistenti su di essa, e indicate con π_k e ρ_k $(k=1 \dots p)$ delle costanti opportune si ha (Hurwitz, *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip* „Math. Ann. „, Bd. 28):

$$u_k(y') + u_k(y_i'') + \dots + u_k(y_i^{(\beta)}) + \gamma u_k(x_i) \equiv \pi_k \qquad (k=1 \dots p;\ i=1 \dots \alpha)$$

$$u_k(x_1) + u_k(x_2) + \dots + u_k(x_\alpha) + \gamma u_k(y') \equiv \rho_k \qquad (k=1 \dots p);$$

quindi:

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha} [u_k(y_i'') + \dots + u_k(y_i^{(\beta)})] + (\alpha-\gamma^2)\, u_k(y') \equiv \alpha\pi_k - \gamma\rho_k \qquad (k=1 \dots p).$$

Ora $y_i'' \dots y_i^{(\beta)}$ $(i=1 \dots \alpha)$ sono appunto gli omologhi di y' nella detta corrispondenza $[\alpha(\beta-1), \alpha(\beta-1)]$, dunque ecc.

(*) Zeuthen, *Nouvelle démonstration des théorèmes sur des séries de points correspondants sur deux courbes*, „Math. Ann. „, Bd. 3.

(**) In particolare per $p=3$ si ha che il cosiddetto contravariante ψ di una quartica piana è di classe 6 e genere 10: quindi si scrivono subito le sue caratteristiche plückeriane. — Cfr. Ciani, *Sopra due curve invariantive della quartica piana*, „Ann. di Mat. „, t. XX, 1892.

(***) N., n° 10.

(****) Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica*, „Rendiconti del Circ. matem. di Palermo „, 1893.

punti che insieme ai punti $y' \dots y^{(p)}\ y_1' \dots y_1^{(p)}$ costituiscono la completa intersezione di C_p^{2p-2} con una quadrica. La serie tagliata su C_p^{2p-2} dagli iperpiani per la retta xx_1 è una g_{2p-4}^{p-3}, quindi per i $2p$ punti $y' \dots y^{(p)}$, $y_1' \dots y_1^{(p)}$ passano $p-2$ quadriche linearmente indipendenti fra loro e dalle $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ quadriche linearmente indipendenti, che, come è noto, passano per C_p^{2p-2}.

Si conclude che per i $2p$ punti $y' \dots y^{(p)}$, $y_1' \dots y_1^{(p)}$ passano $\infty^{\frac{p(p-3)}{2}}$ quadriche e che quindi ogni quadrica passante per $2p-1$ qualunque di essi passa anche pel rimanente.

Possiamo enunciare questo fatto dicendo che (*):

I due p-goni relativi a due punti x ed x_1 di C_p^{2p-2} sono autoreciproci per una medesima quadrica.

4° Ciò posto tagliamo C_p^{2p-2} con un iperpiano qualunque e consideriamo i p-goni relativi ai $2p-2$ punti di intersezione: le loro faccie formano una $2p(p-1)$-pla di iperpiani di Γ, che possiamo riguardare come corrispondente a quell'iperpiano: quindi la totalità ∞^{p-1}, $\gamma_{2p(p-1)}^{p-1}$, delle $2p(p-1)$-ple di iperpiani di Γ, che così si ottiene al variare dell'iperpiano secante C_p^{2p-2}, è una totalità razionale. Come tale *appartiene* (**) ad una serie lineare $g_{2p(p-1)}^r$ di Γ di dimensione $r > p-1$ (***).

Le ∞^1 $2p(p-1)$-ple di iperpiani di Γ corrispondenti agli iperpiani passanti per un S_{p-3} costituiscono nella varietà lineare $g_{2p(p-1)}^r$ una varietà quadratica, poichè un iperpiano di Γ fa parte delle due $2p(p-1)$-ple corrispondenti agli iperpiani passanti per l'S_{p-3} e per i due punti di C_p^{2p-2} aventi una faccia del relativo p-gono nel considerato iperpiano di Γ: dunque una qualunque delle ∞^r varietà ∞^{p-2} tagliate su $\gamma_{2p(p-1)}^{p-1}$ dalle varietà lineari $g_{2p(p-1)}^{r-1}$ di $g_{2p(p-1)}^r$ è rappresentata, nella rappresentazione di $\gamma_{2p(p-1)}^{p-1}$ sugli iperpiani di S_{p-1}, dagli ∞^{p-2} iperpiani di S_{p-1} tangenti a una quadrica-inviluppo. Le ∞^r quadriche-inviluppo

(*) CASTELNUOVO, *Su certi gruppi associati di punti*, "Rendic. del Circ. mat. di Palermo", 1889.

(**) Con la parola *appartenere* intendiamo significare, secondo l'uso, che la totalità $\gamma_{2p(p-1)}^{p-1}$ è contenuta nella serie lineare $g_{2p(p-1)}^r$ e non in una serie lineare di dimensione inferiore.

(***) ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*, "Rendic. del Circ. mat. di Palermo", 1896.

che così si ottengono formano naturalmente un sistema lineare e si ha $r \leq \frac{(p-1)(p+2)}{2}$, perchè tutte le quadriche-inviluppo di S_{p-1} sono appunnto $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$.

Or si consideri la $2p(p-1)$-pla di iperpiani corrispondente a un iperpiano di Γ. Essa si spezza in due $p(p-1)$-ple di iperpiani passanti rispettivamente pei due punti di C_p^{2p-2} che hanno nel considerato iperpiano di Γ una faccia dei relativi p-goni: dunque (ricordando che gli iperpiani di S_{p-1} passanti per due punti fissi costituiscono una quadrica-inviluppo $p-2$ volte specializzata) là serie lineare $g^r_{2p(p-1)}$ ha ∞^1 gruppi comuni colla serie lineare $g_{2p(p-1)}$ d'ordine $2p(p-1)$ determinata su Γ da tutte le quadriche-inviluppo di S_{p-1}.

Ma le coppie di punti di C_p^{2p-2} omologhi nella corrispondenza Σ, considerate come quadriche-inviluppo di S_{p-1} $p-2$ volte specializzate, danno una ∞^1 di quadriche *appartenente* al sistema totale $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$ delle quadriche-inviluppo di S_{p-1}, poichè altrimenti esisterebbe almeno una quadrica-luogo rispetto a cui sarebbero coniugate tutte quelle coppie (*), e i punti corrispondenti per Σ a un un punto di C_p^{2p-2} sarebbero situati almeno in un iperpiano, quindi possiamo concludere che $g^r_{2p(p-1)}$ è proprio della dimensione $r = \frac{(p-1)(p+2)}{2}$ e coincide colla serie lineare determinata su Γ da tutte le quadriche-inviluppo di S_{p-1}.

Abbiamo pertanto il teorema:

I $2p-2$ p-goni relativi ai punti di C_p^{2p-2} situati in un iperpiano sono circoscritti a una medesima quadrica di S_{p-1} (**).

5° Pel teorema ora dimostrato agli ∞^{p-1} iperpiani di S_{p-1} vengono coordinate le quadriche-inviluppo di un sistema ∞^{p-1} Λ appartenente al sistema lineare $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$ di tutte le

(*) Come è noto, in S_{p-1} ad ogni sistema lineare ∞^s di quadriche-inviluppo è *associato* un sistema lineare $\infty^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}-s-1}$ di quadriche-luogo così che ogni quadrica del primo sistema è coniugata ad ogni quadrica del secondo.

(**) Pel caso $p=3$ cfr. Ciani, *Sopra la corrispondenza polare fra coniche-inviluppo e coniche-luogo stabilita da una quartica piana*, " Rendic. della R. Accad. dei Lincei ", 1895.

quadriche-inviluppo, e la corrispondenza fra gli iperpiani di S_{p-1} e le quadriche-inviluppo di Λ (al pari di quella fra gli iperpiani di S_{p-1} e le $2p(p-1)$-ple di iperpiani di Γ considerate) è tale, che alle ∞^{p-2} quadriche di Λ contenute in un sistema lineare $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}-1}$ corrispondono gli ∞^{p-2} iperpiani di S_{p-1} tangenti a una quadrica.

Dunque il grado di Λ è 2^{p-1} e quella corrispondenza, considerati gli iperpiani di S_{p-1} come quadriche-luogo $p-1$ volte specializzate, è contenuta in una corrispondenza reciproca fra il sistema lineare di tutte le quadriche-luogo di S_{p-1} e il sistema di tutte le quadriche-inviluppo dello spazio medesimo (*).

In tale reciprocità una quadrica-luogo spezzata in un iperpiano ξ di Γ contato due volte e la quadrica-inviluppo spezzata nella relativa coppia di punti x, y' di C_p^{2p-2} si corrispondono in doppio modo. Infatti una quadrica-luogo, spezzata in un iperpiano qualunque passante per x o per y', contato due volte, e quindi coniugata alla quadrica-inviluppo spezzata nella coppia di punti x, y', ha per corrispondente una quadrica-inviluppo tangente all'iperpiano ξ, ossia coniugata alla quadrica-luogo spezzata nell'iperpiano ξ contato due volte. Ora il sistema lineare $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}-1}$ di quadriche-luogo coniugate a quella inviluppo spezzata nella coppia di punti x, y' è determinato dalle due ∞^{p-2}

(*) Per vedere questo, e il seguito, con tutta chiarezza giova riferire proiettivamente le quadriche-inviluppo e le quadriche luogo di S_{p-1} ai punti e agli iperpiani di un $S_{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$, così che un punto e un iperpiano di $S_{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$ si appartengano quando le relative quadriche di S_{p-1} sono coniugate. Allora il sistema Λ vien rappresentato da una $F_{p-1}^{2^{p-1}}$ di $S_{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$ razionale normale (che per $p=3$ coincide colla notissima *superficie di Veronese*) e il sistema degli iperpiani di S_{p-1}, considerati come quadriche-luogo $p-1$ volte specializzate, viene rappresentato da una $\Phi_{p-1}^{2^{p-1}}$ di iperpiani di $S_{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$, pure razionale normale. Le due varietà $F_{p-1}^{2^{p-1}}$ e $\Phi_{p-1}^{2^{p-1}}$ saranno riferite biunivocamente così che alle sezioni iperpiane della prima corrisponderanno nella seconda le varietà di iperpiani passanti pei varii punti di $S_{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$, quindi si corrisponderanno in una reciprocità.

(non lineari) di quadriche-luogo spezzate negli iperpiani delle due stelle x, y' contati ciascuno due volte, dunque può affermarsi, che in quella reciprocità ogni quadrica-luogo coniugata alla quadrica-inviluppo spezzata nella coppia di punti x, y' ha per quadrica-inviluppo corrispondente una quadrica coniugata a quella spezzata nell'iperpiano ξ contato due volte; ossia, può affermarsi che quelle due quadriche si corrispondono in doppio modo. Ora la varietà ∞^1 di quadriche-inviluppo costituite dalle coppie di punti omologhi di Σ *appartiene* al sistema di tutte le quadriche-inviluppo di S_{p-1}, dunque la reciprocità è involutoria, e, non potendo essere un sistema nullo, è una polarità.

Abbiamo pertanto il teorema:

La corrispondenza, che passa tra gli iperpiani di S_{p-1} *e le quadriche-inviluppo inscritte nei* p*-goni relativi alle* $2p-2$ *intersezioni degli iperpiani medesimi con la curva* C_p^{2p-2}*, è contenuta in una corrispondenza polare reciproca fra le quadriche-luogo e le quadriche-inviluppo di* S_{p-1}.

6° Dimostriamo che questa corrispondenza polare reciproca S è semplicemente una corrispondenza polare stabilita fra le quadriche-inviluppo e le quadriche-luogo di S_{p-1} da una certa forma quartica M_{p-2}^4 dello spazio medesimo.

Se $y'_1, y''_1 \dots y_1^{(p)}$ è il p-gono relativo a un punto x_1 di C_p^{2p-2}, nella corrispondenza S alle quadriche-inviluppo spezzate nelle coppie di punti $x_1\, y_1^{(i)}$ $(i=1 \dots p)$ corrispondono rispettivamente le quadriche-luogo spezzate negli iperpiani congiungenti i punti $y'_1 \dots y_1^{(i-1)}\, y_1^{(i+1)} \dots y_1^{(p)}$ contati ciascuno due volte: dunque alla ∞^{p-2} lineare delle quadriche-inviluppo spezzate nel punto fisso x_1 e in un punto variabile nell'S_{p-1} corrisponde in S la ∞^{p-1} (lineare) delle quadriche-luogo aventi un p-edro polare nel p-edro $y'_1\, y''_1 \dots y_1^{(p)}$.

La corrispondenza (omografica) che intercede fra queste due ∞^{p-1} lineari può interpretarsi come una omografia fra i punti dell'S_{p-1} e le quadriche-luogo aventi $y'_1 \dots y_1^{(p)}$ come p-edro polare, e allora, considerando una determinata (*) forma cubica

---

(*) In una determinazione parametrica dei punti di S_{p-1} mediante coordinate, $y_1 = y_2 \dots y_p$, prendiamo $y'_1 \dots y_1^{(p)}$ come vertici della piramide fondamentale (ciò che è permesso, per una osservazione precedente circa l'indi-

delle ∞^{p-1} che hanno in $y'_1 \dots y_1^{(p)}$ un p-edro polare, quella corrispondenza potrà caratterizzarsi dicendo che per essa alla quadrica- inviluppo, spezzata nel punto x_1 e in un punto variabile x di S_{p-1}, corrisponde la quadrica-luogo polare di x rispetto a quella forma cubica.

In questo modo ad ogni punto x_1 di C_p^{2p-2} vien collegata una forma cubica $M_{p-2}^{(1)}$, ed è chiaro che se ad x_1 è collegata la forma cubica $M_{p-2}^{(1)}$ e al punto x_2 la forma cubica $M_{p-2}^{(2)}$, la quadrica polare di x_1 rispetto ad $M_{p-2}^{(2)}$ è anche la quadrica polare di x_2 rispetto ad $M_{p-2}^{(1)}$. Infatti ambedue queste quadriche coincidono coll'unica che ha per p-edri polari i p-edri $y'_1\, y_1'' \dots y_1^{(p)}$ e $y'_2\, y_2'' \dots y_2^{(p)}$ relativi ad x_1 e x_2 rispettivamente.

Allora, presi p punti indipendenti di C_p^{2p-2} $x_1 \dots x_p$ e le relative forme cubiche $M_{p-2}^{(1)} \dots M_{p-2}^{(p)}$, consideriamo quella *determinata* forma quartica M_{p-2}^4 di S_{p-1} rispetto a cui $M_{p-2}^{(i)}$ è appunto la prima polare del punto x_i $(i = 1 \dots p)$, e consideriamo inoltre la corrispondenza polare S' da essa stabilita fra le quadriche-inviluppo e le quadriche-luogo di S_{p-1}. Tanto per S quanto per S', a tutte le quadriche-inviluppo spezzate nel punto fisso x_i $(i = 1 \dots p)$ e in un punto variabile dell'S_{p-1} corrisponde la medesima quadrica-luogo: ora questi p sistemi lineari ∞^{p-1} di quadriche-inviluppo *appartengono* al sistema totale delle quadriche-inviluppo di S_{p-1} dunque S ed S' coincidono e la nostra asserzione è pienamente giustificata.

Possiamo dire pertanto:

Esiste una forma quartica M_{p-2}^4 *di* S_{p-1} *tale che rispetto ad*

---

pendenza dei punti $y'_1 \dots y_1^{(p)}$): allora il sistema lineare ∞^{p-1} di quadriche-luogo in discorso è rappresentato dall'equazione:

$$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_p y_p^2 = 0, \tag{1}$$

e nell'omografia considerata, fra le quadriche del detto sistema e i punti di S_{p-1}, alla quadrica rappresentata dalla equazione (1) corrisponde un punto di coordinate $a_1\lambda_1, \dots a_p\lambda_p$, $a_1 \dots a_p$ essendo delle costanti opportune.

Allora la forma cubica:

$$\frac{1}{a_1} y_1^3 + \dots + \frac{1}{a_p} y_p^3 = 0 \tag{2}$$

è appunto quella di cui si parla nel testo.

essa ogni coppia di punti di C_p^{2p-2} *corrispondenti per* Σ *ha per quadrica polare mista un iperpiano doppio:* oppure, *tale che rispetto ad essa ogni punto di* C_p^{2p-2} *ha per prima polare una forma cubica con un p-edro polare nel p-gono relativo.*

7° Il teorema precedente coordina ad ogni C_p^{2p-2} di S_{p-1} $2^{p-1}(2^p+1)$ forme quartiche (particolari, se $p > 3$, come subito si vede con un computo di costanti): quindi si presenta spontanea la questione di trovare le relazioni che legano queste forme fra di loro. Ma tale questione, certo assai attraente, pare assai difficile a risolvere (*).

Torino, 22 maggio 1900.

(*) Recentemente essa è stata affrontata dal sig. Ciani per $p = 3$ in un caso particolare notevole. Le sue ricerche già annunziate nella Nota: *Un teorema sopra la quartica di Klein* (" Rendic. del R. Ist. Lombardo di scienze e lettere „, serie II, vol. XXXIII, 1900), usciranno prossimamente alla luce.

Ricerche sulle coniche secanti delle curve gobbe.

Nota di FRANCESCO SEVERI.

Lo scopo di queste ricerche è la determinazione di numeri relativi alle coniche plurisecanti delle curve algebriche sghembe. Dalle formole che sono contenute in questa Nota, altre ne discendono (com'è precisato al n° 10), che servono a risolvere un gran numero di problemi inerenti alle coniche secanti delle curve gobbe. In particolare al n° 9 è dato il numero delle coniche ottosecanti e al n° 10 l'ordine della superficie delle coniche 7-secanti di una data curva. Il metodo che seguiremo per compiere queste ricerche, è ispirato, nel concetto geometrico, al metodo tenuto dal CAYLEY per determinazioni di numeri relativi alle secanti multiple di una curva sghemba (*). Le difficoltà algebriche, che si presentano non lievi nella risoluzione di equazioni funzionali complicate, quali sono quelle che noi incontreremo, sono vinte con l'aiuto di un teorema generale relativo ad una classe di equazioni funzionali, teorema che ho dimostrato nella mia Dissertazione di laurea (**). Da questo metodo si distaccano peraltro, le ricerche contenute nei n^i 2, 3, 4, e se fin dalle prime determinazioni non abbiamo usato il metodo funzionale, è stato solo per stabilire un fatto geometrico, che già era ammesso relativamente agli spazî secanti di una curva (ved. le citazioni alla fine del n° 2), e che può essere utile per qualche altra ricerca. Lo strumento funzionale, nel modo da noi usato, può servire per lo studio delle proprietà

(*) Cfr. CAYLEY, *On skew surfaces, otherwise scrolls* (" Philosophical Transactions ", t. 153, pag. 413, 1863; oppure: " Collected Mathematical Papers ", t. 5, pag. 168).

(**) Essa Dissertazione sarà presentata fra pochi giorni alla Facoltà di Scienze dell'Università di Torino.

numerative delle varietà di coniche plurisecanti di curve iperspaziali, e delle varietà di coniche che hanno dati contatti con una o più curve.

È utile in questo genere di ricerche il calcolo coi simboli di condizioni, giacchè rende più sistematica e assai più concisa la trattazione. Per esso rimandiamo al libro dello SCHUBERT (*), dal quale abbiamo tratto la maggior parte delle notazioni.

1. — Denoteremo con μ la condizione (semplice) perchè una conica abbia il suo piano passante per un punto dato, e con ν la condizione (semplice) affinchè una conica si appoggi ad una retta data.

Nel seguito, per i nostri calcoli, si dovrà tener presente che tutti i prodotti simbolici che contengono μ ad esponente maggiore od uguale a 4 son nulli, la qual cosa è del resto evidente. Avremo occasione di considerare anche la condizione affinchè una conica passi per un punto dato: la denoteremo con P. Essa esprimesi in funzione di μ, ν, così:

$$P = \mu\nu - 2\mu^2 \text{ (**)}.$$

La condizione (di dimensione $k \leq 8$) affinchè una conica sia k-secante di una C^n_r (così rappresentiamo una curva d'ordine n e rango r), la denoteremo col simbolo $\alpha_k(n, r)$ *e ammetteremo che non dipenda da altri caratteri della curva, all'infuori dell'ordine e del rango.*

2. — Esprimiamo anzitutto la condizione $\alpha_2(2, 2)$ in funzione di μ e ν. In una congruenza di coniche consideriamo quelle che si appoggiano ad una conica Γ, le quali sono ∞^1. Ognuna di esse taglia il piano di Γ, all'infuori del punto d'appoggio su Γ, in un punto q, e Γ taglia il piano di essa conica, all'infuori del punto d'appoggio nominato, in un punto p. — Abbiamo così ∞^1 coppie pq, se intendiamo che due punti pq formino una coppia, quando sono ottenuti nel modo detto da una stessa conica della congruenza, secante di Γ. Il numero delle coincidenze

(*) *Kalkül der abzählenden Geometrie.* Leipzig, 1879.

(**) SCHUBERT, loc. cit., pag. 95.

che si presentano in questa ∞^1 di coppie di punti, è evidentemente uguale a $2\alpha_2(2,2)$. — Dicendo ϵ la condizione di coincidenza, p la condizione perchè una coppia pq della ∞^1 abbia il suo punto p su un dato piano, q la condizione affinchè una coppia pq abbia il suo punto q su un dato piano, g la condizione affinchè la retta g congiungente due punti d'una coppia si appoggi ad una data retta, si ha:

$$\epsilon = p + q - g \text{ (*)}.$$

Attualmente $p = 2(2\mu\nu - P) = 2\mu\nu + 4\mu^2$, $q = 2\nu^2 - 2P$, $g = 2\mu\nu$,

onde:

$$\alpha_2(2,2) = \nu^2 + 2\mu^2 - P. \quad (1)$$

L'esame della (1) ci dice che se la conica Γ degenera in una coppia di rette, fra le coniche della congruenza bisecanti di questa coppia di rette dobbiamo riguardare come limiti di coniche bisecanti di Γ prima della degenerazione, solo quelle coniche che si appoggiano complessivamente in due punti *distinti* alla coppia di rette. Si presenta allora naturalmente l'idea che questo fatto permanga anche quando si tratti, anzichè di una conica Γ, di una curva qualsiasi. E noi appunto, dopo aver giustificato la cosa in un caso tangibile, ammetteremo che *finchè si tratta di determinazioni di numeri relativi a coniche secanti di curve del nostro spazio, ad una curva d'ordine n e rango r, si possa sostituire (purchè, beninteso, il numero che si cerca rimanga finito) un insieme di n rette con $\frac{1}{2}$ r intersezioni semplici, e che le coniche di un dato sistema che sono k-secanti di essa curva prima della degenerazione, si ottengano soltanto corrispondentemente alle coniche del sistema che secano in k punti distinti complessivamente, le rette dell'insieme* (**). Diremo, per bre-

---

(*) SCHUBERT, loc. cit., pag. 44.

(**) Daremo di questa ipotesi una *giustificazione*, a cui però non attribuiamo il valore di una dimostrazione.

È noto come una curva piana d'ordine n possa degenerare in un insieme di n rette del suo piano. Ciò posto proiettiamo una curva sghemba $C^n{}_r$ da un centro determinato sopra un piano, e sia C′ la curva proiezione. Se C′ degenera con continuità in un insieme di n rette, la curva C corri-

vità, *punti dell'insieme* i punti comuni alle rette in cui si spezza una C^n_r, e *piani dell'insieme* i piani comuni alle rette medesime.

Avvertiamo subito (e, del resto, apparirà dal seguito) *che non ci sarebbe affatto necessario fare questa ipotesi;* dopo avere stabilito in maniera rigorosa la (1), noi possederemmo gli elementi sufficienti per procedere alle ricerche col solo metodo funzionale. La ipotesi fatta ci servirà solo per abbreviare i primi calcoli. Essa è identica nella sostanza a quella di cui si serve il Dott. TANTURRI per determinazioni di numeri relativi a spazî plurisecanti di una curva algebrica (*). E, col Dott. Tanturri, chiameremo *spezzamento totale* la degenerazione di una curva di ordine n e rango r, in un insieme connesso di n rette con $\frac{1}{2}r$ punti in comune. Di spezzamenti *parziali* il sig. CASTELNUOVO aveva fatto uso nello stesso argomento degli spazî plurisecanti (**).

---

spondentemente si deformerà, e al limite sarà essa pure degenerata in n rette. Ora, se la degenerazione ha avuto luogo in maniera generica, le $\binom{n}{2} - \frac{1}{2}r$ corde di C che passavano per il centro di proiezione prima dello spezzamento, saranno sempre corde della curva degenerata, e quindi fra gli $\binom{n}{2}$ punti che hanno in comune le n rette in cui la C' è spezzata, ve ne sono $\binom{n}{2} - \frac{1}{2}r$ che non sono proiezioni di punti comuni alle rette in cui ha degenerato la C. Gli altri $\frac{1}{2}r$ punti comuni alle rette che costituiscono la degenerazione di C', saranno dunque proiezioni di $\frac{1}{2}r$ punti comuni alle rette in cui la C è spezzata. Onde la curva C ha degenerato in un insieme connesso di n rette con $\frac{1}{2}r$ punti a comune. Se è possibile che una curva $C^n{}_r$ degeneri in n rette con $\frac{1}{2}r$ punti a comune, è chiaro che p. e. le coniche di una congruenza appoggiate alla curva degenerata in due punti distinti sono limiti di coniche bisecanti della curva prima della degenerazione. Se una conica della congruenza passa per uno dei punti comuni alle rette in cui si è spezzata $C^n{}_r$, essa è limite di due coniche della congruenza, ognuna delle quali passa per uno dei punti della C, che durante la degenerazione tendono al punto doppio: ossia ognuna delle coniche per un tal punto è limite di due coniche monosecanti C, e non di una conica bisecante.

(*) Cfr. TANTURRI, *Ricerche sugli spazî plurisecanti di una curva algebrica* (" Annali di Matematica ", (3), t. IV, 1900).

(**) Cfr. CASTELNUOVO, *Un'applicazione di geometria enumerativa alle curve algebriche* (" Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo ", t. III, 1889).

3. — Per esprimere $\alpha_2(n, r)$ in funzione di μ, ν, si spezzi totalmente la C_r^n. Il numero delle coniche di una congruenza che soddisfano alla condizione $a_2(n, r)$ si scinde:

a) Nel numero delle coniche della congruenza appoggiate a due rette dell'insieme in due punti distinti. Questo numero, in virtù del principio della conservazione del numero, è dato dalla differenza fra il numero $\binom{n}{2}\nu^2$ delle coniche della congruenza che si appoggiano alle coppie di rette che si possono formare con n rette date genericamente nello spazio, e il numero $\frac{1}{2}rP$ delle coniche della congruenza passanti per i punti dell'insieme.

b) Nel numero $n\mu^2$ delle coniche della congruenza che bisecano ognuna delle rette dell'insieme. Quindi:

$$(2)\quad \alpha_2(n,r)=\binom{n}{2}\nu^2+n\mu^2-\frac{1}{2}rP=\binom{n}{2}\nu^2+n\mu^2-\frac{1}{2}r\mu\nu+r\mu^2.$$

4. — Esprimiamo ora in funzione di μ, ν, la condizione $\alpha_3(n, r)$. Dopo lo spezzamento totale di C_r^n il numero delle coniche di un complesso, che soddisfano alla condizione $\alpha_3(n, r)$, si scinde:

a) Nel numero delle coniche del complesso appoggiate alle terne di rette dell'insieme, in 3 punti distinti. Questo numero è dato dalla differenza fra il numero $\binom{n}{3}\nu^3$ delle coniche del complesso appoggiate alle terne di rette che si possono formare con n rette date genericamente nello spazio, e il numero $\frac{1}{2}r(n-2)P\nu$ di quelle coniche del complesso che passano per ogni punto dell'insieme e si appoggiano ancora ad una retta dell'insieme, non per quel punto.

b) Nel numero delle coniche del complesso che bisecano una retta dell'insieme e si appoggiano ad un'altra, in punti distinti. E questo numero è dato dalla differenza fra il numero $n(n-1)\mu^2\nu$ delle coniche del complesso che soddisfarebbero alle condizioni suddette se le n rette dell'insieme fossero in posizione generica, meno il numero $rP\mu$ di quelle coniche del complesso che passano per un punto dell'insieme e si appoggiano ancora ad una delle due rette per quello. Dunque:

$$\alpha_3(n,r) = \binom{n}{3}\nu^3 - \frac{1}{2}r(n-2)\mathrm{P}\nu + n(n-1)\mu^2\nu - r\mathrm{P}\mu$$

ossia:

$$(3) \qquad \alpha_3(n,r) = \binom{n}{3}\nu^3 + \mu^2\nu\{n(n-1)+r(n-3)\} + 2r\mu^3 - \frac{1}{2}r(n-2)\mu\nu^2.$$

5. — Per esprimere la condizione $\alpha_4(n,r)$ in funzione dei simboli μ, ν, non può più servire lo spezzamento totale; giacchè spezzando totalmente la C^n_r, fra le coniche di un sistema ∞^4 che quadrisecano C dopo lo spezzamento, compariscono le coniche del sistema che giacciono sui piani dell'insieme, e di tali coniche ve ne sono infinite (*). Da questo momento quindi sarà necessario adottare un altro metodo affine di esprimere, in funzione di μ, ν, le condizioni perchè una conica sia k-secante ($k > 4$) di C^n_r. E noi useremo del metodo funzionale nella maniera seguente:

Se aggreghiamo alla nostra C^n_r una $C^{n'}_{r'}$, la condizione $\alpha_4(n+n', r+r')$ perchè una conica sia quadrisecante della curva complessiva $C^{n+n'}_{r+r'}$, è uguale alla *somma* (simbolica) delle condizioni affinchè una conica sia quadrisecante di C^n_r, o quadrisecante di $C^{n'}_{r'}$ o bisecante di C^n_r e di $C^{n'}_{r'}$, o trisecante di C^n_r e monosecante di $C^{n'}_{r'}$, o trisecante di $C^{n'}_{r'}$ e monosecante di C^n_r. Quindi abbiamo l'uguaglianza simbolica:

$$(4) \qquad \alpha_4(n+n', r+r') = \alpha_4(n,r) + \alpha_4(n',r') + \alpha_3(n,r)n'\nu + \\ + \alpha_2(n,r)\alpha_2(n',r') + \nu n\alpha_3(n',r').$$

Questa equazione fra simboli di condizione diviene un'uguaglianza fra numeri, quando si imponga alle coniche di un sistema ∞^4, di soddisfare alle condizioni che compariscono in essa. È in questo senso che la (4) può riguardarsi come un'equazione funzionale, in cui la $\alpha_4(n,r)$ comparisce quale funzione incognita. — Per risolvere questa equazione funzionale profitteremo del teorema che, come ho accennato nella introduzione a questa Nota, ho dimostrato nella mia Dissertazione di laurea.

(*) La stessa osservazione vale rispetto alle coniche k-secanti ($k > 4$) di C^n_r. In un piano dell'insieme dopo lo spezzamento di C, giacciono ∞^{k-3} coniche di un sistema ∞^k; e se fra queste ∞^{k-3} coniche consideriamo quelle che passano per i punti in cui $k-4$ rette dell'insieme non su quel piano, lo incontrano, abbiamo una ∞^1 di coniche che sono k-secanti di C.

Il teorema a cui alludiamo si enuncia nel modo seguente:

" *Se esiste una funzione che soddisfi ad un'equazione funzionale del tipo:*

$$\varphi(x_1+x'_1,.., x_n+x'_n)=\varphi(x_1,.., x_n)+\varphi(x'_1,..,x'_n)+f(x_1,.., x_n;\, x'_1,..,x'_n),$$

ove f è il simbolo d'una funzione data e gli argomenti $x_1, \ldots, x_n$, $x'_1, \ldots, x'_n$, *variano nel campo dei numeri interi e positivi (lo zero incluso), essa è della forma:*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_1^n{}_i c_i x_i + \sum_1^n{}_k \sum_1^{x_k-1}{}_i f(0, \ldots, 0, 1_k, \ldots, 0; 0, \ldots, 0, x_k - i, 0, \ldots, 0) +$$
$$+ \sum_2^n{}_i f(0, \ldots, 0, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n;\, 0, \ldots, 0, x_{i-1}, 0, \ldots, 0),$$

ove le c sono costanti arbitrarie e col simbolo 1_k *si vuole esprimere che è stato fatto* $x_k = 1$ " (*).

Profittando di questa proposizione, la (4) porge:

$$\alpha_4(n, r) = cn + c_1 r + \alpha_3(1,0)\nu \sum_1^{n-1}{}_i (n-i) + \alpha_2(1,0) \sum_1^{n-1}{}_i \alpha_2(n-i, 0) +$$
$$+ \nu \sum_1^{n-1}{}_i \alpha_3(n-i, 0) + \alpha_2(0,1) \sum_1^{r-1}{}_i \alpha_2(0, r-i) + n\nu\alpha_3(0, r) + \alpha_2(0, r)\alpha_2(n, 0),$$

ove c e c_1 sono indipendenti da n e da r. Tenendo presenti le formole (2), (3), dopo le sostituzioni e le riduzioni si ottiene:

$$\alpha_4(n, r) = \binom{n}{4}\nu^4 + \mu\nu^3\left\{nr - \frac{1}{2} r \binom{n}{2}\right\} + \mu^2\nu^2 \left\{3\binom{n}{3} + r\binom{n}{2} -\right.$$
$$\left. - 3rn + \frac{1}{4}\binom{r}{2}\right\} + \mu^3\nu\left\{\frac{3}{2} rn - \binom{r}{2}\right\} + cn + c_1 r.$$

Si osservi che

$$\alpha_4(1,0) = c = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_4(3,4) = 4c_1 - \frac{39}{2}\mu^2\nu^2 + 12\mu^3\nu + 6\mu\nu^3 = 0,$$

onde:

$$c_1 = \frac{39}{8}\mu^2\nu^2 - 3\mu^3\nu - \frac{3}{2}\mu\nu^3.$$

(*) Le condizioni per l'esistenza d'una funzione soddisfacente ad una equazione funzionale del tipo considerato, sono relative alla natura della funzione f, ma non ci è necessario tener conto di esse condizioni, perchè *a priori* si può affermare l'esistenza di una funzione che soddisfi le equazioni che noi consideriamo, a causa della loro interpretazione geometrica.

Quindi sostituendo:

$$(5)\quad \alpha_4(n,r = \binom{n}{4}\nu^4 + \mu\nu^3\left\{nr - \frac{1}{2}r\binom{n}{2} - \frac{3}{2}r\right\} + \mu^2\nu^2\left\{3\binom{n}{3} + \right.$$

$$\left. + r\binom{n}{2} - 3rn + \frac{1}{4}\binom{r}{2} + \frac{39}{8}r\right\} + \mu^3\nu\left\{\frac{3}{2}rn - \binom{r}{2} - 3r\right\}.$$

6. — Vogliamo ora esprimere in funzione dei simboli μ, ν, la condizione $\alpha_5(n, r)$. Aggregando, come prima, alla C_r^n una $C_{r'}^{n'}$ e considerando la condizione $\alpha_5(n + n', r + r')$, perchè una conica sia 5-secante della curva complessiva $C_{r+r'}^{n+n'}$, si ha che:

$$\alpha_5(n + n', r + r') = \alpha_5(n, r) + \alpha_5(n', r') + n'\nu\alpha_4(n,r) +$$

$$+ \alpha_2(n', r')\,\alpha_3(n, r) + \alpha_3(n', r')\,\alpha_2(n, r) + n\nu\alpha_4(n', r'),$$

dalla quale, applicando il teorema enunciato al n° precedente, si trae:

$$\alpha_5(n, r) = cn + c_1 r + \nu\alpha_4(1,0)\sum_1^{n-1}{}_i(n - i) + \alpha_3(1,0)\sum_1^{n-1}{}_i\alpha_2(n-i,0) +$$

$$+ \alpha_2(1, 0)\sum_1^{n-1}{}_i\alpha_3(n - i,0) + \nu\sum_1^{n-1}{}_i\alpha_4(n - i, 0) +$$

$$+ \alpha_3(0, 1)\sum_1^{r-1}{}_i\alpha_2(0, r - i) + \alpha_2(0,1)\sum_1^{r-1}{}_i\alpha_3(0, r - i) + n\nu\alpha_4(0, r) +$$

$$+ \alpha_3(0, r)\,\alpha_2(n, 0) + \alpha_2(0, r)\,\alpha_3(n, 0).$$

Tenendo presenti le formole (2), (3), (5), dopo le sostituzioni e riduzioni si ottiene:

$$\alpha_5(n,r) = cn + c_1 r + \binom{n}{5}\nu^5 + \mu\nu^4\left\{r\binom{n}{2} - \frac{1}{2}r\binom{n}{3} - \frac{3}{2}rn\right\} +$$

$$+ \mu^2\nu^3\left\{4\binom{n}{4} - \binom{r}{2} - 3r\binom{n}{2} + r\binom{n}{3} + \frac{1}{4}n\binom{r}{2} + \frac{39}{8}rn\right\} +$$

$$+ \mu^3\nu^2\left\{5\binom{r}{2} + r\binom{n}{2} - n\binom{r}{2} - 2rn\right\}.$$

Evidentemente si ha:

$$\alpha_5(3,4)=0=3c+4c_1+25\mu^2\nu^3-8\mu\nu^4$$

$$\alpha_5(4,6)=0=4c+6c_1+37\mu^2\nu^3-12\mu\nu^4+3\mu^3\nu^2,$$

dalle quali si trae:

$$c=6\mu^3\nu^2-\mu^2\nu^3,\qquad c_1=2\mu\nu^4-\frac{9}{2}\mu^3\nu^2-\frac{11}{2}\mu^2\nu^3.$$

Quindi:

$$(6)\quad \alpha_5(n,r)=\binom{n}{5}\nu^5+\mu\nu^4\left\{r\binom{n}{2}-\frac{1}{2}r\binom{n}{3}-\frac{3}{2}rn+2r\right\}+$$
$$+\mu^2\nu^3\left\{4\binom{n}{4}-\binom{r}{2}-3r\binom{n}{2}+r\binom{n}{3}+\frac{1}{4}n\binom{r}{2}+\frac{39}{8}rn-\right.$$
$$\left.-n-\frac{11}{2}r\right\}+\mu^3\nu^2\left\{5\binom{r}{2}+r\binom{n}{2}-n\binom{r}{2}-2rn+6n-\frac{9}{2}r\right\}\ (*).$$

7. — La condizione $\alpha_6(n,r)$ soddisfa all'equazione funzionale:

$$\alpha_6(n+n',\,r+r')=\alpha_6(n,r)+\alpha_6(n',r')+n'\nu\alpha_5(n,r)+$$
$$+\alpha_2(n',r')\alpha_4(n,r)+\alpha_3(n',r')\alpha_3(n,r)+\alpha_4(n',r')\alpha_2(n,r)+n\nu\alpha_5(n',r'),$$

(*) Per la verifica dei calcoli algebrici si osservi che è, come deve essere, $\alpha_5(4,8)=0$. Inoltre $\alpha_5(5,8)\nu^5=54$, la quale ci dice che: *Vi sono 54 coniche cinquesecanti di una quintica razionale appoggiate a 3 rette generiche dello spazio,* proposizione che trovasi nella Memoria del Prof. Bertini: *Sulle curve gobbe razionali del 5° ordine* (" Collectanea Mathematica ", 1881, pag. 321). — La (6) moltiplicata simbolicamente per $\mu^2\nu$ dà l'ordine della superficie delle coniche bisecanti di una data retta e 5-secanti di una C_r^n. Precisamente quest'ordine è espresso da:

$$\alpha_5(n,r)\mu^2\nu=8\binom{n}{5}-\frac{1}{2}r\binom{n-2}{3},$$

o, introducendo il genere p della C_r^n, da:

$$\alpha_5(n,2(n+p-1))\mu^2\nu=8\binom{n}{5}-(n+p-1)\binom{n-2}{3}.$$

Per $n=5$ si ritrova la proposizione enunciata dal sig. Castelnuovo al n° 10 della Memoria: *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie algebrica* (" Ann. di Matem. ", (2), XXV, 1897).

dalla quale si trae:

$$\alpha_6(n,r) = cn + c_1 r + \nu\alpha_5(1,0)\sum_{1}^{n-1}{}_i(n-i) + \alpha_4(1,0)\sum_{1}^{n-1}\alpha_2(n-i,0) +$$

$$+ \alpha_3(1,0)\sum_{1}^{n-1}\alpha_3(n-i,0) + \alpha_2(1,0)\sum_{1}^{n-1}\alpha_4(n-i,0) + \nu\sum_{1}^{n-1}\alpha_5(n-i,0) +$$

$$+ \alpha_4(0,1)\sum_{1}^{r-1}\alpha_2(0,r-i) + \alpha_3(0,1)\sum_{1}^{r-1}\alpha_3(0,r-i) + \alpha_2(0,1)\sum_{1}^{r-1}\alpha_4(0,r-i) +$$

$$+ n\nu\alpha_5(0,r) + \alpha_4(0,r)\alpha_2(n,0) + \alpha_3(0,r)\alpha_3(n,0) + \alpha_2(0,r)\alpha_4(n,0).$$

Tenendo presenti le formole (2), (3), (5), (6), dopo le sostituzioni e i calcoli algebrici, si ottiene:

$$\alpha_6(n,r) = cn + c_1 r +$$

$$+ \binom{n}{6}\nu^6 + \mu\nu^5\left\{ r\binom{n}{3} - \frac{1}{2}r\binom{n}{4} - \frac{3}{2}r\binom{n}{2} + 2rn \right\} +$$

$$+ \mu^2\nu^4\left\{ 5\binom{n}{5} - 2\binom{n}{2} + \frac{5}{2}\binom{r}{2} + r\binom{n}{4} - 3r\binom{n}{3} + \frac{1}{4}\binom{n}{2}\binom{r}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{39}{8}r\binom{n}{2} - n\binom{r}{2} - \frac{11}{2}rn \right\} +$$

$$+ \mu^2\nu^3\left\{ 12\binom{n}{2} - \frac{111}{8}\binom{r}{2} - \frac{1}{8}\binom{r}{3} + \frac{1}{2}r\binom{n}{3} - r\binom{n}{2} - \right.$$

$$\left. - \binom{n}{2}\binom{r}{2} - 6nr + 5n\binom{r}{2} \right\}.$$

Per determinare c e c_1, si osservi che:

$$\alpha_6(3,4) = 0 = 3c + 4c_1 + 10\mu\nu^5 - 24\mu^2\nu^4 - \frac{231}{4}\mu^3\nu^3$$

$$\alpha_6(4,6) = 0 = 4c + 6c_1 + 15\mu\nu^5 - \frac{69}{2}\mu^2\nu^4 - \frac{773}{8}\mu^3\nu^3,$$

donde:

$$c = 3\mu^2\nu^4 - 20\mu^3\nu^3, \qquad c_1 = \frac{15}{4}\mu^2\nu^4 + \frac{471}{16}\mu^3\nu^3 - \frac{5}{2}\mu\nu^5.$$

Quindi:

$$(7)\qquad \alpha_6(n,r)=\binom{n}{6}\nu^6+\mu\nu^5\Big\{r\binom{n}{3}-\frac{1}{2}r\binom{n}{4}-\frac{3}{2}r\binom{n}{2}+$$

$$+2rn-\frac{5}{2}r\Big\}+\mu^2\nu^4\Big\{5\binom{n}{5}-2\binom{n}{2}+\frac{5}{2}\binom{r}{2}+r\binom{n}{4}-3r\binom{n}{3}+$$

$$+\frac{1}{4}\binom{n}{2}\binom{r}{2}+\frac{39}{8}r\binom{n}{2}-n\binom{r}{2}-\frac{11}{2}rn+3n+\frac{15}{4}r\Big\}+$$

$$+\mu^3\nu^3\Big\{12\binom{n}{2}-\frac{111}{8}\binom{r}{2}-\frac{1}{8}\binom{r}{3}+\frac{1}{2}r\binom{n}{3}-r\binom{n}{2}-$$

$$-\binom{n}{2}\binom{r}{2}-6nr+5n\binom{r}{2}-20n+\frac{471}{16}r\Big\}\ (*).$$

8. — La condizione $\alpha_7(n,r)$ soddisfa all'equazione funzionale:

$$\alpha_7(n+n',r+r')=\alpha_7(n,r)+\alpha_7(n',r')+n'\nu\alpha_6(n,r)+\alpha_5(n,r)\alpha_2(n',r')+$$
$$+\alpha_4(n,r)\alpha_3(n',r')+\alpha_3(n,r)\alpha_4(n',r')+\alpha_2(n,r)\alpha_5(n',r')+n\nu\alpha_6(n',r'),$$

dalla quale si trae:

$$\alpha_7(n,r)=cn+c_1r+\nu\alpha_6(1,0)\sum_1^{n-1}(n-i)+\alpha_5(1,0)\sum_1^{n-1}\alpha_2(n-i,0)+$$
$$+\alpha_4(1,0)\sum_1^{n-1}\alpha_3(n-i,0)+\alpha_3(1,0)\sum_1^{n-1}\alpha_4(n-i,0)+\alpha_2(1,0)\sum_1^{n-1}\alpha_5(n-i,0)+$$
$$+\nu\sum_1^{n-1}\alpha_6(n-i,0)+\alpha_5(0,1)\sum_1^{r-1}\alpha_2(0,r-i)+\alpha_4(0,1)\sum_1^{r-1}\alpha_3(0,r-i)+$$
$$+\alpha_3(0,1)\sum_1^{r-1}\alpha_4(0,r-i)+\alpha_2(0,1)\sum_1^{r-1}\alpha_5(0,r-i)+n\nu\alpha_6(0,r)+$$
$$+\alpha_5(0,r)\alpha_2(n,0)+\alpha_4(0,r)\alpha_3(n,0)+\alpha_3(0,r)\alpha_4(n,0)+\alpha_2(0,r)\alpha_5(n,0).$$

Tenendo presenti le (2), (3), (5), (6), (7), dopo eseguite le sostituzioni e i calcoli si ha:

(*) Per la verifica dei calcoli algebrici si osservi che è:
$$\alpha_6(4,8)=\alpha_6(5,8)=\alpha_6(5,10)=\alpha_6(5,12)=0.$$

$$\alpha_7(n,r)=\binom{n}{7}\nu^7+\mu\nu^6\left\{r\binom{n}{4}-\frac{1}{2}r\binom{n}{5}-\frac{3}{2}r\binom{n}{3}+2r\binom{n}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{5}{2}nr\right\}+\mu^2\nu^5\left\{6\binom{n}{6}-3\binom{n}{3}+6\binom{n}{2}-5\binom{r}{2}+r\binom{n}{5}-\right.$$

$$-3r\binom{n}{4}+\frac{1}{4}\binom{n}{3}\binom{r}{2}+\frac{39}{8}r\binom{n}{3}-\binom{n}{2}\binom{r}{2}-\frac{11}{2}r\binom{n}{2}+$$

$$\left.+\frac{5}{2}n\binom{r}{2}+\frac{15}{4}rn\right\}+\mu^3\nu^4\left\{18\binom{n}{3}-40\binom{n}{2}+\frac{113}{4}\binom{r}{2}+\right.$$

$$+\frac{3}{4}\binom{r}{3}+\frac{511}{16}rn-\binom{n}{3}\binom{r}{2}-\frac{15}{2}r\binom{n}{2}+5\binom{n}{2}\binom{r}{2}-$$

$$\left.-\frac{111}{8}n\binom{r}{2}-\frac{1}{8}n\binom{r}{3}\right\}+cn+c_1r.$$

D'altronde:

$$\alpha_7(3,4)=0=3c+4c_1-12\mu\nu^6+12\mu^2\nu^5+\frac{393}{2}\mu^3\nu^4$$

$$\alpha_7(4,6)=0=4c+6c_1-18\mu\nu^6+15\mu^2\nu^5+\frac{1259}{4}\mu^3\nu^4,$$

da cui:

$$c=40\mu^3\nu^4-6\mu^2\nu^5,\qquad c_1=3\mu\nu^6+\frac{3}{2}\mu^2\nu^5-\frac{633}{8}\mu^3\nu^4.$$

E quindi:

$$(8)\qquad \alpha_7(n,r)=\binom{n}{7}\nu^7+\mu\nu^6\left\{r\binom{n}{4}-\frac{1}{2}r\binom{n}{5}-\frac{3}{2}r\binom{n}{3}+2r\binom{n}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{5}{2}rn+3r\right\}+\mu^2\nu^5\left\{6\binom{n}{6}-3\binom{n}{3}+6\binom{n}{2}-5\binom{r}{2}+r\binom{n}{5}-\right.$$

$$-3r\binom{n}{4}+\frac{1}{4}\binom{n}{3}\binom{r}{2}+\frac{39}{8}r\binom{n}{3}-\binom{n}{2}\binom{r}{2}-\frac{11}{2}r\binom{n}{2}+$$

$$\left.+\frac{5}{2}n\binom{r}{2}+\frac{15}{4}rn-6n+\frac{3}{2}r\right\}+\mu^3\nu^4\left\{18\binom{n}{3}-40\binom{n}{2}+\right.$$

$$+\frac{113}{4}\binom{r}{2}+\frac{3}{4}\binom{r}{3}+\frac{511}{16}rn-\binom{n}{3}\binom{r}{2}-\frac{15}{2}r\binom{n}{2}+$$

$$\left.+5\binom{n}{2}\binom{r}{2}-\frac{111}{8}n\binom{r}{2}-\frac{1}{8}n\binom{r}{3}+40n-\frac{633}{8}r\right\}\ (*).$$

(*) Per la verifica dei calcoli si osservi che è:

$\alpha_7(4,8)=\alpha_7(5,8)=\alpha_7(5,10)=\alpha_7(5,12)=\alpha_7(6,10)=\alpha_7(6,12)=\alpha_7(6,14)=0.$

9. — Calcoliamoci infine il numero delle coniche ottosecanti di una C^n_r. Esso soddisfa all'equazione funzionale:

$$\alpha_8(n+n',r+r')=\alpha_8(n,r)+\alpha_8(n',r')+n'\nu\alpha_7(n,r)+\alpha_6(n,r)\alpha_2(n',r')+$$
$$+\alpha_5(n,r)\,\alpha_3(n',r')+\alpha_4(n,r)\,\alpha_4(n',r')+\alpha_3(n,r)\,\alpha_5(n',r')+$$
$$+\alpha_2(n,r)\,\alpha_6(n',r')+n\nu\alpha_7(n',r'),$$

donde si trae:

$$\alpha_8(n,r)=cn+c_1r+\nu\alpha_7(1,0)\sum_1^{n-1}(n-i)+\alpha_6(1,0)\sum_1^{n-1}\alpha_2(n-i,0)+$$
$$+\alpha_5(1,0)\sum_1^{n-1}\alpha_3(n-i,0)+\alpha_4(1,0)\sum_1^{n-1}\alpha_4(n-i,0)+\alpha_3(1,0)\sum_1^{n-1}\alpha_5(n-i,0)+$$
$$+\alpha_2(1,0)\sum_1^{n-1}\alpha_6(n-i,0)+\nu\sum_1^{n-1}\alpha_7(n-i,0)+\alpha_6(0,1)\sum_1^{r-1}\alpha_2(0,r-i)+$$
$$+\alpha_5(0,1)\sum_1^{r-1}\alpha_3(0,r-i)+\alpha_4(0,1)\sum_1^{r-1}\alpha_4(0,r-i)+\alpha_3(0,1)\sum_1^{r-1}\alpha_5(0,r-i)+$$
$$+\alpha_2(0,1)\sum_1^{r-1}\alpha_6(0,r-i)+n\nu\alpha_7(0,r)+\alpha_6(0,r)\alpha_2(n,0)+\alpha_5(0,r)\alpha_3(n,0)+$$
$$+\alpha_4(0,r)\,\alpha_4(n,0)+\alpha_3(0,r)\,\alpha_5(n,0)+\alpha_2(0,r)\,\alpha_6(n,0).$$

Eseguendo i calcoli, con l' aiuto delle formole (2), (3), (5), (6), (7), (8), si ha:

$$\alpha_8(n,r)=cn+c_1r+\binom{n}{8}\nu^8+\mu\nu^7\left\{r\binom{n}{5}-\frac{1}{2}r\binom{n}{6}-\frac{3}{2}r\binom{n}{4}+\right.$$
$$\left.+2r\binom{n}{3}-\frac{5}{2}r\binom{n}{2}+3rn\right\}+\mu^2\nu^6\left\{7\binom{n}{7}-4\binom{n}{4}+9\binom{n}{3}-\right.$$
$$-12\binom{n}{2}+\frac{35}{4}\binom{r}{2}+r\binom{n}{6}-3r\binom{n}{5}+\frac{39}{8}r\binom{n}{4}+\frac{1}{4}\binom{r}{2}\binom{n}{4}-$$
$$\left.-\binom{r}{2}\binom{n}{3}-\frac{11}{2}r\binom{n}{3}+\frac{5}{2}\binom{n}{2}\binom{r}{2}+\frac{15}{4}r\binom{n}{2}-5n\binom{r}{2}+\frac{3}{2}rn\right\}+$$
$$+\mu^3\nu^5\left\{24\binom{n}{4}-60\binom{n}{3}+80\binom{n}{2}-\frac{371}{8}\binom{r}{2}-\frac{21}{8}\binom{r}{3}-\right.$$
$$-\frac{1}{2}r\binom{n}{5}+\frac{551}{16}r\binom{n}{2}-\frac{673}{8}rn+r\binom{n}{4}-\binom{r}{2}\binom{n}{4}-9r\binom{n}{3}+$$
$$\left.+5\binom{r}{2}\binom{n}{3}-\frac{111}{8}\binom{r}{2}\binom{n}{2}-\frac{1}{8}\binom{r}{3}\binom{n}{2}+\frac{113}{4}n\binom{r}{2}+\frac{3}{4}n\binom{r}{3}\right\}.$$

Dalle equazioni:

$$\alpha_8(3,4) = 0 = 3c + 4c_1 + 14\,\mu\nu^7 + \frac{31}{2}\,\mu^2\nu^6 - \frac{1779}{4}\,\mu^3\nu^5$$

$$\alpha_8(4,6) = 0 = 4c + 6c_1 + 21\mu\nu^7 + \frac{113}{4}\,\mu^2\nu^6 - \frac{5577}{8}\,\mu^3\nu^5 .$$

si trae:

$$c = 10\mu^2\nu^6 - 60\mu^3\nu^5, \qquad c_1 = \frac{2499}{16}\,\mu^3\nu^5 - \frac{91}{8}\,\mu^2\nu^6 - \frac{7}{2}\,\mu\nu^7,$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
\alpha_8(n,r) = {} & \binom{n}{8}\nu^8 + \mu\nu^7 \Big\{ r\binom{n}{5} - \frac{1}{2}\,r\binom{n}{6} - \frac{3}{2}\,r\binom{n}{4} + 2r\binom{n}{3} - \\
& - \frac{5}{2}\,r\binom{n}{2} + 3rn - \frac{7}{2}\,r \Big\} + \mu^2\nu^6 \Big\{ 7\binom{n}{7} - 4\binom{n}{4} + 9\binom{n}{3} - 12\binom{n}{2} + \\
& + \frac{35}{4}\binom{r}{2} + r\binom{n}{6} - 3r\binom{n}{5} + \frac{39}{8}\,r\binom{n}{4} + \frac{1}{4}\binom{r}{2}\binom{n}{4} - \\
& - \binom{r}{2}\binom{n}{3} - \frac{11}{2}\,r\binom{n}{3} + \frac{5}{2}\binom{n}{2}\binom{r}{2} + \frac{15}{4}\,r\binom{n}{2} - 5n\binom{r}{2} + \\
& + \frac{3}{2}\,rn + 10n - \frac{91}{8}\,r \Big\} + \mu^3\nu^5 \Big\{ 24\binom{n}{4} - 60\binom{n}{3} + 80\binom{n}{2} - \\
& - \frac{371}{8}\binom{r}{2} - \frac{21}{8}\binom{r}{3} - \frac{1}{2}\,r\binom{n}{5} + \frac{551}{16}\,r\binom{n}{2} - \frac{673}{8}\,rn + r\binom{n}{4} - \\
& - \binom{r}{2}\binom{n}{4} - 9r\binom{n}{3} + 5\binom{r}{2}\binom{n}{3} - \frac{111}{8}\binom{r}{2}\binom{n}{2} - \frac{1}{8}\binom{r}{3}\binom{n}{2} + \\
& + \frac{113}{4}\,n\binom{r}{2} + \frac{3}{4}\,n\binom{r}{3} - 60n + \frac{2499}{16}\,r \Big\} .
\end{aligned}$$

Ora i numeri di coniche che soddisfano alle condizioni ν^8, $\mu\nu^7$, $\mu^3\nu^5$, $\mu^2\nu^6$ son noti: e precisamente si ha:

$$\nu^8 = 92,\ \ \mu\nu^7 = 34,\ \ \mu^2\nu^6 = 8,\ \ \mu^3\nu^5 = 1 \ \ (*).$$

(*) Cfr. Schubert, loc. cit., pag. 95. — Cfr. anche Lüroth, *Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Geraden im Raume schneiden* (Crelle, 68, 1868).

Sostituendo nella formola ottenuta questi valori numerici, dopo facili riduzioni si ottiene:

$$(9)\quad \alpha_8(n,r)=92\binom{n}{8}+56\binom{n}{7}-8\binom{n}{4}+12\binom{n}{3}-16\binom{n}{2}-9r\binom{n}{6}+$$

$$+\frac{19}{2}r\binom{n}{5}-11r\binom{n}{4}+15r\binom{n}{3}-\frac{329}{16}r\binom{n}{2}+\frac{239}{8}rn-\frac{861}{16}r+$$

$$+\binom{r}{2}\binom{n}{4}-3\binom{r}{2}\binom{n}{3}+\frac{49}{8}\binom{r}{2}\binom{n}{2}-\frac{47}{4}\binom{r}{2}n+\frac{189}{8}\binom{r}{2}-$$

$$-\frac{1}{8}\binom{r}{3}\binom{n}{2}+\frac{3}{4}\binom{r}{3}n-\frac{21}{8}\binom{r}{3}+20n \text{ (*)}.$$

10. — Le formole (2), (3), (5), (6), (7), (8), (9), *servono a calcolare il numero delle coniche che soddisfano ad ogni condizione composta con le condizioni elementari* μ, ν, P, *con un numero conveniente di condizioni* α, *e con la condizione* ρ *perchè una conica tocchi un dato piano* (**).

Così la (8) moltiplicata per ν dà l'ordine della superficie delle coniche 7-secanti di una C^n_r, e tenendo presenti i valori numerici di ν^8, $\mu\nu^7$, $\mu^2\nu^6$, $\mu^3\nu^5$, dopo facili riduzioni, si trova per quest'ordine l'espressione:

$$\alpha_7(n,r)\nu=92\binom{n}{7}+48\binom{n}{6}-6\binom{n}{3}+8\binom{n}{2}-8n-9r\binom{n}{5}+$$

$$+10r\binom{n}{4}-12r\binom{n}{3}+\frac{33}{2}r\binom{n}{2}-\frac{369}{16}rn+\frac{279}{8}r+$$

$$+\binom{r}{2}\binom{n}{3}-3\binom{r}{2}\binom{n}{2}+\frac{49}{8}\binom{r}{2}n-\frac{47}{4}\binom{r}{2}-\frac{1}{8}n\binom{r}{3}+\frac{3}{4}\binom{r}{3}.$$

La (8) medesima moltiplicata per μ dà la classe della sviluppabile dei piani che tagliano una C^n_r in 7 punti di conica. Il prodotto

---

(*) Per il controllo dei calcoli si osservi che:

$$\alpha_8(4,8)=\alpha_8(5,8)=\alpha_8(5,10)=\alpha_8(5,12)=\alpha_8(6,10)=\alpha_8(6,12)=\alpha_8(6,14)=$$
$$=\alpha_8(7,12)=\alpha_8(7,14)=\alpha_8(7,16)=0.$$

(**) Se si considera una condizione composta, in cui entri la condizione ρ, per eseguire i calcoli, occorreranno i numeri $\mu^\alpha\nu^\beta\rho^{8-\alpha-\beta}$. Essi trovansi calcolati (per es.) nel libro dello Schubert a pag. 95.

$\alpha_k(n,r)\,\alpha_i(n',r')$ $(k+i=8)$ dà il numero delle coniche k-secanti di una C_r^n che sono i-secanti di una $C_{r'}^{n'}$. Se volessimo la moltiplicità di un dato punto per la superficie luogo delle coniche passanti per esso e soddisfacenti ad una data condizione z di dimensione 5 (essendo questa condizione composta mediante alcune delle condizioni noverate), basterebbe sottrarre dal numero $z\mathrm{P}\nu$, che denota l'ordine di essa superficie, il numero $z\mathrm{P}\mu$ che esprime quante sono le coniche soddisfacenti la condizione z, passanti per il dato punto e incontranti ulteriormente una retta per quello. Ecc.

Per applicare il metodo che abbiamo seguito allo studio delle proprietà numerative delle varietà di coniche secanti di una curva di un iperspazio, occorrerà adoperare i numeri analoghi a quelli da noi usati nel n° precedente.

Essi trovansi calcolati nella Memoria di Schubert: *Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades in n Dimensionen* (" Mathematische Annalen ", Bd. 45, 1894).

Torino, maggio 1900.

L'Accademico Segretario
Andrea Naccari.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 10 Giugno 1900.

PRESIDENZA DEL PROF. BERNARDINO PEYRON

DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Rossi, Manno, Pezzi, Ferrero, Pizzi e Renier Segretario. — Il Presidente Carle scusa la propria assenza.

È letto ed approvato l'atto verbale della precedente adunanza, 20 maggio 1900.

Il Segretario presenta l'opuscolo del Socio corrispondente marchese de Nadaillac, *Trépanations préhistoriques*, Louvain, 1900.

Il Segretario comunica alla Classe che dal Consiglio di Amministrazione furono combinati due cambi cospicui di pubblicazioni, con la Biblioteca Vaticana e col R. Istituto di Studi superiori di Firenze. Entrambi questi cambi erano stati richiesti dai suddetti Istituti, e intorno al primo si era già pronunciata favorevolmente la Classe di scienze morali.

Il Socio Ferrero legge la relazione del Socio Cipolla, deputato all'esame insieme con lui, intorno alla memoria del professore Arturo Segre: *La politica sabauda con Francia e Spagna dal 1515 al 1551*. La relazione è approvata e compare negli *Atti*. Udita la lettura dello scritto del Dott. Segre, la Classe ne vota unanime l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

LETTURE

Relazione sulla Memoria del Dott. Arturo SEGRE: *La politica Sabauda con Francia e Spagna dal 1515 al 1533.*

Nei volumi delle Memorie accademiche (Serie II, vol. XLVIII, XLIX), abbiamo già altre volte accolto dotte e diligenti monografie, con cui il dott. SEGRE andava illustrando la storia piemontese del sec. XVI.

Ora egli ce ne presenta un'altra, nella quale tratta della politica di Carlo II duca di Savoia, dal 1515 al 1533, dalla successione di Francesco I a Luigi XII di Francia, fino alla morte dell'ultimo marchese di Monferrato.

Volente o nolente, Carlo II dovette dapprima mostrarsi favorevole a Francesco I, aprendo anzi alle milizie francesi l'ingresso nei suoi Stati. Più tardi, essendo morto Massimiliano I, e a questo essendo succeduto Carlo V, il duca di Savoia seguì i consigli di Claudio di Seyssel, arcivescovo di Torino, e provvide all'interesse del proprio Stato coll'accostarsi al nuovo sovrano, senza potere tuttavia opporsi direttamente ai piani del re di Francia.

Sopravvennero intanto la catastrofe di Pavia (1525) e la prigionia di Francesco I di Francia. Questo monarca ottenne non molto dopo la libertà, in seguito al trattato di Madrid, ritornando padrone del proprio regno. La fortuna imperiale non sfolgorò così, come la vittoria del 1525 avrebbe potuto far presagire. Il duca di Savoia seguì adesso una strada di mezzo. Dissimulò le offese che riceveva dal re di Francia, e studiossi di favorire quanto potesse accordare la Francia all'Impero. Infatti, dopo molte peripezie, si giunse al trattato di Cambray.

L'imperatore, con questa pace, otteneva libertà di operare in Italia. Egli pensò allora di cingere la corona imperiale; il che ebbe luogo nel 1530 a Bologna. Nel viaggio verso Bologna, Carlo V toccò Monaco e Genova, ricevendo in quest'ultimo luogo l'ossequio del principato Sabaudo. Il Duca anzi mandò a Bologna, in qualità di ambasciatore, una delle maggiori personalità del suo stato, Chiaffredo Pasero; quindi si recò egli stesso a Bologna, accompagnatovi dalla moglie, Beatrice di Portogallo. Di molte e gravi cose il Duca doveva trattare con Carlo V, e specialmente della successione nel marchesato di Monferrato.

Le dimostrazioni d'amicizia che corsero allora fra Carlo V e il Duca, fecero insospettire il re di Francia; il quale si dichiarò poi apertamente contrario al Duca, quando a questo concesse Carlo V il lungamente desiderato dominio di Asti. Perciò alla morte dell'ultimo marchese di Monferrato, Giovanni Giorgio, le aspirazioni del duca di Savoia furono recisamente contrariate dalla Francia.

Con ciò il Ducato di Savoia entrava in un periodo di grave decadenza, che da taluno si suole incolpare alla politica di neutralità preferita dal Duca. L'Autore di questa Memoria crede che l'accusa non regga, mentre al Duca riusciva impossibile seguire altra politica che non fosse quella della neutralità: secondo la sua opinione, se il Duca errò, fu nell'avere prescelto la neutralità disarmata alla neutralità armata.

Si potrebbe chiedere: poteva il Duca fare diversamente?

La Memoria del Dott. Segre è ricchissima di documenti nuovi. Quelli già conosciuti vennero qui con ogni diligenza studiati ed utilizzati. Sicchè, a parere dei sottoscritti, è questo un lavoro che reca un contributo assai importante alla conoscenza di sì fortunoso periodo della storia italiana; fortunoso periodo, che, pur essendo studiato da tanti e con tanto ardore, non cessa dal presentare ancora molti punti oscuri, e meritevoli di dilucidazione.

Forse a qualcuno potrà sembrare che qualche volta l'erudito prenda la mano allo storico. Ma se anche non tutte le figure di cui il Dott. Segre discorre, riescono egualmente vivificate dinanzi agli occhi del lettore, pur sempre sentiamo, nel percorrere questo lavoro, allargarsi i nostri orizzonti, e vediamo ognora crescere largamente quelle cognizioni solide e documen-

tate, che sole possono avere decisiva importanza nell'oggettivo e imparziale giudizio sugli uomini politici dei tempi trascorsi.

Per tali considerazioni i sottoscritti non esitano a proporre che la bella Memoria del Dott. Segre sia letta alla Classe.

E. Ferrero.
C. Cipolla, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXV, Disp. 15ª, 1899-900

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1900

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Giugno 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ALFONSO COSSA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Berruti, D'Ovidio, Mosso, Spezia, Camerano, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti e Naccari Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale della seduta precedente, che viene approvato.

Il Presidente si rallegra, anche a nome della Classe, col Socio Spezia per il premio Reale meritamente da lui ottenuto in questi giorni dall'Accademia dei Lincei, per i suoi lavori di geologia sperimentale. Il Socio Berruti si associa al Presidente e il Socio Spezia ringrazia.

Il Segretario dà comunicazione di una lettera inviata dalla Presidenza del Congresso di Fisica che si terrà in Parigi nell'agosto, al Socio Volterra che fu dalla Classe incaricato di rappresentarla in quel Congresso. La lettera è accompagnata dall'elenco dei temi che si tratteranno nel Congresso medesimo e la Classe è invitata a mandare intorno a quei temi le osservazioni e raccomandazioni che credesse opportune.

Il Segretario presenta un volume inviato in omaggio all'Accademia dal Dr. Francesco Virgilio e intitolato: *Geomorfogenia della Provincia di Bari.*

Il Socio Camerano presenta una sua memoria intitolata: *Ricerche intorno alla variazione del Bufo vulgaris Laur.*, e ne espone l'argomento. L'inserzione della memoria nei volumi accademici viene approvata con votazione segreta.

L'Accademico Segretario
Andrea Naccari.

CLASSI UNITE

Adunanza del 24 Giugno 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Cossa, Vice Presidente dell'Accademia, Salvadori, D'Ovidio, Naccari, Camerano, Segre, Jadanza, Guidi, Fileti e Parona;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Peyron, Direttore della Classe, Rossi, Manno, Bollati di Saint-Pierre, Ferrero, Graf, Cipolla, Brusa e Renier Segretario. — Il Socio Pizzi scusa la propria assenza.

È letto ed approvato l' atto verbale dell'adunanza a Classi Unite, del 7 gennaio 1900.

Il Socio Tesoriere D'Ovidio, invitato dal Presidente, procede all' esposizione finanziaria per il passato esercizio dell'anno 1899, e presenta il bilancio preventivo dell'anno in corso. L'Accademia approva tanto il conto consuntivo, quanto il bilancio preventivo.

Approva pure i resoconti delle gestioni delle eredità Bressa, Gautieri e Vallauri; scarica il tesoriere da ogni contabilità passata e gli dà carico per l'esercizio in corso dell'anno corrente 1900.

Gli Accademici Segretari
Andrea Naccari
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 24 Giugno 1900.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Peyron, Direttore della Classe, Rossi, Manno, Bollati di Saint-Pierre, Ferrero, Graf, Cipolla, Brusa e Renier Segretario. — Il Socio Pizzi scusa la propria assenza.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 10 giugno 1900.

Il Presidente comunica i Decreti del 31 maggio ultimo scorso con cui vengono nominati Soci nazionali residenti dell'Accademia i professori Giampietro Chironi e Fedele Savio.

Il Socio Renier Segretario, presenta per l'inserzione negli *Atti*, esponendone il contenuto, una nota del professore Vittorio Cian, intitolata: *Un trattatista del Principe a tempo di Niccolò Machiavelli; Mario Salamoni.*

Si procede in adunanza privata alla elezione del Segretario della Classe per il triennio che dal 20 luglio 1900 giunge al 20 luglio 1903. Riesce rieletto il Socio Rodolfo Renier, salvo l'approvazione Sovrana.

LETTURE

Un trattatista del Principe a tempo di N. Machiavelli. Mario Salamoni.

Nota del Prof. VITTORIO CIAN.

Pochi libri furono oggetto di tanti e così svariati studî, di tante discussioni e controversie, spesso acri ed appassionate, quanto il *Principe* del Machiavelli. La famosa operetta fu esaminata punto per punto, notomizzata, illustrata nei suoi elementi costitutivi, nelle relazioni sue col tempo e con l'autore. Anche ne furono rintracciate le fonti antiche, classiche, per opera specialmente dell'Ellinger e del Burd, lodati con ragione dal Villari (1); e di fresco veniva colmata una lacuna deplorevole per opera del prof. G. Lisio, che agli studiosi ne offriva un buon testo critico, seguìto da un'eccellente edizione scolastica (2).

Ciononostante alcune questioni, siano pur secondarie, rimangono ancora o non bene sciolte o intentate; alcuni aspetti del grande opuscolo restano nell'ombra o nella penombra.

Ad esempio, ch'io sappia, non si sono ancora indagati davvicino i rapporti, se non di vera dipendenza, di analogia, di parentela storica e insieme le dissimiglianze profonde che sono fra il *Principe* machiavellico e le altre opere dello stesso genere che pullularono, specie nei secoli XV e XVI, sì da formare una vera tradizione letteraria, che, prendendo le mosse dal Medio Evo, si diffonde, ritornando all'antichità, per tutto il Rinascimento,

(1) *N. Machiavelli*², II, 283.

(2) *Il Principe di N. M. Testo critico con introduzione e note a cura di* G. Lisio, Firenze, Sansoni, 1899; l'edizione scolastica " con commento storico, filologico, stilistico ", Firenze, Sansoni, 1900, fa parte della *Biblioteca scolast. di classici ital.* diretta da G. Carducci. Per l'edizione critica mi permetto di rimandare a ciò che ne scrissi nel " Giornale stor. d. letter. ital., XXXV, 106 sg. e 158 sg.

in prodotti numerosi, ma non tutti monotoni, meschini e vuoti. L'illustre storico del Machiavelli, il Villari, di proposito deliberato s'accontentò su questo punto di pochi cenni e d'un giudizio sommario (1).

Ma in questo campo la messe, sia pure in gran parte di loglio, è copiosa. Io darò solo un breve saggio di tali ricerche, giovandomi del materiale da più tempo raccolto per istudiare i precursori del Castiglione, il cui *Cortegiano* racchiude, com'è noto, nell'ultimo libro, una specie di trattatello del principe.

***

Poco o punto noto agli studiosi è un trattato in prosa latina, *De principatu*, lasciatoci da Mario Salamoni. Dell'autore, che il Tiraboschi menziona appena e a cui il Mandosio (2) consacra una pagina, ben poco sappiamo; ma questo è sufficiente a dare un giudizio dell'uomo e ad apprezzare meglio l'opera sua.

Figlio di Giovanni, della nobile famiglia romana dei Salamoni Alberteschi (3), visse sul cadere del sec. XV e nei primi decennî del successivo. Fu quindi contemporaneo del Machiavelli, spettatore non indifferente delle vicende così diverse della Chiesa romana durante almeno sei pontificati, quelli di Innocenzo VIII, di Alessandro VI, di Giulio II, di Leone X, di Adriano VI e di Clemente VII, nella sua qualità di avvocato concistoriale potè conoscere ben davvicino uomini e cose eminenti nella storia del suo tempo.

Giureconsulto di molta fama — l'Altieri, suo amico, lo an-

---

(1) Op. ed. cit., II, 249.

(2) *Bibliotheca romana*, Roma, 1682, p. 134. Cfr. Moreni, *Bibliogr. d. Toscana*, II, 291.

(3) L'Altieri, *Li Nuptiali* pubbl. da E. Narducci, Roma, 1873, pp. 16, 115, ricorda anche un " messer Juvan Salamone delli Alberteschi " e in una rassegna delle principali famiglie romane annovera quella dei " Salamoni over fussiro Alberteschi ". Nelle edizioni del *De principatu* appare solo il nome *Salamoni* o *Salomoni;* della qual famiglia non sarebbe difficile trovare maggiori notizie nelle opere note di genealogia romana, così mss., come a stampa, del Galletti, del Jacovacci, di Cesare Magalotti e di P. E. Visconti. Ma tali indagini ho stimato inutili al mio intento. Cfr. Gregorovius, *Storia d. città di Roma*, vers. it., VI, 235, 346.

novera fra gli " egregi e singulari giuriconsulti „ di Roma (1) — fu ottimo cittadino, e dei suoi concittadini e dei pontefici godette la stima e ne ebbe vari offici (fra i quali quello di conservatore) e missioni onorevoli. Il nome suo va legato specialmente a quell'atto solenne di concordia e di pacificazione che fu celebrato in Campidoglio, nell'estate del 1511, allorquando si sparse la voce della morte imminente di papa Giulio (2).

Parecchie opere si conservano di lui, registrate malamente dal Mandosio, ma tutte di indole giuridica, da una in fuori, il *De principatu*, che ora prenderemo in esame.

Quando precisamente essa sia stata composta non sappiamo, ma alcuni accenni storici in essa contenuti (3) ci permettono di credere che sia stata scritta, almeno in parte, e compiuta negli ultimi anni del pontificato di Giulio II o nei primissimi di Leone X. A questo papa mediceo l'autore la dedicava, con una lettera, dalla quale si apprende che s'era indotto a scriverla e ad offrirla per mantenere una promessa fatta ad un personaggio, che è forse Pietro Bembo, allora segretario pontificio (4).

Ma il libro non vide la luce se non molti anni più tardi, nel 1544 ed in Roma (5), preceduto da una lettera scritta all'autore medesimo da Angelo Colocci, evidentemente suo vecchio

---

(1) Nella prima pagina, nell'esordio, quindi nel posto d'onore, dei suoi *Nuptiali* citati.

(2) Si vedano le giuste considerazioni e i documenti del Narducci, nella *Introduzione* ai *Nuptiali* da lui pubblicati (pp. vi, xii sg.). Queste considerazioni e questi documenti gettano nuova luce sull'importante avvenimento, che non fu adeguatamente apprezzato nè dal Gregorovius, nè dal Pastor.

(3) Due allusioni particolarmente notevoli ho rilevato, una (p. 72) ai cardinali scismatici raccoltisi in Concilio a Pisa (1511); l'altra (p. 84-5), alla battaglia di Ravenna (1512), come a fatti recenti.

(4) Nelle due edizioni la lettera del Salamoni incomincia con queste parole: " Pollicitatione *B. P.* spopondi hoc libro *de justo principatu* quaedam " ad te scribere „. In quelle due iniziali non saprei ravvisare altri che Pietro Bembo; ma forse fa ostacolo l'essere premesso il cognome al nome. D'altra parte per ragioni grammaticali mi sembra da escludere che quelle iniziali celino un *Beatissimi Patris.*

(5) Questa prima edizione, che è rara ed in-4°, ha il titolo sg. *M. Salamonii Patritii Romani — De Principatu libri septem*, Romae, In Vico Peregrini, 1544. L'unico esemplare a me noto, posseduto dalla Casanatense, non potei esaminarlo direttamente, non essendone permesso il prestito.

amico, il quale, per gareggiare, diceva, col Poliziano, che aveva proclamato Pico della Mirandola una fenice, quasi unico uccello che nidificasse nel lauro mediceo, esaltava il Salamoni, non come una fenice, che è uccello fantastico, ma come un'argentea oca del Campidoglio, vigilante a guardia della repubblica romana! Il complimento, a dir vero, era arrischiato e grottesco anzichè no; ma in grazia del Campidoglio e della freddura umanistica, anche quell'*oca* poteva passare.

L'opera fu ristampata l'anno 1578, in Parigi; il che parrebbe forse alquanto strano, senza due altre lettere che le vanno innanzi e che ci permettono di fare la storia di questa nuova edizione (1). Con la prima di esse, data il 4 dicembre del 1577, Antonio Vacca, giureconsulto romano, inviava ad Jacopo Corbinelli il libro del Salamoni, ch'egli diceva d'aver letto in quell'estate e tentato di correggere di molte e gravi inesattezze. Ora, così emendato, glielo spediva, perchè lo ristampasse, tanto più che esso era diventato irreperibile perfino in Roma e quel lavoro di correzione gli era riuscito assai faticoso e difficile, sebbene egli si fosse esercitato in Roma col cremonese Gabriele Faerno, già suo compagno, che in quest'arte della emendazione critica dei testi, riportava la palma su ogni altro in quel tempo (2).

Il Corbinelli, che proprio in quell'anno '77 e a Parigi aveva dato in luce per la prima volta nell'originale latino una ben altra opera, il *De vulgari eloquentia*, e che sino allora conosceva altri scritti, non questo, del Salamoni " eccellente uomo e lodato giureconsulto ", gradì l'offerta dell'amico e ristampando il libro, lo dedicava a Pomponio Beleurio (Beleure?), regio consigliere di Francia, con una lettera in data del primo di giugno 1578.

(1) Ecco il titolo del fronstispizio: *Marii Salamonii Patritii romani — De Principatu Libri VI*, Parisiis, Du Val, 1578. Le mie citazioni si riferiscono sempre a questa ristampa corretta.

(2) Non ho bisogno di dare notizie del letterato cremonese, famoso favolista e collaboratore poetico del Giovio, ma rilevo questa importante testimonianza del Vacca, il quale, scrivendo queste parole testuali: " quo nemo " aetate nostra in hoc studiorum genere diligentior ac felicior fuit ", viene a confermare esattamente il giudizio che, giovandosi anche delle notizie raccolte dal p. Vairani, espresse il Tiraboschi, secondo il quale (*Storia*, ed. Class., VII, 2062) il T. fu " uno dei più infaticabili e dei più attenti censori delle edizioni degli antichi scrittori... ". Dalla lettera medesima del Vacca si ritrae una notizia non ispregevole, cioè che il Salamone era sì di padre e di nascita romano, ma la famiglia sua era oriunda dalla Sicilia.

***

Mi guarderò bene dall'esaminare minutamente o anche dal riassumere per sommi capi quest'opera. Essa è divisa in sei libri, nell'edizione parigina da me consultata, mentre la prima romana consta di sette, ma, a quanto pare, senza sostanziali diversità di materia. È in forma di dialogo socratico, come dice l'autore; interlocutori, un filosofo, un giurista, un teologo ed uno storico, tutti anonimi. Di fare un esame od un riassunto non vale qui la pena, perchè si tratta, in gran parte, della solita materia trita e ritrita, derivata e rielaborata dalla *Politica* aristotelica, dalla *Repubblica* e dalle *Leggi* di Platone, dal *De officiis*, non senza innesti e di S. Tommaso e di S. Agostino, e con citazioni frequenti e derivazioni dalle Sacre Scritture, da S. Paolo, e dalla nota raccolta, che sotto il titolo di Mercurio Trimegisto ebbe tanta fortuna nel Rinascimento. Inoltre i modi in cui il Salamoni scioglie o si sforza di sciogliere le viete questioni attinenti i doveri del principe di fronte alle leggi, i limiti del suo potere e del suo diritto, il concetto e l'applicazione delle virtù ecc., sono, in fondo, quei medesimi che occorrono negli altri libri consimili.

Piuttosto penso di rilevare quei tratti che giovino a spiegarne meglio altri del *Principe* machiavellico, per via di analogie o di contrasti, e a rivelarci più chiaramente le condizioni dello spirito italiano sul principio del sec. XVI.

È noto quanto viva e superba coscienza avesse il Machiavelli della novità e dell'originalità della sua operetta, sovrattutto pel carattere pratico, positivo, sperimentale, per quel suo tendere alla *verità effettuale* invece che alla *immaginazione* delle cose, scostandosi così dagli *ordini* — noi diremmo *metodi* — *degli altri*, cioè dei suoi precursori, di coloro, cioè, che s'erano " immaginati repubbliche e principati, che non si sono mai visti nè conosciuti essere in vero " (Cap. xv).

In queste parole dello statista fiorentino c'è un dispregio profondo; egli non discute neppure, demolisce con una osservazione fredda, che è un colpo formidabile. Quello che ho già notato più addietro, basta a far comprendere come il Salamoni

sia un seguace della tradizione che potremo dire scolastica, presa di mira dal Machiavelli; onde il suo principe rimane una vuota astrazione, a cui non possono dar corpo nè l'erudizione, nè il buon volere, nè le ricette delle virtù consuete (1). Ciononostante, anche nel giureconsulto romano si fa sentire il bisogno di afferrarsi alla vita reale e moderna, in certe parti dei suoi ragionamenti e, più ancora, nella frequente esemplificazione storica. Anch'egli, infatti, come il Machiavelli, ci porge *esempli italiani e freschi* (Cap. xv). Ora sono allusioni vaghe, ma tutt'altro che inesplicabili, a personaggi ed avvenimenti contemporanei; ora di personaggi potenti, anche papi, o di príncipi e popoli è fatta menzione esplicita e tutt'altro che timida, come avremo occasione di vedere. È pertanto un continuo addentellato che i dialoghi del Salamoni hanno con la realtà storica; una corrente d'attualità, per dir così, che circola e penetra nelle sue pagine e che giova a dar loro una sostanza ed un interesse che altrimenti non avrebbero.

Inoltre nel *De principatu* si rivela pure quella *continua lezione delle antique cose* e quella *lunga esperienzia delle cose moderne*, onde si vantava il Machiavelli. Soltanto i due scrittori differiscono sostanzialmente nel modo di applicare quella *lezione* e quella *esperienzia*.

Il Machiavelli, nel *Principe* e più ancora nei *Discorsi*, non dissimula le tristizie e i mali del suo tempo, anzi vede e descrive le cose d'Italia come giunte ad un punto estremo di dissoluzione e di ruina. Ma mentre egli ne trae argomento a bene sperare nell'opera d'un *principe nuovo*, purchè „ prudente e virtuoso „ e degno, e vi scorge un'occasione quant'altra mai propizia e una pienezza di tempi mai stata per l'innanzi, il Salamoni tenta di reagire, invano, contro questa brutta realtà, le si ribella ed impreca. Il suo pessimismo, morale e politico, è tale da farci sospettare il solito lievito di retorica umanistica; ma a chi ben

(1) In questo, diciamo pure, *ricettario di virtù*, si colgono i maggiori contrasti fra il Machiavelli e il Salamoni. Per citare un esempio, è noto che il primo combatte, con vigore di logica paradossale (Cap. XVI) la *liberalità*, come dannosa al principe; va da sè che il secondo, seguendo le idee tradizionali, accolte dallo stesso Castiglione, consiglia invece una liberalità illuminata e misurata, e per questo appunto, efficace.

lo consideri nelle pagine tutte dell'opera e in relazione con la vita dell'autore, esso finisce con l'apparire lodevole per la sincerità sua (1).

Il Machiavelli, dal quale il fiorentino è sparito (se non, forse, in quanto egli volge le sue mire alla casa medicea) e sorge ritto e fiero il nuovo italiano, è, in fondo, un idealista, che dalle visioni dell'accesa fantasia trae sicure ma lontane profezie. Egli ama sperare ed illudersi e si lascia volentieri trasportare dall'onda irresistibile d'un sentimento patriottico, nazionale, che è vivo ed attivo, e in lui prende luce e vigore dalla bella tradizione petrarchesca. Perciò appunto i famosi versi della canzone all'Italia, gettati lì nella chiusa del suo opuscolo, fanno l'effetto d'un prezioso sigillo d' italianità impresso sull' arme del nuovo principe.

Il Salamoni invece si accascia; il suo è un patriottismo incerto e passivo, senza che per questo possa dirsi retorico. Di quando in quando si tradisce in lui il romano, preoccupato e amareggiato sovrattutto dalle sorti tristissime della città sua, ombra dolorosa della grandezza e della gloria antica, per la cui pace e per la cui salute egli s' adoprava tanto con la parola e con l'opera.

L'autore del *De principatu* vagheggia ancora quella larva di Impero romano che con Carlo V parve di lì a poco risuscitare per l'ultima volta. Seguace in questo, probabilmente senza saperlo, dell'Alighieri, e profondamente diverso dal Machiavelli, egli afferma che esso impero procedè per emanazione diretta da

(1) Dell'onesta franchezza a cui s'ispirano i sentimenti del Salamoni, abbondano le prove nel suo libro. In un luogo (lib. II, p. 63 sg.) egli deplora fortemente l'egoismo dominante al suo tempo, onde persino i principi e i sacerdoti " nihil iusti, nihil pensi, nihil recti habeant, nisi commodum ". Altrove (lib. III, p. 77) biasima con un senso altamente umanitario la pubblicità, anzi la teatralità con cui si usavano celebrare allora in Roma le esecuzioni capitali. Troppo spesso nell'aurea Roma di Leone X si adoperava la mannaia! " Horret animus dum recursat in mentem carnificina illa, quam " quotidie pro spectaculis spectamus (scrive l'A.), de exossatis per longa " supplicia, et candenti forfice excarnificatis corporibus ". Un tempo per questi terribili supplizî si sceglievano i luoghi deserti e remoti e le ore notturne, " nunc vero ipsa ac via celebri, qua in Consistorium itur, quasi " commeantibus gratum sit in crucem actorum spectaculum: non sic majores nostri, sed humaniter, clementer, religiose ".

Dio, ma il *Princeps romanus*, o imperatore, è eletto dal popolo di Roma (1). Purtroppo, i cittadini romani sono ridotti a tal punto da non essere più considerati nulla, da venire esclusi quasi da ogni officio, cosicchè, narra il Salamoni (p. 66), un suo egregio ed arguto concittadino ed amico, Marcantonio Altieri, proprio l'autore dei *Nuptiali*, a un tale che lo interrogava intorno alla sua patria, rispose ch'egli era cittadino di Solforata, una villa della sua famiglia, dov'era nato; e siccome l'altro insisteva nel ritenerlo romano " Erras, inquit; si Roma mihi patria " sive matria esset, nutriret; utique proh dolor, despecti sine " honore, sine favore jacemus ", non per alcun demerito nostro (prosegue), dacchè la mia Roma non produce nè ladri, nè malvagi, ma produce ancora uomini di alto ingegno e d'animo generoso, punto fiaccato dalla lunga servitù, e amanti delle belle arti. E l'Italia ne è buon testimonio: " Testis est Italia, quae " Romanis ducibus, equitatu peditatuque cum Gallis ac Germanis " fortissime nunc pugnat ". Come si vede, il pensiero d'Italia si associa, nella mente dello scrittore, a quello di Roma; ma da quest'ultima allusione ai Colonna e agli Orsini, combattenti quasi a prova del valore romano, scaturisce un sentimento di romanità offesa. Questo stesso sentimento altrove (lib. III, p. 74) spiega il Salamoni a rammentare con orgoglio legittimo la parte da lui presa con altri zelanti concittadini per sollevare e ordinare la vita di Roma, togliendone le discordie che la laceravano; e a lamentare che quegli sforzi avessero avuto poi mali effetti, perchè, mentre un tempo i cittadini benemeriti della patria erano venerati fra gli *eroi* illustri, ora invece sono perseguitati e proscritti (2).

Anche in altri momenti il nobile giureconsulto romano spinge i suoi sguardi a tutta la penisola, ne piange l'oppres-

---

(1) Lib. II, pp. 5, 6 sg. Notevole, anche quest'altro passo, alla fine del lib. V, p. 117: " Non ergo in dominos, sed defensores, Augustos sibi fecit " Populus Romanus, semperque imperium Populi Romani mansit, non Cae" sarum ". E a questo punto il Salamoni riferisce le parole che si leggono sull'Arco trionfale di S. Severo, ai piedi del Campidoglio: Ob Imperium Populi Romani Propagatum.

(2) Questo passo (p. 74) veramente importante, fu trascurato, non solo dal Gregorovius e dal Pastor, ma anche dal Narducci, op. loc. cit., il quale pure illustrò con nuovi documenti l'episodio, memorabile nella storia romana, del quale s'è già fatta parola.

sione, le fiere battiture e le stragi da essa patite a quei giorni pel furore crudele degli stranieri. Se il sangue italiano scorre (egli dice), ne sono colpevoli i principi traviati e accecati dall'ambizione; onde ripete, quasi un grido ardito, il motto d'Orazio: *delirant Reges, plectuntur Achivi* (1).

***

Non si creda per questo che il Salamoni abbia orrore delle armi, tutt'altro. Ma a lui sanguina il cuore di vederle adoperate a fini scellerati e da mani straniere o mercenarie. E in questo punto egli si accorda pienamente col suo glorioso contemporaneo, il Machiavelli.

Il biasimo ch'egli infligge ai *mercenarî* e agli Italiani che se ne servono, invece di farsi essi medesimi difensori della libertà loro, non è meno sincero e serio di quello del Segretario fiorentino (lib. III, pp. 93 sg.). Anch'egli giudica che per mantenere milizie assoldate non vi sono ricchezze che bastino; anch'egli ne rileva l' inutilità, anzi il danno. Anch'egli rievoca il ricordo degli antichi Romani, i quali non sarebbero saliti a tanta grandezza, se non avessero combattuto col loro braccio, " si non " suis lacertis dimicassent ". Anch'egli illustra le sue idee con esempî recentissimi, che dimostrano la superiorità delle armi cittadine, nazionali sulle armi straniere o mercenarie. Esempio insigne, anzi il più memorando fra tutti i recenti, è quello dei Pisani, che diedero prova di valore eroico, nel sostenere gli assalti dei Fiorentini, o piuttosto di quasi tutti gl'Italiani congiurati ai loro danni. Anch'egli, come, in quegli anni medesimi, il Castiglione (2), esalta le virili prodezze delle donne pisane. Il grande segreto di tali miracoli d'eroismo era questo, secondo il

(1) Scrive il S. (p. 84): "... tot annos infestis oppressa armis miserabiliter luget Italia; in cuius excidium omnium Barbarorum immanitas ac " rabies irritata; testis est Verona, Vicetia, Patavium et reliqua Venetia " tota; item Aemilia, Tuscia, Ravenna, Brixia, ubi sine discrimine aetatis, " sexus, locorum, saevitum crudelissime non ignoratur, etc. ".

(2) Nel *Cortegiano*, lib. III, cap. xxxvi. Rimando alla breve nota della edizione da me curata (Firenze, Sansoni, 1894, p. 303, cfr. p. 440), alla quale altre notizie saranno aggiunte nella prossima ristampa.

Salamoni, che i Pisani combattevano per la libertà loro e perciò appunto essi meritavano di essere soccorsi da tutti, mentre, per vergogna dell'età presente, essi non ebbero che o spettatori inerti o nemici. Questi sentimenti tornano, evidentemente, ad onore dell'autore, tanto più che non dobbiamo dimenticare che il suo libro era dedicato ad un papa fiorentino e per giunta mediceo (1).

Il problema militare preoccupava e angustiava dunque lo scrittore del *De principatu*, come strettamente connesso al problema politico. Molte considerazioni che gli escono dalla penna facile, se non elegante, si accordano in modo singolare con quelle che proprio in quei giorni tumultuavano nella mente fervida di Nicolò Machiavelli. Il Salamoni, insistendo sopra un suo pensiero, giudica risolutamente che le Potenze *(Potentatus)* che credevano d'essere grandi e forti per avere in copia denari e milizie mercenarie, si ingannavano: dacchè avevano l'apparenza della grandezza e della forza, non la sostanza reale di esse. E per lui erano " imbelles homines „ anche coloro che, pur essendo ben provvisti di ricchezze, ricorrevano alle armi altrui; condannati appunto per questo ad essere impotenti in pace ed in guerra. Chi non ricorda le obbiezioni consimili che il Machiavelli muove contro le milizie mercenarie in più luoghi delle sue opere?

È noto che il Fiorentino nell'*Arte della guerra* entra a giudicare gli ordinamenti e le condizioni dei varî eserciti europei, notando, per altro, la decadenza o debolezza della Francia, come potenza militare. Qualche cosa di simigliante tenta di fare lo scrittore romano, sia pure con ben diversa profondità e conoscenza della materia. Secondo lui (p. 95) l'esperienza (si badi alla

(1) Ecco per intero il notevole passo riguardante i Pisani: " Quantum " intersit pro se, an pro aliis pugnare, Pisani memorabile documentum " nostra aetate praestiterunt: omni pecuniarum et sociorum auxilio inopes, " quatuordecim annorum obsidionem fortissime soli sustinuerunt non modo " adversus Florentinas opes, verum etiam universos prope Italos, Gallo" rumque impetus... Splenduit tum Pisana virtus etiam foeminis, iuxta " viros pro muris pro portis pro stationibus, die noctuque militaria munera " intrepide obeuntibus. Merentur certe suarum laudum egregium praeconem: " sed multum interest, ut ille ait, in quae cuiusque tempora virtus incidat. " *Quia pro libertate pugnabant, ubi ab omnibus iuvandi* erant, pudet dicere, vel " spectatores suarum virtutum, vel expugnatores omnes senserunt „ (p. 94).

parola), l'esperienza recente aveva dimostrato che le forze dei Francesi e dei Veneziani erano assai minori di quanto si credeva allora comunemente. I Francesi, la cui potenza guerresca soleva incutere un vero terrore, si erano rivelati deboli per difetto di fanteria, tanto che in un solo assalto furono scacciati dall'Italia, ed ora dovevano attendere alla propria difesa contro gli Spagnuoli e gl' Inglesi. Giudizî cotesti che appaiono scritti sotto l'impressione del colpo, anzi della rovina toccata alla potenza francese in Italia, dopo la battaglia di Ravenna.

Si sa che il Machiavelli, con un'idea che fu detta una mirabile intuizione della moderna scienza militare (1), considerò, nel secondo libro dell'*Arte della guerra*, come fondamento degli eserciti la fanteria. Lo stesso concetto esprime il giureconsulto romano, pel quale senza i fanti non poteva esservi un esercito — verumtamen sine peditatu non est exercitus — tanto è vero, che un uomo espertissimo di cose militari, Ificrate “ pedites “ manibus similes esse dicebat, et equites, pedibus „ (2).

Dopo i Francesi, i Veneziani.

Nel primo libro dell'*Arte della guerra* il Machiavelli addita come principale cagione della loro rovina l'essersi essi dati alle espansioni ed alle guerre di terraferma ricorrendo a capitani di ventura e a milizie assoldate. Egualmente, pel Salamoni i Veneziani si erano dimostrati deboli e imbelli per non avere nè fanteria, nè cavalleria loro propria, ma soltanto mercenarie; cosicchè la loro potenza dipendeva tutta dalla fortuna d'un solo, l'Alviano, il quale, sebbene avesse combattuto con grande valore contro i Francesi, e compiuto il dover suo d'ottimo e prode capitano, tuttavia, vinto in una sola battaglia, trascinò nella sua caduta la fortuna di Venezia, che perdette ogni cosa, tranne una sola (soggiunge lo scrittore) le mura. “ Omnia Venetorum “ praeter urbis moenia amissa vidimus „, proprio le mura che non esistevano! Si direbbe una sanguinosa ironia! Anzi (egli

---

(1) Cfr. Villari, op. ed. cit., III, 82 sg.

(2) Veramente l'ediz. del 1578 reca la lezione *Epycrates*, che neppure il Faerno e il Corbinelli seppero emendare, mentre è evidentemente scorretta, come m'avverte con la sua cortesia ed erudizione il collega prof. Sabbadini, che a ragione addita la fonte del passo del Salamoni nel principio della *Vita di Pelopida* scritta da Plutarco, dove appunto occorre lo stesso epifonema militare.

continua) i Veneziani sarebbero stati addirittura spacciati, se non fossero riusciti a placare in maniera vergognosa l'ira di Giulio II (1).

Questo sentimento sfavorevole, per non dire ostile, ai Veneziani il Salamoni ha comune col Machiavelli, e contrasta in modo singolare con l'ammirazione che altri, specie dal mezzogiorno d'Italia, esprimevano per il popolo glorioso delle lagune. Non ho bisogno di ricordare la magnifica lode del Sannazaro; ricordo, perchè cosa men nota, che il Galateo, ponendo in confronto Roma e Venezia, compiange e biasima la prima, un tempo capo del mondo, ora sentina di tutti i vizî e di tutti i delitti (2), esalta la seconda come la sola città d'Italia, dove abbia trovato degno rifugio lo spirito di libertà, spento dovunque, e insieme con esso l'amore e l'esercizio degli studî e delle arti liberali. Mentre nelle altre sue parti l'Italia si può dire morta, in Venezia soltanto essa continua a vivere e da Venezia s'augura il De Ferrariis abbia a risorgere la libertà italiana (3).

---

(1) Mette conto di riferire le parole testuali del S.: " Omnia Venetorum praeter urbis moenia amissa vidimus, deque ipsis actum fuisset, nisi Julii II Pont. Ro. iram turpiter placassent, et per Oratores scilicet, publico decreto ad hoc ipsum destinatos, Pontificis pedibus calcandas cervices, universo spectante Po. Ro. suppliciter porrexissent ". Pei fatti ai quali il S. si riferisce qui, specialmente alla solenne cerimonia della assoluzione dei Veneziani (24 febbraio 1510), rimando al Pastor, *Geschichte der Päpste*[4], III, 641-3.

(2) Il Galateo scriveva: " Roma, quondam orbis caput, nunc sentina facinorum, ignaviae servit, gulae, rapinis, libidini et sceleribus omnibus. Illa est omnium malorum officina, in qua *servi servorum dominantur, et rerum potiuntur, quibus pauperes esse et saeculum et peram gestare Dominus noster precipit.* In Venetiarum urbe sola antiquae Italiae libertatis imago est; extinctus est ubique *Italiae spiritus*, in illa tantum urbe vivit et ut diu vivat praecamur ". Questo passo importante è tratto dal *De Educatione* (in *Opuscoli*, vol. II della *Collana di Scritt. di Terra d'Otranto*, Lecce, 1867, pp. 126-7), l'operetta il cui valore storico e psicologico ben mise in luce l'amico Croce nel " Giornale stor. d. lett. ital., XXIII, 394 sgg. ".

(3) " Illa urbs (continua il Galateo, op. cit., p. 128) est, quae graecas et latinas literas custodit et studia liberalium artium, et omnes ingenuas disciplinas et artes. *Ubique mortua est Italia*, in illa tantum urbe vivit, vivetque ac ex illa, ut auspicor, *resurget Italiae libertas* ". In un'altra operetta *De laudibus Venetiarum* a Luigi Loredan (vol. II degli *Opuscoli*, vol. III della *Collana* cit., Lecce, 1868, p. 40) il De Ferrariis proclama Venezia non

Giudizî troppo severi quelli del Machiavelli e del Salamoni, illusioni troppo entusiastiche queste del Galateo, ma le une e gli altri segni preziosi dei tempi, documenti vivi dell'opinion pubblica italiana durante il così detto periodo aureo della Rinascenza.

A noi importa notare, come conclusione di questa parte, che il Salamoni, mosso da un nobile sentimento patriottico, intravide ed espresse quell' idea nuova d'un esercito veramente nazionale da sostituirsi ai mercenarî, che spettava al Machiavelli affermare in modo così chiaro e vigoroso da meritarle l'epiteto di *profetica* (1).

Ma v'è in coteste pagine del *De principatu* un altro sentimento che gareggia di vigore con questo patriottico e guerresco, anzi lo vince per la sincerità e per la portata sua; voglio dire del sentimento antichiesastico od anticuriale.

Neppure questo infatti era un vano o superficiale sfogo retorico, dovuto a scarsezza di sentimento religioso; anzi, come avveniva di solito a quel tempo, riceveva ispirazione e forza da esso ed era indizio sicuro della condizione eccezionale d'uno spirito, estraneo o, meglio, avverso all'indifferentismo e allo scetticismo dominanti negli uomini più colti del Rinascimento nostro.

E veramente il Salamoni aveva una pietà religiosa ben radicata nell'anima, calda, viva, operosa. Ciò appare fin dal principio del suo libro, dove gli interlocutori del dialogo, nell'atto di cominciare i loro ragionamenti, sentono il bisogno d'invocare Dio e per meglio disporre il cuore alla difficile impresa innalzano una preghiera alla Vergine, che impetri loro dallo Spirito Santo la grazia di conoscere il vero. " Te, Diva parens, supplices " exoramus... ", così incominciano ad una voce. Ed io confesso che questa fervida invocazione che risuona in questo, sia pure imaginario, cenacolo di dotti, nell'età e nella Roma di Giulio II

inferiore a Roma: " Ista est Arx et Deus Italiae et spes altera... ista est " alma Italiae parens... " e dice che la Provvidenza divina volle che essa fosse " arcem Italicae libertatis et gloriae asylum et confugium miserorum " et Christianorum tutelam ".

(1) Villari, op. ed. cit., III, 83.

e di Leone X, se non mi ha sorpreso troppo, mi ha dato a pensare, tanto più che sin da principio, strettamente collegato con questa preghiera, anzi incitamento ad essa, in quella pia brigata di amici s'afferma un fervido desiderio di riforma salutare e un biasimo aperto e una grave rampogna contro le male opere dei sacerdoti, che, invece di benedizioni, attirano maledizioni sul capo dei fedeli, cosicchè il misero popolino *(plebecula)*, che crede di propiziarsi Dio mercè le preghiere di costoro, non solo è ogni giorno angariato *(quotidie emungitur et tondetur)*, ma diventa sempre più inviso a Dio stesso!

Questo spirito antichiesastico serpeggia in tutto il libretto del giureconsulto romano e si esprime talvolta in forma vigorosa, efficace.

Egli si scaglia (p. 64) con parole veementi contro la simonia imperante nella Chiesa dei suoi tempi, deplora che Cristo, che era stato venduto e tradito una volta, e di nascosto, da Giuda, sia ora venduto cento volte al giorno e palesemente. Vagheggiatore della semplice bontà cristiana del Vangelo, disapprova, con allusione evidentissima a papa Giulio II (1), le tendenze bellicose della Chiesa e non sa darsi pace al vedere che l'oro, frutto delle elemosine, che dovrebbe servire a nutrire i poveri e a riscattare i prigionieri, si sperperi, a danno anche delle anime, in imprese sanguinose, in guerre continue che travagliano e devastano l'Italia e risuscitano inopportunamente i fasti del paganesimo coi trionfi armati per le vie di Roma: " Gentilium more superbos per Urbem trahi triumphos „ (p. 85-6).

Mentre dura ancora l'eco degli applausi onde Giulio II era salutato liberatore d'Italia, il Salamoni, quasi ad ammonire il suo successore, pur avendo un grande ardore patriottico, osa rammentare il detto di S. Ambrogio, che aveva proclamato le sole armi dei chierici dover essere le preghiere e le lacrime, e si duole di vedere, dinanzi a questo spirito profano di guerra,

(1) Curioso, quest'altro aneddoto, nel quale papa Giulio è menzionato, in principio del libro (p. 5), dove si discute se il pontefice sia tenuto dalle costituzioni stesse che obbligano tutti i fedeli, a confessarsi una volta all'anno, e prevale l'opinione negativa. Lo " Storico „ allora osserva: " Non " peccavit ergo Iulius II, qui bello Bononiensi occupatus, confessionis oblitus " fuit „. Ma il " Teologo „ afferma che Giulio peccò " quamvis poena illius " Canonis non ligetur, quippe in Pontifice minime boni res exempli fuit „

sparire lo spirito fondamentale della religione, la carità cristiana *(ipsius charitatis delectio)*, onde avviene, egli dice, che la religione stessa sia non solo derisa, ma persino detestata dai Cristiani.

Invece, in quegli anni medesimi, il Machiavelli, che invocava il papato mediceo alleato al suo principe nuovo, dava lode a Giulio II per aver saputo con " la lunga parsimonia sua „ fare tante guerre senza imporre tasse straordinarie ai suoi sudditi (Cap. XVI).

Come si vede, qui la differenza fra i due scrittori sul modo di concepire e di sentire la storia e la vita politica, è profonda e caratteristica. Il fiorentino subordina, senza scrupoli, senza esitanze, anzi direi con entusiasmo, ogni altra considerazione al fine ultimo, che è esclusivamente politico, il nuovo principato italiano; il romano per contro, indotto dai suoi criteri e sentimenti morali e religiosi, vorrebbe segnare i giusti confini all'opera dei rappresentanti delle due potestà, la civile e la religiosa.

Nè il Salamoni si ferma a questo punto. Egli osserva corrucciato che, mentre un tempo la Chiesa romana si opponeva rigidamente alle seduzioni corruttrici delle voluttà e dei piaceri, ora anch'essa, ammollita, corrotta dalle ricchezze, dà il malo esempio, cosicchè, invece di reprimere, come dovrebbe e come faceva in passato, la superbia degli uomini con la umiltà sua, è fatta anch'essa superba per cieca libidine di ambizione *(dominandi potestate superbit)*.

Anche in queste considerazioni, suggerite evidentemente dalla realtà storica contemporanea, è presa di mira la politica del pontefice roveresco, del *terribile* assalitore della Mirandola; e poco più oltre è sferzata con impeto dantesco la corruttela e la lascivia impudente, la mollezza, la mondanità del clero romano (1).

---

(1) Così suona, aspra e forte, la parola del S.: " ... Clerus noster, a quo " caeteri discunt licentiose vivere; quod ambitiose, lasciviter, impudenter " victitet, domi amatoriis speculis, concubinis proliparis, tanta coma non " modo calamistrata, verum etiam unguentata, mollibus nequitiosus vestibus; " aut resupinus sica terribilis incedit, non est qui paululum admoneat „ (pp. 101-2). Sarebbe interessante conoscere quale impressione avrà provato Leone X, il grasso, nitido, epicureo pontefice mediceo, alla lettura di questo e di altri passi consimili.

Come Dante, il Salamoni, per bocca del " Filosofo „, professa la sua riverenza delle somme chiavi " de summo pontifice (scrive) verecunde semper ac reverenter loquor „ (p. 107); ma ciò non gli impedisce di osservare che, sebbene il papa, come rappresentante della maggior potestà della terra, non possa essere giudicato da alcun altro, neppure pei suoi abusi di autorità, per la sua tirannide (" a nemine propter hoc iudicari queat „), egli non potrà sottrarsi al giudizio superiore di Dio.

Messosi su questa via, il Salamoni si spinge innanzi risolutamente, coraggiosamente. Egli inveisce contro la simonia; il che non era nè nuovo, nè segno di grande coraggio. Il motivo satirico era vecchio, sfruttato ormai da poeti e filosofi e trattatisti e anche Giulio II aveva emanato in quegli anni una bolla contro la simonia. Ma il Salamoni, cristiano zelante, giureconsulto dotto e convinto, induce il suo " Giurista „ e il suo " Storico „ a toccare una questione spinosa e pericolosa, quella che anche oggi ha conservato, purtroppo, e spine e pericoli a danno della religione e della patria, voglio dire la questione del poter temporale.

Il deplorare la donazione di Costantino, il combatterla pei suoi effetti, era tutt'altro che una novità, e prima e dopo di Dante, anzi diventò anche questo un tema comune della letteratura satirica. Ma parve e fu audacia quella del Valla, che riprese a confutare con piglio battagliero e con critica nuova gli argomenti e il documento sui quali si fondava la secolare tradizione. La parola del Valla non rimase lettera morta; fruttò anche nella mente del Salamoni, il quale cita appunto e con lodi grandi il suo concittadino illustre (1).

---

(1) Una delle più notevoli fra le molte attestazioni che a questo riguardo si potrebbero addurre, è quella che io ebbi a riferire in una nota del *Cortegiano* (lib. II, cap. LXI, ed. cit., p. 201, n. 11). Girolamo Donato, ambasciatore veneziano, interrogato per ischerzo da Alessandro VI donde i Veneziani avessero ricevuto il privilegio dell'impero sul mare Adriatico, rispose subito con arguta prontezza: " Mi mostri Sua Santità l'istrumento del patrimonio di San Piero e a tergo ci vedrà registrata la concessione fatta ai Veneziani del dominio loro sull'Adriatico „. Il memorabile libretto polemico del Valla è qui tutto in una sintesi efficace, un motto salato. Giova qui rammentare ciò che altrove (" Giorn. stor. d. lett. it. „, XXIX, 410, n. 1) rilevai ad altro proposito, la severità irosa con cui un contem-

A primo aspetto egli ha soltanto l'aria di mettere in dubbio la realtà di quella donazione; ma non è difficile comprendere il suo intimo pensiero. Egli sa e fa capire che l'argomento da lui preso a trattare è scottante, e ricorda che Lorenzo Valla, uomo, senza contrasto, dottissimo, rischiò d'essere messo fra gli eretici per aver negato la donazione costantiniana. Vero, peraltro, che Enea Silvio Piccolomini, che scrisse con grandissimo vigore contro la stessa donazione, nè mai ritrattò quel suo scritto, fu inalzato fra l'universale consenso alla dignità pontificia. Quanto a sè, egli, l'autore, non sa quale sorte lo attenda; ma per evitare qualche malanno pensa che sarà bene tacere (1).

Indarno il " giurista „ eccita lo " storico „ a parlare senza riguardo o timore (*Edissere audacter*, ecc.), chè la Chiesa romana non ha a temere della verità, che è nemica delle *favole* (" Ecclesia Romana gaudet veritate *fabulosis adnotationibus* inimica „). Indarno: lo " storico „ risponde scongiurando il collega di lasciare da un canto queste cose, estranee alla materia che era stata scelta pei loro ragionamenti. Ma è troppo tardi. L'autore ha parlato abbastanza; e da quello che ha detto e, più ancora, da quello che ha sottinteso per prudenza, appare chiarissima l'opinione sua, risolutamente, nettamente contraria all'autenticità della donazione costantiniana. Che gliene sia venuto qualche danno ignoro, ma non credo probabile, forse perchè il suo libro, scritto a tempo di Leone X e dedicato a questo pontefice, non vide la luce se non ventitrè anni dopo che il papa mediceo era sceso nella tomba. È certo peraltro che il *De principatu* non fu messo all'indice. Ma forse non fu senza ragione che il Vacca, desiderando vederlo ristampato, si rivolgesse, nel 1577, a Parigi.

Ad ogni modo i compilatori dei varî Indici di libri proibiti avevano compreso nelle loro periodiche retate molti libri che, dal loro punto di veduta, erano assai meno arditi e pericolosi

poraneo del Salamoni, Raffaello Maffei volterrano, in un'opera indirizzata a Giulio II, giudicava il Valla non per altro che per l'opuscolo *de Constantini donatione*, nel quale, secondo lui, l'umanista romano aveva osato di scuotere la base stessa del poter temporale e " latrare contra ipsam religionem „.

(1) " Nos latet quae sors futura sit nobis. Taceamus ergo ne in aliquod discrimen incidamus „.

di quello del Salamoni; al quale credo abbia giovato la poca diffusione e la rarità dell'opera sua.

Infatti nel giureconsulto romano non sentiamo quell'umore fra di maldicenza e di satira antichiesastica che proprio in quegli anni veniva affermandosi per bocca di Pasquino. C'è in lui qualche cosa di più alto e di più serio. Anche Erasmo, visitando Roma per la prima volta nel 1509, aveva osservato con un senso di meraviglia e di dolore, e aveva biasimato la maldicenza di Pasquino (1); ma anch'egli, sebbene conservatosi sempre cattolico e sceso poi in campo contro Lutero, non potè non riconoscere la verità triste di molte accuse che il suo avversario aveva lanciato contro Roma (2). Era la coscienza severa d'uno stato di cose che avrebbe condotto alla rovina la Chiesa e la vita sociale, la coscienza d'un bisogno urgente di radicali riforme. E il Salamoni, in quegli anni nei quali si radunava il Concilio lateranense, vedeva e sentiva tutto questo, e propugnava la riforma, senza dubbio, nell'orbita del Cattolicismo, ma con zelo ardente e con ardire non comune. Anche ciò torna a non piccolo onore di lui.

Questo spirito antichiesastico il Salamoni ha in comune con l'autore del *Principe*. Non ho bisogno di dire quanto esso abbondi nel Machiavelli e come si esprima; ma si può notare che, mentre in quest'ultimo esso è prodotto da un sentimento, che se non è propriamente irreligioso e pagano, è scetticismo e indifferentismo, in quello scaturisce, come s'è detto, per naturale reazione da una vena di religiosità viva e sincera. Anche va notato che lo statista fiorentino, indotto da ragioni d'opportunità (3), soffoca e nasconde nelle pagine del *Principe* quel suo sentimento che lo portava a odiare e biasimare il chiericato e

---

(1) Cfr. De Nolhac, *Érasme en Italie*, Paris, 1888, p. 74. I due passi delle epistole erasmiane, citati dal De Nolhac, confermano ciò ch'io credo da un pezzo, vale a dire che sin dalle origini sue Pasquino fu e pedante grammatico e maldicente satirico, una specie di Giano Bifronte. Infatti Erasmo in Campo di Fiore aveva veduto vendere " quae *frigidi grammatici* " nugantur in Pasquillum ", e d'altro canto deplorava che ad alcuni brutti sfaccendati (*male feriatis*) di Roma non paresse sufficiente, come sospettava, " Pasquillorum iocorum *licentia* ".

(2) Cfr. De Nolhac, op. cit., p. 79.

(3) Era il tempo nel quale il povero Machiavelli sospirava d'essere impiegato dai Medici, fosse anche a " voltolare un sasso! ".

il papato, mentre lo lascia sbizzarrirsi liberamente nei *Discorsi* e in altri scritti, sovrattutto nella *Mandragora*. Nè poteva essere altrimenti, quando si pensi che la sua operetta era scritta per un Medici, dedicata ad un Medici e che la potenza papale medicea v'era esaltata apertamente (1).

Per essere giusti, aggiungeremo che il Salamoni si mostra più coerente del Machiavelli. Egli evita la contraddizione in cui l'altro, trascinato dalle necessità della vita e dei tempi, forse anche da una generosa illusione, e dalle sue stesse dottrine politiche, cadeva, io credo, non senza un'amara consapevolezza; la contraddizione di dedicare il *Principe* a un fratello o a un nipote, ambedue inetti, d'un papa mediceo e sulla potenza di quel papato fondare le sue speranze nella fortuna del nuovo principe, anche dopo la triste esperienza dei Borgia, e proprio mentre nei *Discorsi* e nelle *Istorie* additava la Chiesa politicante e il papato temporale come principale cagione della rovina d'Italia.

---

(1) Nel cap. xi e nel xxvi. Perciò appunto escluderei l'ironia che il Gaspary, *Storia*, vers. Rossi, II, II, 21, seguìto dal Lisio, *Commento* all'ediz. scolast. cit. del *Principe*, p. 71, scorge in quel capitolo XI, dove si discorre dei principati ecclesiastici. Essa mi sembra inopportuna, anzi in troppo aperta contraddizione con le lodi che il Machiavelli dà non tanto a Leone X, come osserva il Lisio, quanto alla sua potenza di pontefice temporale, onde egli dice favorita da Dio la sua Casa. Il Lisio nota che un tale " contrasto " non deve meravigliare e adduce l'esempio delle *Istorie*, le quali, pur essendo dedicate a Clemente VII, contengono (I, 3) una terribile invettiva contro il papato politicante e oppressore d'Italia. Ma il riscontro non mi pare calzi abbastanza, dacchè si tratta di due casi notevolmente diversi. Infatti la dedica a Clemente VII, papa mediocre, remissivo, alieno dalla grande politica teocratica, ha un significato puramente esteriore ed appositizio, a quella guisa che l'invettiva, in quel vasto libro di storia, ha un carattere generico, impersonale e insieme episodico. Nel *Principe* invece gli elogi alla potenza del papato mediceo, come pure la dedica ad uno della famiglia Medici sono strettamente legati all'idea fondamentale dell'opera. Parlare con ironia dei principati ecclesiastici sarebbe stato in tal caso abbattere una delle colonne dell'edificio costruito dallo statista; il quale inoltre non si sarebbe dimostrato nè buon pensatore, nè avveduto cortigiano. Ancor meno probabile mi pare quella " leggera punta d'ironia " che il Lisio sente nel cap. VI, § 3, dove si parla di Mosè, che ebbe " sì gran precettore " in Dio stesso. Non ho bisogno di ripetere che il Machiavelli non fu irreligioso sino alla irriverenza, come sarebbe qui, se veramente scherzasse addirittura sulla divinità; esso fu uno scettico e un indifferente.

Ma, si sa bene, è più facile trovare la coerenza negli spiriti mediocri che non nei grandissimi.

Sta il fatto che, dopo questo confronto, lo scrittore del *Principe*, con tutti i suoi difetti, grandeggia sempre più agli occhi nostri per la forza e la luce vivida del suo pensiero eminentemente italiano e moderno e per l'arte stupenda onde seppe gittarlo e plasmarlo nella prosa volgare. Un tale confronto, se ci permette di notare meglio quei difetti, ci costringe anche ad apprezzare e ad ammirare con maggiore coscienza quella grandezza.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

INDICE

DEL VOLUME XXXV

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi unite.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino